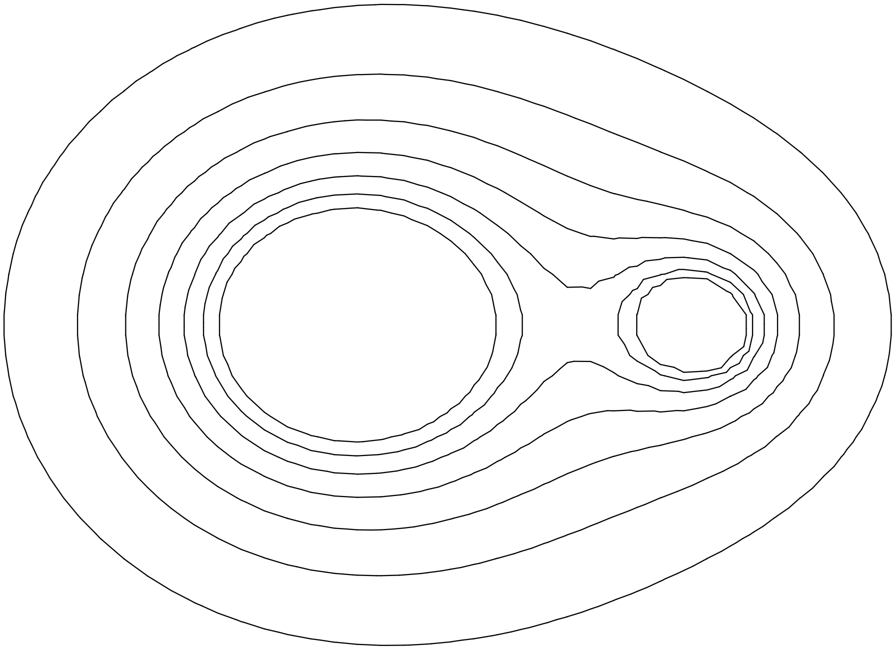
16. ročník, úloha IV . 4 ... *ekvipotenciály* *(4 body; průměr 2,13; řešilo 24 studentů)*

Zjistěte poměr velikostí nábojů dvou částic. Ekvipotenciály jejich elektrického pole vidíte na obr. 1. Zkuste také odhadnout přesnost vaší metody.



Obr. 1. Naměřený tvar ekvipotenciál elektrického pole dvou částic

Náboj vlevo označme Q_a, vpravo Q_b. Z obrázku je vidět, že oba náboje musí mít stejné znaménko, jinak by ekvipotenciály byly hustější mezi náboji a ty, které jsou nábojům nejblíže, by byly protaženy nahoru nikoliv do stran.

Potenciál bodového náboje Q ve vzdálenosti r od něj (volíme-li nulovou hladinu v nekonečnu) je $\varphi = kQ/r$, kde k je konstanta závislá pouze na volbě jednotek. Elektromagnetické pole je aditivní, tudíž potenciál od dvou nábojů je roven součtu potenciálů od každého z nich. V našem případě tedy

$$\varphi = k\left(\frac{Q_\mathrm{a}}{r_\mathrm{a}} + \frac{Q_\mathrm{b}}{r_\mathrm{b}}\right),$$

kde $r_\mathrm{a,b}$ je samozřejmě vzdálenost levého resp. pravého náboje od zvoleného bodu. Označíme-li poměr nábojů $q = Q_\mathrm{a}/Q_\mathrm{b}$, pak pro všechny body jedné ekvipotenciály platí

$$\mathrm{konst} = \frac{q}{r_\mathrm{a}} + \frac{1}{r_\mathrm{b}}. \tag{1}$$

Při proměřování obrázku se pro jednoduchost omezíme na body na horizontální ose, kterou s dostatečnou přesností získáme např. po přeložení obrázku napůl. Nulu zvolme kdekoliv na této ose. Označíme-li s_a, s_b polohy nábojů, r, r' polohy dvou bodů na jedné ekvipotenciále, např. té vnější, dostaneme ze vztahu (1) pro poměr nábojů q

$$q = \frac{\dfrac{1}{r' - s_\mathrm{b}} - \dfrac{1}{s_\mathrm{b} - r}}{\dfrac{1}{s_\mathrm{a} - r} - \dfrac{1}{r' - s_\mathrm{a}}}. \tag{2}$$

Zásadním problémem úlohy je, že neznáme polohu nábojů. Můžeme ji jen odhadnout jako přibližný střed nejmenších ekvipotenciál. Fyzik se ovšem s takovým odhadem nespokojí. Nejprve přemýšlí nad chytřejší metodou, ke které by středy nábojů nepotřeboval. Napadne ho změřit si rozměr další ekvipotenciály a sestavit tři rovnice pro tři neznámé s_a, s_b a q. Vždy se však dostane k rovnicím, které neumí vyřešit jinak než numericky. Numerické řešení je lepší než odhad, zde i v mnoha jiných případech je to asi nejšikovnější možnost.

My se v řešení ovšem pro ilustraci přikloníme k postupu, jehož schéma se donekonečna opakuje zejména v kvantové mechanice či v teorii pevných látek a jemuž se říká poruchový počet. Jeho výhodou od čistě numerického výpočtu je alespoň částečná další použitelnost.

