16. ročník, úloha II . S ... *limity a derivace* *(4 body; průměr 3,64; řešilo 39 studentů)*

a) Dokažte, že těleso, které má v čase t polohu $x = gt^2/2 + v_0t + x_0$, se pohybuje se zrychlením g.

b) Spočítejte $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-4x+3}{x^2+2x-3}$.

c) Nahraďte co nejlépe funkci f v okolí bodu $x = 0$ lineární funkcí, víte-li, že $f(0) = 3$ a $f'(0) = -2$.

d) Jaký je poměr výšky a průměru podstavy válce, který má při daném povrchu maximální objem?

a) Jak bylo uvedeno v seriálu, je okamžitá rychlost první derivací dráhy podle času. Stejně tak okamžité zrychlení je první časovou derivací rychlosti. Tedy ve výsledku je okamžité zrychlení druhou časovou derivací dráhy dle času. Pro funkci ze zadání dostaneme $v = \dot{x} = gt + v_0$ a $a = \dot{v} = g$.

b) Zadaná funkce je v bodě 1 zjevně nespojitá. Proto ji nahradíme v jistém okolí bodu 1 funkcí spojitou, která jí je na tomto okolí rovna. Potom bude limita původní funkce rovna funkční hodnotě nové funkce v bodě 1. Nejsnáze to provedeme tak, že čitatel i jmenovatel vydělíme výrazem $(x-1)$. Tedy dostaneme

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-4x+3}{x^2+2x-3} = \lim_{x\to 1} \frac{x-3}{x+3} = -\frac{1}{2}.$$

c) V bodě nejlépe funkci nahrazuje její tečna. Víme, že směrnice tečny je rovna derivaci funkce v daném bodě. Dále známe jeden bod, kterým tečna musí procházet, její rovnice tedy je $y = -2x + 3$.

d) Pro válec platí

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h, \qquad V = \pi r^2 h,$$

kde r je poloměr podstavy a h výška válce. Jelikož je dán povrch, vyjádříme objem válce pomocí jeho povrchu.

$$S = 2\pi r(h + r) \quad \Rightarrow \quad h = \frac{S}{2\pi r} - r \quad \Rightarrow \quad V = \frac{1}{2}Sr - \pi r^3.$$

Pro určení extrému objemu vypočteme první derivaci objemu podle r. To, že první derivace nabývá nulové hodnoty, sice neznamená vždy, že funkce má v daném bodě extrém, ale není těžké přesvědčit se, že pro náš případ funkce extrému nabývá např. dosazením blízkých hodnot vypočteného r.

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = \frac{S}{2} - 3\pi r^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad S = 6\pi r^2.$$

Dosazením do vztahu pro S dostaneme, že $h = 2r$.

Míra Šulc
fykos@mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.