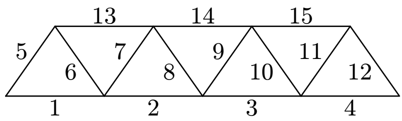
16. ročník, úloha III . 2 ... železniční most *(4 body; průměr 2,64; řešilo 14 studentů)*

Chrabrý rudoarmějec vjel tankem na železniční most, jehož konstrukce, nad ním se tyčící, je schématicky znázorněna na obr. 1. Vaším úkolem je popsat, jak moc budou při přejezdu namáhány jednotlivé části mostu. Pokud jsou meze pevnosti všech tyčí v tahu stejné jako meze v tlaku, určete maximální hmotnost tanku, který po mostě může přejet. Můžete uvažovat, že tank je oproti mostu malý.

Při řešení této úlohy zanedbáme namáhání mostu vlastní vahou. Tím si celou úlohu zjednodušíme a toto namáhání by šlo nakonec do celého výsledku započítat. Dále budeme předpokládat, že se jednotlivé nosníky mostu nebudou prohýbat. Toto by v praxi zcela zanedbat nešlo, ale pro naše přibližné řešení to bude stačit.

Nejdříve si očíslujeme nosníky (viz obr. 1). Nosníky zpevňující vozovku očíslujeme 1–4, šikmé nosníky 5–12 a horní vodorovné nosníky 13–15. Úhel mezi šikmým a vodorovným nosníkem označíme α. Po vjetí tanku na most na nosníky bude na obou koncích působit síla, stejné velikosti a opačného směru. Tuto velikost u i-tého nosníku označíme f_i a budeme používat konvenci, když je tyč namáhána v tlaku, bude f_i kladné a v tahu záporné. V rovnováze bude platit, že síly působící v jednom uzlu se navzájem vyruší. Díky symetrii bude stačit vypočítat zatížení mostu jen pro tank na dílech 1 a 2. Když bude tank na určitém dílu, rozdělí se síla na dvě části, které budou působit na koncích tohoto dílu.



Obr. 1

Když budeme psát rovnice, pro vyrušení sil v jednom uzlu, získáme dvě rovnice, jednu pro svislou složku síly a jednu pro vodorovnou. Nejdříve si napíšeme rovnice pro horní čtyři uzly.

$$f_5 + f_6 = 0, \quad (f_5 - f_6)\cos\alpha - f_{13} = 0,$$
$$f_7 + f_8 = 0, \quad (f_7 - f_8)\cos\alpha + f_{13} - f_{14} = 0,$$
$$f_9 + f_{10} = 0, \quad (f_9 - f_{10})\cos\alpha + f_{14} - f_{15} = 0,$$
$$f_{11} + f_{12} = 0, \quad (f_{11} - f_{12})\cos\alpha + f_{15} = 0.$$

Dále napíšeme rovnice pro uzel mezi díly 3 a 4

$$f_3 - f_4 + (f_{10} - f_{11})\cos\alpha = 0, \quad f_{10} + f_{11} = 0.$$

Nyní napíšeme rovnice pro uzly mezi díly 1, 2 a 3. V uzlu mezi 1 a 2 necháme působit sílu f_a, v druhém f_b. Tyto síly budou působit směrem dolů. Dostaneme tedy rovnice

$$(f_6 + f_7)\sin\alpha = f_a, \quad f_1 - f_2 + (f_6 - f_7)\cos\alpha = 0,$$
$$(f_8 + f_9)\sin\alpha = f_b, \quad f_2 - f_3 + (f_8 - f_9)\cos\alpha = 0.$$

Zatím máme 14 rovnic a patnáct neznámých. Jako poslední rovnici přidáme podmínku, že síla na jednom konci mostu je svislá

$$f_1 + f_5\cos\alpha = 0.$$

Nyní máme dostatek rovnic, je jich sice 15, ale řešení není zas tak složité. Po chvíli práce dostaneme

$$f_1 = (3f_a + 2f_b)\frac{\cos\alpha}{4\sin\alpha}, \quad f_2 = (5f_a + 6f_b)\frac{\cos\alpha}{4\sin\alpha},$$

$$f_3 = -(f_a + 2f_b)\frac{3\cos\alpha}{4\sin\alpha}, \quad f_4 = (f_a + 2f_b)\frac{\cos\alpha}{4\sin\alpha},$$

$$f_6 = -f_5 = \frac{3f_a + 2f_b}{4\sin\alpha}, \quad f_7 = -f_8 = \frac{f_a - 2f_b}{4\sin\alpha},$$

$$f_9 = -f_{10} = f_{11} = -f_{12} = \frac{f_a + 2f_b}{4\sin\alpha}, \quad f_{13} = -(3f_a + 2f_b)\frac{\cos\alpha}{2\sin\alpha},$$

$$f_{14} = 2f_{15} = -(f_a + 2f_b)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Nyní již zbytek dopočteme pro $\alpha = \pi/3$

Pokud je tank na 1. dílu je $f_b = 0$ a $f_a = mgx/l$, kde l je délka jednoho dolního dílu a x je vzdálenost tanku od kraje. Dosadíme a nalezneme, ve které tyči je tlak nejvyšší. Je to pro $x = l$ v dílu 5, 13 a 6, kde

$$|f_6| = |f_5| = |f_{13}| = \frac{\sqrt{3}}{2}mg.$$

Když je tank na 2. dílu je $f_a = mg(2l - x)/l$ a $f_b = mg(x - l)/l$. Zde je maximální hodnota pro $x = 2l$, v dílu 14.

$$|f_{14}| = \frac{2\sqrt{3}}{3}mg.$$

Je tedy vidět, že nejvíce je zatěžován nosník 14, a to když je tank uprostřed mostu. Pro maximální hmotnost tanku platí

$$m_{\max} = \frac{\sqrt{3}\,F_{\max}}{2g},$$

kde $F_{\max}$ je maximální síla, kterou nosník vydrží.

Karel Honzl
`fykos@mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.