Označme $s_\mathrm{a}^{(0)}$, $s_\mathrm{b}^{(0)}$ odhadnuté polohy částic a $q^{(0)}$ poměr nábojů z nich vypočtený podle vztahu (2). Dále hledejme první opravu k polohám nábojů $\Delta_\mathrm{a,b}^{(0)}$. Přesnější polohy nábojů označme

$$s_\mathrm{a,b}^{(1)} = s_\mathrm{a,b}^{(0)} + \Delta_\mathrm{a,b}^{(0)}. \tag{3}$$

Předpokládejme, že $\Delta_\mathrm{a,b}^{(0)}$ jsou velmi malé oproti $s_\mathrm{a,b}^{(0)}$. Pak můžeme přibližně psát

$$\frac{1}{s \pm \Delta} = \frac{1}{s} \mp \frac{\Delta}{s^2}. \tag{4}$$

Napíšeme nyní rovnici (1) pro dva body r_1, r_1' první vnější a dva body r_2, r_2' např. páté vnější ekvipotenciály. Zlomky přepíšeme pomocí přibližného vztahu (4), dejte přitom zvláštní pozor na znaménka

$$\begin{aligned}
&q^{(0)}\left(\frac{1}{s_\mathrm{a}^{(0)} - r_1} - \frac{\Delta_\mathrm{a}^{(0)}}{(s_\mathrm{a}^{(0)} - r_1)^2}\right) + \frac{1}{s_\mathrm{b}^{(0)} - r_1} - \frac{\Delta_\mathrm{b}^{(0)}}{(s_\mathrm{b}^{(0)} - r_1)^2} = \\
&= q^{(0)}\left(\frac{1}{r_1' - s_\mathrm{a}^{(0)}} + \frac{\Delta_\mathrm{a}^{(0)}}{(r_1' - s_\mathrm{a}^{(0)})^2}\right) + \frac{1}{r_1' - s_\mathrm{b}^{(0)}} + \frac{\Delta_\mathrm{b}^{(0)}}{(r_1' - s_\mathrm{b}^{(0)})^2}, \\
&q^{(0)}\left(\frac{1}{s_\mathrm{a}^{(0)} - r_2} - \frac{\Delta_\mathrm{a}^{(0)}}{(s_\mathrm{a}^{(0)} - r_2)^2}\right) + \frac{1}{s_\mathrm{b}^{(0)} - r_2} - \frac{\Delta_\mathrm{b}^{(0)}}{(s_\mathrm{b}^{(0)} - r_2)^2} = \\
&= q^{(0)}\left(\frac{1}{r_2' - s_\mathrm{a}^{(0)}} + \frac{\Delta_\mathrm{a}^{(0)}}{(r_2' - s_\mathrm{a}^{(0)})^2}\right) + \frac{1}{r_2' - s_\mathrm{b}^{(0)}} + \frac{\Delta_\mathrm{b}^{(0)}}{(r_2' - s_\mathrm{b}^{(0)})^2}.
\end{aligned} \tag{5}$$

To jsou dvě lineární rovnice pro dvě neznámé $\Delta_\mathrm{a}^{(0)}$ a $\Delta_\mathrm{b}^{(0)}$, které každý umí vyřešit. Podle vztahu (3) spočteme přesnější polohy nábojů, podle (2) pak přesnější poměr nábojů $q^{(1)}$ a tak dále, až se další výsledky nebudou příliš lišit, pak máme důvod se domnívat, že se blížíme přesnému řešení. Poznamenejme ještě, že o konvergenci této metody by šlo napsat mnoho stránek. Zvolíme-li však počáteční polohy nepříliš daleko od skutečných, konverguje uspokojivě.

Následují námi naměřené hodnoty v milimetrech:

$$r_1 = 0{,}0, \quad r_1' = 117{,}6;$$
$$r_2 = 23{,}9, \quad r_2' = 100{,}7;$$
$$s_\mathrm{a}^{(0)} = 45{,}0, \quad s_\mathrm{b}^{(0)} = 92{,}5.$$

Podle (2) dostaneme $q^{(0)} = 3{,}44$ pro r_1, r_1' a $q^{(0)} = 3{,}65$ pro r_2, r_2', v dalším použijeme průměr $q^{(0)} = 3{,}54$. Vyřešením rovnic (5) dostaneme pro opravy na polohu nábojů

$$\begin{array}{lll} \Delta_\mathrm{a}^{(0)} = 0{,}89, & \Delta_\mathrm{a}^{(1)} = -0{,}19, & \Delta_\mathrm{a}^{(2)} = +0{,}0055, \\ \Delta_\mathrm{b}^{(0)} = -0{,}74, & \Delta_\mathrm{b}^{(1)} = +0{,}18, & \Delta_\mathrm{b}^{(2)} = -0{,}0051, \\ q^{(1)} = 3{,}47, & q^{(2)} = 3{,}47, & q^{(3)} = 3{,}47. \end{array}$$

Vzhledem k tomu, že používaný metr měří s přesností asi 0,5 mm, obrázek je hrbatý atd., nechali jsme proběhnout výpočet pro několik nepatrně jiných hodnot r. Z výsledků je možno usoudit, že chyba námi získaného poměru nábojů je asi 4 %. Tedy výsledek

$$q = 3{,}47 \pm 0{,}13.$$

Graf v zadání byl generován pro hodnotu $q = 3{,}5$, tedy shoda je výborná. K nejpřesnějšímu výsledku se z řešitelů dostal Matouš Ringel $q = 3{,}49 \pm 0{,}15$, patří mu za to prémiový bod. Podotkněme, že chybu by bylo možno eliminovat změřením bodů na více ekvipotenciálách.

Lenka Zdeborová
`fykos@mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.