Zadání V. série

Termín odeslání: 24. května 2004

Úloha V.1 ... *maššinka*

Máme rotující desku, která se otáčí úhlovou rychlostí ω kolem své osy a na niž nepůsobí žádné vnější momenty sil. Směrem do jejího středu jede lokomotiva o hmotnosti m po kolejích připevněných k desce. Deska mění svou rychlost otáčení. Určete původ, velikost a směr momentu síly, který tuto změnu způsobí.

Úloha V.2 ... *loď duchů*

Loď duchů pluje proti proudu, jehož rychlost je u. Duchové jsou líní a slabí na přihazování uhlí do kotlů. Poraďte jim, jaká má být rychlost lodi v vůči vodě, aby loď měla minimální spotřebu uhlí. Předpokládejte, že spotřeba paliva je úměrná vykonané práci na danou dráhu. Jak se výsledek změní, pokud místo lodního šroubu bude loď poháněna řetězem uloženým na dně řeky?

Úloha V.3 ... *slezští havíři reloaded*

Havíři z úlohy z minulé série nažhavili opět své krumpáče a prokopali se skrz Zemi, tentokrát ne na Nový Zéland, ale do Tichého oceánu. Do vytvořeného tunelu začne téct voda. Rozhodněte, zda v Petřvaldě v dolu Fučík vystříkne voda do vzduchu. Svou odpověď dostatečně zdůvodněte.

Úloha V.4 ... *levitace na světle*

Skleněná polokoule o poloměru $R = 10\,\mathrm{cm}$ a indexu lomu n je umístěna v gravitačním poli Země rovnou plochu dolů. Úzkým laserovým paprskem svítíme ze spodu ve směru osy polokoule. Jaký musí být výkon laseru, aby polokoule levitovala. Šířka laserového paprsku je $d = 0{,}5\,\mathrm{mm}$ a jeho vlnová délka je $\lambda = 660\,\mathrm{nm}$.

Úloha V.P ... *zrychlující Měsíc*

Přesnými měřeními je dokázáno, že rychlost rotace Měsíce kolem Země se zvětšuje. Zamyslete se nad tím, jaká síla to způsobuje.

Úloha V.E ... *bobřík míření*

Jaro začíná a je pravý čas začít sportovat. Mezi mnohé sportovní aktivity patří mimo jiné tenis. A my vám vycházíme vstříc! Vaším úkolem je zjistit, jakou rychlost musí mít tenisový míček, aby rozbil okno. Nezapomeňte provést dostatek měření, abyste mohli vaše zjištěná data statisticky zpracovat.

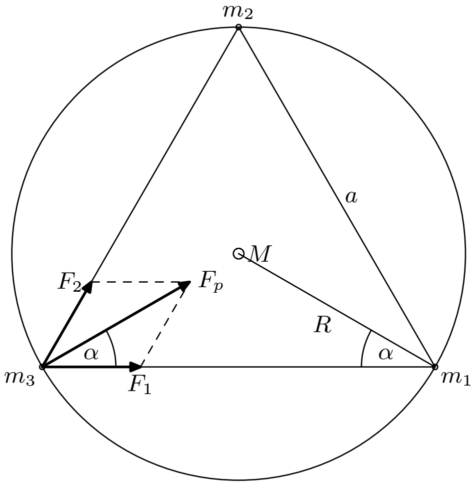
Řešení III. série

Úloha III . 1 ... na oběžné dráze *(3 body; průměr 2,40; řešilo 52 studentů)*

Tři stejné družice obíhají po kružnici kolem malé planetky rychlostí v tak, že jsou neustále ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka. Určete jejich hmotnost, která není zanedbatelná vůči hmotnosti planetky. *Úlohu navrhl Honza Prachař.*

Na planetku gravitačně působí tři objekty. Planeta ve středu a dvě planetky ve vrcholech rovnostranného trojúhelníku. Výsledná síla působící na planetku m_3 od planetek m_1 a m_2 je

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = \varkappa \frac{m_1 m_3}{a^2} \cdot \frac{\boldsymbol{r}_{1,3}}{|\boldsymbol{r}_{1,3}|} + \varkappa \frac{m_2 m_3}{a^2} \cdot \frac{\boldsymbol{r}_{2,3}}{|\boldsymbol{r}_{2,3}|}.$$



Obr. 1

Jelikož $m_1 = m_2 = m_3 = m$, pak předchozí rovnici můžeme přepsat na tvar

$$\boldsymbol{F}_p = 2\varkappa \frac{m^2}{a^2} \cos\alpha.$$

Centrální planeta působí na planetku m_3 silou

$$F_\mathrm{M} = \varkappa \frac{mM}{R^2}.$$

Výsledná síla působící na naši planetku je

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_\mathrm{M} + \boldsymbol{F}_\mathrm{p} = \varkappa \frac{mM}{R^2} + 2\varkappa \frac{m^2}{a^2} \cos\alpha \qquad (1)$$

protože směry F_p a F_M jsou obě totožné a směřují k centrální planetě.

