16. ročník, úloha I . S ... *komplexní čísla* *(4 body; průměr 2,24; řešilo 21 studentů)*

a) Spočtěte reálnou a imaginární část sin(a + bi).

b) Pomocí komplexní symbolické metody odvoďte vztah pro rezonanční frekvenci paralelního RLC obvodu, tj. nalezněte frekvenci, pro kterou má při konstantním napětí celkový proud v obvodu minimální amplitudu.

c) Sečtěte pomocí komplexních čísel následující řady. (Návod: řada A + Bi je geometrická.)

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\delta} \cos(n\varphi), \qquad B = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\delta} \sin(n\varphi).$$

a) Vyjádřeme si $\sin(a+b\mathrm{i})$ pomocí Eulerova vztahu. Pro $\sin x$ dostaneme (jak již bylo uvedeno v seriálu): $\sin x = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})/2\mathrm{i}$. Nyní dosazením $a + b\mathrm{i}$ za x obdržíme

$$\sin(a+b\mathrm{i}) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a+b\mathrm{i})} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(a+b\mathrm{i})}\right) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}\mathrm{e}^{-b} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}\mathrm{e}^{b}\right) =$$
$$= -\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\mathrm{e}^{-b}(\cos a + \mathrm{i}\sin a) - \mathrm{e}^{b}(\cos a - \mathrm{i}\sin a)\right) =$$
$$= -\frac{\mathrm{i}}{2}(\mathrm{e}^{-b} - \mathrm{e}^{b})\cos a + \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-b} + \mathrm{e}^{b})\sin a.$$

Tedy reálná a imaginární část čísla $\sin(a + b\mathrm{i})$ jsou rovny

$$\mathcal{Re}\,(\sin(a+b\mathrm{i})) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{b} + \mathrm{e}^{-b})\sin a, \quad \mathcal{Im}\,(\sin(a+b\mathrm{i})) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{b} - \mathrm{e}^{-b})\cos a.$$

b) V případě paralelního zapojení je převrácená hodnota výsledné impedance rovna součtu převrácených hodnot impedancí jednotlivých členů obvodu. Aplikace tohoto poznatku dává

$$\hat{I} = \left(\frac{1}{R} + \mathrm{i}\omega C + \frac{1}{\mathrm{i}\omega L}\right)\hat{U},$$
$$\hat{I} = \left(\frac{1}{R} + \mathrm{i}\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)\right)\hat{U}.$$

Nás ovšem zajímá pouze velikost proudu, nikoliv jeho fáze. Potom

$$|\hat{I}| = |\hat{U}|\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}.$$

K rezonanci bude docházet, jestliže se druhý člen pod odmocninou bude rovnat nule. Tedy $\omega^2 = \frac{1}{LC}$. V případě paralelní rezonance nastává minimum proudu. Velikost proudu není pro $\omega \to \infty$ nijak omezena.

c) Dle návodu využijeme toho, že řada $A + B\mathrm{i}$ je geometrická, a tedy ji bude možno za jistých předpokladů sečíst. Tedy

$$A + B\mathrm{i} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-n\delta}\cos(n\varphi) + \mathrm{i}\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-n\delta}\sin(n\varphi),$$
$$A + B\mathrm{i} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-n\delta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi} = \sum_{n=1}^{\infty}(\mathrm{e}^{-\delta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})^n.$$

Jedná se proto o geometrickou řadu s kvocientem $e^{-\delta}e^{i\varphi}$. Aby byla řada konvergentní, musí být velikost kvocientu menší než jedna. Velikost $e^{i\varphi}$ je rovna jedné, a proto musí být velikost $e^{-\delta}$ menší než jedna. Čili $\delta > 0$. Známý vztah na součet nekonečné geometrické řady začínající jedničkou je $s = \frac{1}{1-q}$, kde q je kvocient. Přímým dosazením dostaneme

$$
\begin{aligned}
s =& \frac{1}{1 - e^{-\delta}e^{i\varphi}} = \frac{1}{1 - e^{-\delta}\cos\varphi - ie^{-\delta}\sin\varphi} = \\
=& \frac{1 - e^{-\delta}\cos\varphi + ie^{-\delta}\sin\varphi}{(1 - e^{-\delta}\cos\varphi)^2 + (e^{-\delta}\sin\varphi)^2} = \frac{1 - e^{-\delta}\cos\varphi + ie^{-\delta}\sin\varphi}{1 + e^{-2\delta} - 2e^{-\delta}\cos\varphi}.
\end{aligned}
$$

Potom tedy je součet řady A roven reálné části tohoto součtu a obdobně součet řady B imaginární části.

$$
\begin{aligned}
A = \mathcal{R}e\ s &= \frac{1 - e^{-\delta}\cos\varphi}{1 + e^{-2\delta} - 2e^{-\delta}\cos\varphi}, \\
B = \mathcal{I}m\ s &= \frac{e^{-\delta}\sin\varphi}{1 + e^{-2\delta} - 2e^{-\delta}\cos\varphi}.
\end{aligned}
$$

Míra Šulc
`fykos@mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.