**16. ročník, úloha VI . S ... *vícerozměrné integrály*** *(5 bodů; průměr 3,73; řešilo 11 studentů)*

a) *Spočítejte průměrnou vzdálenost cestovatele náhodně se pohybujícího po severní polokouli od severního pólu k rovníku (předpokládejte, že cestovatel se pohybuje rovnoměrně po celém povrchu polokoule, za vzdálenost berte délku cesty po povrchu Země).*

b) *Uvažujte nekonečně vysokou rotačně symetrickou věž, jejíž poloměr ve výšce $h$ nad zemí je $r = a/(1+(h/a))$, kde $a = 1$ m. K dispozici máme barvu, jejíž krycí schopnost je 10 m$^2$ na litr. Rozhodněte, zda potřebujeme více barvy na natření nebo naplnění této věže barvou.*

c) *Trpaslíci se rozhodli, že pomohou Sněhurce při vaření. Sněhurka tedy rozkrájela jeden (dokonale kulatý) brambor na sedm stejně tlustých plátků a rozdala je trpaslíkům k oškrábání. Rozhodněte, který z trpaslíků bude mít nejvíce práce (trpaslíkem vynaložené úsilí je úměrné povrchu oškrábané šlupky).*

a) Průměrnou vzdálenost cestovatele od pólu (rovníku) spočteme takto: Pravděpodobnost nalezení cestovatele v oblasti o ploše $S$ je $\frac{S}{2\pi R^2}$, kde $R$ je poloměr Země. Jeho průměrná vzdálenost od pólu pak bude rovna součtu vzdáleností všech elementárních plošek d$S$ ležících na severní polokouli (míst, kde se může cestovatel nacházet) od pólu vážených pravděpodobností nalezení cestovatele na dané plošce. Tedy

$$\langle d_P \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} R\vartheta \frac{1}{2\pi R^2} R^2 \sin\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta \, \mathrm{d}\varphi = R \int_0^{\pi/2} \vartheta \sin\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta = R.$$

Analogicky nalezneme střední vzdálenost od rovníku jako

$$\langle d_R \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} R(\pi/2 - \vartheta) \frac{1}{2\pi R^2} R^2 \sin\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta \, \mathrm{d}\varphi = R\frac{\pi}{2} - d_P = R(\frac{\pi}{2} - 1).$$

b) Objem (povrch) věže spočítáme pomocí vzorce pro výpočet objemu (povrchu) rotačního tělesa. Dostáváme

$$V = \int_0^{\infty} \pi \left( \frac{a}{1 + h/a} \right)^2 \mathrm{d}h = \pi a^2 \left[ \frac{-a}{1 + h/a} \right]_0^{\infty} = \pi a^3$$

a pro povrch

$$S = \int_0^{\infty} 2\pi \frac{a}{1 + h/a} \sqrt{1 + \left( \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}h} \right)^2} \, \mathrm{d}h.$$

Výraz pod odmocninou v tomto integrálu má vždy hodnotu alespoň jedna a proto můžeme povrch zdola odhadnout tak, že jej nahradíme jedničkou (zmenšíme-li hodnotu integrované funkce, zmenší se i celý integrál), tedy

$$S > \int_0^{\infty} 2\pi \frac{a}{1 + h/a} \, \mathrm{d}h = \left[ 2\pi a^2 \ln(1 + h/a) \right]_0^{\infty} = \infty.$$

Povrch věže je tedy narozdíl od objemu nekonečný, a proto ji můžeme barvou naplnit, ale nikoliv natřít.

c) Spočítejme povrch slupky velmi tenkého „chipsu“ tloušťky d$x$ ukrojeného ze sférického bramboru, jehož střed leží ve vzdálenosti $d$ od středu bramboru. Obvod takového chipsu je

$2\pi\sqrt{R^2 - d^2}$, kde $R$ je poloměr bramboru. Jeho slupka však svírá s osou rotační symetrie chipsu úhel $\cos\varphi = \sqrt{1 - d^2/R^2}$. Povrch slupky chipsu je tedy

$$\mathrm{d}S = \frac{2\pi\sqrt{R^2 - d^2}}{\sqrt{1 - d^2/R^2}}\,\mathrm{d}x = 2\pi R\,\mathrm{d}x.$$

Vidíme, že výsledek je nezávislý na vzdálenosti chipsu od středu bramboru, tedy povrch libovolného plátku bramboru (ten si můžeme představit jako složený z chipsů) závisí pouze na jeho tloušťce, a nikoliv na místě, ze kterého byl ukrojen. Všichni trpaslíci tedy budou mít stejně práce.

***Pavel Augustinský***
`fykos@mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.