Vyjádříme vzdálenost a pomocí R.

$$a = 2R\cos\alpha = 2R\cos 30\,\mathrm{deg} = R\sqrt{3}.$$

Pak rovnice (1), vyjadřující celkovou gravitační sílu působící na m_3, nabývá tvaru

$$F = \varkappa \frac{mM}{R^2} + 2\varkappa \frac{m^2}{3R^2} \frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$= \varkappa \frac{mM}{R^2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{m}{M}\right).$$

Tato síla musí být vyvážena odstředivou silou, proto

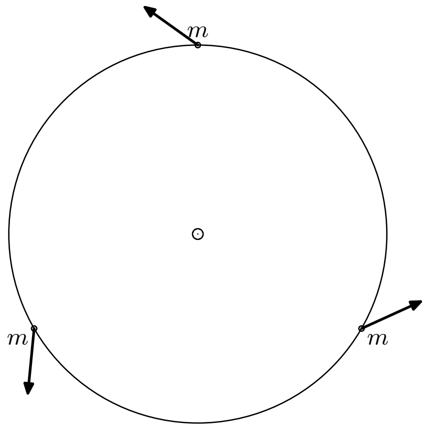
$$\frac{mv^2}{R} = \varkappa \frac{mM}{R^2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{m}{M}\right)$$
$$m = \sqrt{3} \frac{v^2 R - \varkappa M}{\varkappa}.$$

Závěrem:

a) Nebudeme zkoumat, jak se čtyři tělesa dostaly do této rovnovážne polohy. Domnívám se, že to jde velice těžko a jenom za pomoci dalších těles.

b) Jestliže planetky obíhají kolem centrální planety ve vrcholu rovnostranného trojúhelníka, pak nutně nemusí obíhat po kružnici. Stačí, když v některém okamžiku budou vektory rychlosti a hybnosti stejné (v jedné rovině) a planetky se budou nacházet ve vrcholu rovnostranného trojúhelníka (přičemž v soustavě nesmí být žádné další těleso). Křivka, po které budou obíhat kolem centrálního tělesa, nebude elipsa, rozmyslete si proč.

Dokonce není nutné aby planetky obíhaly v jedné rovině. Přikladem buď velice hmotné centrální těleso a nehmotné planetky, jejichž dráhy se protínají v jednom bodě, jsou v tomto bodě ve stejný okamžik a jejich dráhy jsou vůči sobé pootočeny o 60 deg.



Obr. 2

c) Není možné použít Keplerovy zákony. Ty byly odvozeny jenom pro dvě tělesa, ne pro tři nebo více.

Pavol Habuda
bzuco@fykos.mff.cuni.cz

Úloha III . 2 ... *cvrnkání kuliček* *(4 body; průměr 1,52; řešilo 31 studentů)*

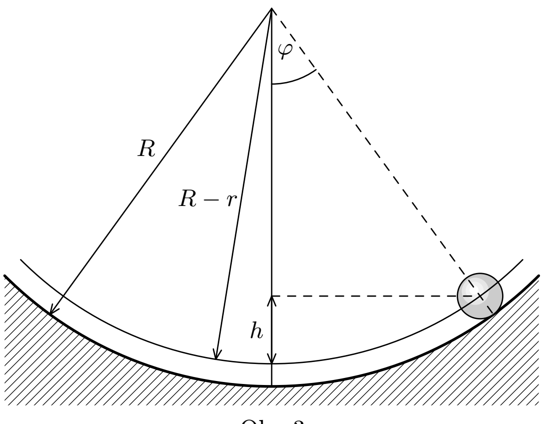
Organizátoři FYKOSu hráli kuličky. Po chvíli si všimli, že když se trefí do prázdné kulové jamky, kulička na dně kmitá kolem rovnovážné polohy. Určete frekvenci těchto malých kmitů. Jamka má poloměr R, poloměr kuličky je r a její hmotnost je m. Smykové tření mezi kuličkou a povrchem jamky je dostatečně veliké, aby při kutálení nedocházelo k prokluzování. Nápověda: je-li φ malé, můžete použít rovnost $\sin\varphi = \operatorname{tg}\varphi = \varphi$ a použít analogii s pohybem závažíčka na pružince. *Zadal Honza Prachař inspirován na cvičeních z Fyziky I.*

Pro kuličku platí zákon zachování energie. K potenciální energii a kinetické energii hmotného středu přibude také rotační energii kuličky.

