16. ročník, úloha III . P ... *velikost elementárních částic* *(4 body; průměr 2,45; řešilo 29 studentů)*

a) *Elektrostatická energie rovnoměrně nabité koule je $E = (3Q^2)/(20\pi\varepsilon_0 R)$. Pokud to dokážete, ověřte tento vztah výpočtem, jinak řešte rovnou úkol b).*

b) *Pomocí tohoto vztahu se pokuste ze znalosti klidové energie protonu a elektronu spočítat rozměr těchto částic.*

c) *Rozmyslete, proč je tento postup zcela nesmyslný. Pozn.: experimentálně je ověřeno, že rozměr elektronu je menší než 10^{-19} m.*

a) Energie nabité koule se spočítá z představy, že celý náboj je v nekonečnu a my ho na kouli přitáhneme. Náboj budeme tahat postupně v kulových slupkách. Práce potřebná na přidání slupky ve vzdálenosti r je

$$\mathrm{d}W = \varphi\,\mathrm{d}Q,$$

kde φ je potenciál koule v této vzdálenosti. Nabitá koule se z vnějšku chová jako bodový náboj.

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r} = \frac{\varrho r^2}{3\varepsilon_0},$$

kde ε_0 je permitivita vakua a za Q jsme dosadili vyjádření pomocí hustoty náboje $Q = 4\pi r^3\varrho/3$. Zdiferencováním pro $\mathrm{d}Q$ potom dostaneme $\mathrm{d}Q = 4\pi\varrho r^2\,\mathrm{d}r$. Po dosazení získáváme pro práci

$$\mathrm{d}W = \frac{4\pi\varrho^2 r^4\,\mathrm{d}r}{3\varepsilon_0}.$$

Výsledná energie je práce na přenesení všech slupek

$$E = \int_0^R \frac{4\pi\varrho^2 r^4}{3\varepsilon_0}\,\mathrm{d}r = \frac{4\pi\varrho^2 R^5}{15\varepsilon_0}.$$

Vyjádřením hustoty pomocí celkového náboje dostaneme výsledný vztah.

$$E = \frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 R}. \tag{1}$$

b) Za energii dosadíme ze známého Einsteinova vztahu

$$E_e = m_e c^2 = 510\,\mathrm{keV} = 8{,}2\cdot 10^{-14}\,\mathrm{J},$$
$$E_p = m_p c^2 = 940\,\mathrm{MeV} = 1{,}5\cdot 10^{-10}\,\mathrm{J},$$

kde $1\,\mathrm{eV} = 1{,}602\cdot 10^{-19}$ J. Tato jednotka se často používá právě v částicové fyzice. Dosazením do rovnice (1) dostaneme výrazy pro vzdálenost

$$R_e = 1{,}68\cdot 10^{-15}\,\mathrm{m},$$
$$R_p = 9{,}2\cdot 10^{-19}\,\mathrm{m}.$$

c) Jsou dva závažnější důvody, proč celý postup zavrhnout. První je ten, že rovnice pro energii a potenciál, které jsme použili, nemusí platit pro tak malé vzdálenosti. Rovnice pro potenciál totiž vycházejí z Maxwellových rovnic (tyto se dají zjednodušit pro elektrostatický případ do potenciálového tvaru), které jsou ale klasickými zákony a vyžadují přesnou znalost polohy a energie (dá se přímo spočítat z hybnosti), což je ale v rozporu s kvantovou teorií – principem neurčitosti. Když vezmeme neurčitost v poloze pro elektron $\Delta x_e = 10^{-15}\,\mathrm{m}$, z toho pro hybnost $\Delta p_e = \hbar/\Delta x_e = 10^{-19}\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$, z toho energie $E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} \sim pc = 10^{-11}\,\mathrm{J}$, což je mnohem větší než energie E_e. Pro proton uvažujeme stejně.

Ve skutečnosti se dají Maxwellovo rovnice jaksi zobecnit tím, že jejich tvar nezměníme, ale změní se interpretace členů vystupujících v těchto rovnicích. Energie si však přibližně zachová výše uvedenou podobu. Ale tady taky narazíme na problém, protože na těchto vzdálenostech už máme dostatečnou energii na zrod nových elektronů a pozitronů. Toto všechno platí, ale jenom pro elektron, v případě protonů tu vystupují ještě jaderné síly (silné interakce). Závěrem možno dodat, že jsme aspoň stanovili meze platnosti klasické teorie elektromagnetického pole.

Druhým závažným problémem je to, že neznáme sílu, která by takovýto objekt udržela pohromadě.

Nakonec bychom chtěli upozornit, že vzorec $E = mc^2$ platí pro všechny druhy energie, nejen pro kinetickou. Což se projeví například tím, že hélium má menší hmotnost než proton s neutronem. A tento rozdíl odpovídá právě vazbové energii. Někteří z vás by možná namítli, že odkud je potom hmotnost neutronu, když nemá náboj, ale tady hmotnost tvoří silné interakce, které drží pohromadě kvarky.

Miro Kladiva
`fykos@mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.