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} + mgh = \text{konst.}, \qquad (2)$$

kde h je výška těžiště nad nejnižší polohou, ω je úhlová rychlost otáčení kuličky a J je moment setrvačnosti kuličky vůči ose procházející těžištěm. Výšku h můžeme vyjádřit pomocí úhlu φ

$$h = (1 - \cos\varphi)(R - r),$$



Obr. 3

kde pro malé úhly φ můžeme za $\cos\varphi$ dosadit výraz $1 - frac\varphi^2 2$ (φ bereme v radiánech).

$$h = (R - r)\frac{\varphi^2}{2}.$$

Oblouk kružnice můžeme nahradit souřadnicí kuličky x, proto z definice úhlu plyne $\varphi = \frac{x}{R-r}$. Dosadíme-li do (2) také za moment setrvačnosti kuličky $J = \frac{2}{5}mv^2$ a za její úhlovou rychlost $\frac{v}{r}$, dostáváme

$$\frac{7}{10}mv^2 + m\frac{gx^2}{2(R-r)} = \text{konst.}$$

Pokud obě strany rovnice zderivujeme, dostáváme

$$\frac{7}{5}m\dot{x}\ddot{x} + \frac{mgx\dot{x}}{R-r} = 0.$$

Zkrátíme-li vyraz u $\ddot{x}$, obdržíme rovnici

$$\ddot{x} + \frac{5g}{7(R-r)}x = 0. \tag{3}$$

Nyní dojde na analogii se závažíčkem na proužince, kterou jsme zmínili v zadání. Napišme si tedy pohybovou rovnici závažíčka

$$ma = -kx \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Tato rovnice je formálně stejná s naší rovnicí (3) pro kuličku v jamce. Rovnicím, které mají tento tvar, říkáme rovnice harmonických kmitů. Konstanta před x je druhá mocnina úhlové frekvence soustavy. V našem případě je

$$\Omega = \sqrt{\frac{5g}{7(R-r)}}.$$

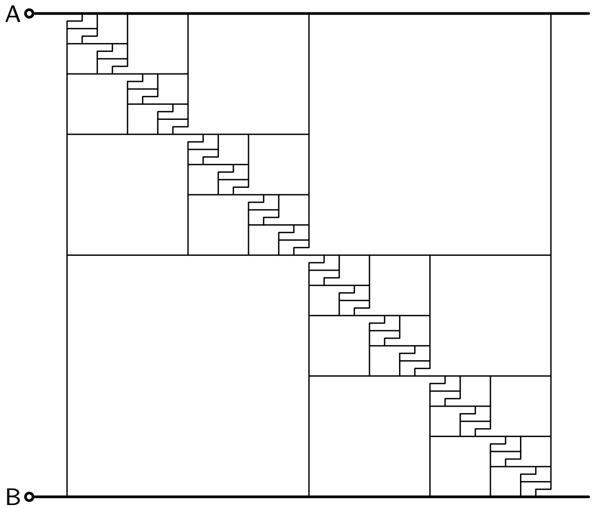
úhlová frekvence kmitání kuličky. Frekvenci f těchto kmitů už vyjádříme ze známého vztahu

$$f = \frac{\Omega}{2\pi} = 2\pi\sqrt{\frac{5g}{7(R-r)}}.$$

Jirka Lipovský
jirka@fykos.mff.cuni.cz

Úloha III . 3 ... odporová síť *(3 body; průměr 2,48; řešilo 27 studentů)*

Jaký je odpor mezi body A *a* B *odporové sítě na obrázku 4? Svislé úsečky mají odpor R a vodorovné odpor nemají. Síť je nekonečná, na obrázku je z technických důvodů jen konečná iterace.*



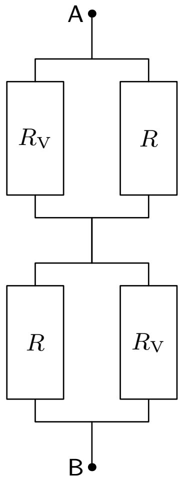
Obr. 4. Nekonečná odporová síť

Vynalezl Pavel Augustinský pro Bělčickou olympiádu.

Protože je odporová síť nekonečná, víme, že část celé odporové sítě má tentýž elektrický odpor jako celá síť. Zjednodušeně můžeme celou situaci překreslit do obrázku 5. Výsledný odpor R_V mezi body A a B je dle obrázku roven

$$R_V = 2\frac{RR_V}{R + R_V}.$$

Odsud dostáváme kvadratickou rovnici s kořeny 0 a R. Dokažme, že hledaný odpor není roven 0. Při provádění jednotlivých iterací odpor nikdy neklesne pod R. Odpor první iterace je zřejmě roven $2R$ a odpor dalších iterací klesá monotónně k R. V jednotlivých krocích vždy sériově spojujeme 2 stejná zapojení. Toto zapojení zkonstruujeme jako paralelní zapojení předchozí iterace a odporu R. Paralelní zapojení dvou rezistorů o odporech R a odporu větší než R je ekvivalentní odporu, který má odpor vetší než $R/2$. A sériové spojení dvou takovýchto zapojení je větší než R. Jelikož je první iterace vetší než R, a pak i každá další větší, nebo rovna R, nemůže odpor žádné iterace klesnout pod R. Výsledný odpor celé odporové sítě je roven R.



Obr. 5

Byla i jiná možnost jak řešit tuto úlohu. Představte si tenký plechový čtverec o odporu R. Pokud z téhož materiálu vyrobíme čtverec o jiné délce strany, bude jeho odpor opět R, neboť jeho průřez se zmenší sice dvakrát, ale jeho délka také. Nyní vyšetřujme odpor plechového čtverce mezi jeho protilehlými stranami (ten je dle předpokladu R). Pokud čtverec jakkoli rozřežeme, nezmění se jeho odpor. Samozřejmě nesmíme rozřezané kusy od sebe oddělit a stejně tak předpokládáme, že se vše chová naprosto ideálně a nikde nevznikají přechodové odpory. Rozdělíme ho na čtverce, tedy každá část, ze které pak budeme moci čtverec zpět poskládat, má odpor R. Takto rozřezaný čtverec můžeme reprezentovat elektrickou sítí složenou z odporů velikosti R, přičemž využijeme, že místa se stejným potenciálem nemusí být spojena vodičem (proud by mezi nimi stejně netekl). Pokud budeme správným způsobem nekonečněkrát dělit čtverec, můžeme získat stejnou odporovou síť jako byla v zadání. Při jednotlivém čtvrcení budeme postupovat tak, že vždy po rozříznutí čtverce na čtvrtiny se nebudeme více starat o levou dolní část a horní pravou část. Nadále budeme do nekonečna pokračovat v krájení zbylých „zajímavých“ částí stejným způsobem. Tento postup zcela odpovídá zapojení v zadání. Na obrázku můžete vidět 2. krok tohoto postupu a jemu odpovídající zapojení. Bílé čtverce se budou ještě dále dělit, ale šedé už zůstanou tak, jak jsou. Všechny rezistory na obrázku mají odpor R. Protože má celý čtverec odpor R (stejně tak všechny „malé“ čtverce), má i zadaná síť odpor R.

Nakonec ještě taková malá poznámka. Uvědomme si, že nezáleží na tom, jak veliký odpor leží na úhlopříčce odporové sítě. Pokud totiž zpodrobňujeme schéma zapojení směrem dovnitř – jakoby se přibližujeme k síti a zkoumáme, co se nachází na úhlopříčce – zjištujeme, že namísto rezistoru o nekonečném odporu nalézáme znovu tutéž odporovou síť, jako jsme viděli předtím.

Karel Tůma
kajinek@fykos.mff.cuni.cz

Úloha III . 4 . . . kapitán Kork zasahuje *(5 bodů; průměr 2,00; řešilo 21 studentů)*

Vesmírná loď Escapeprise se vrací z prostoročasové bitvy s Odborgy. Během letu ale zjišťují, že nešťastnou náhodou směřují přímo do černé díry FAK-U0. Rozhodnou se pro úhybný manévr a kolmo na směr své rychlosti vypustí v jednom okamžiku všechno palivo. Vypočtěte vzdálenost, ve které Escapeprise kolem černé díry proletí. Jakou největší hmotnost může černá díra mít, nemá-li do ní Escapeprise spadnout? Jako bonus se zamyslete nad tím, zda kapitán Kork mohl úhybný manévr vymyslet chytřeji? Hmotnost samotné lodě je M, paliva m. Rychlost lodě ve velké vzdálenosti od černé díry je V a směřuje do středu černé díry. Rychlost vypuštěného paliva je v a úhybný manévr proběhl též velmi daleko od černé díry.

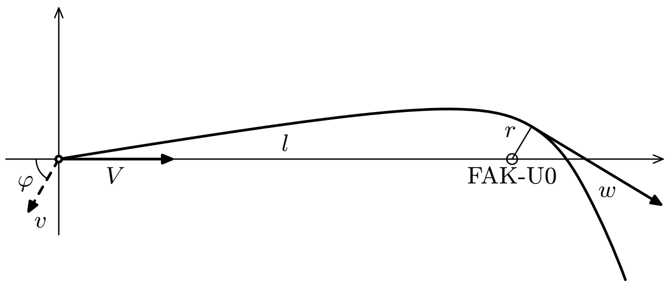
Vymyslel Jarda Trnka při sledování svého oblíbeného seriálu.

Označme počáteční vzdálenost od černé díry l, nejmenší vzdálenost r, hmotnost černé díry D a rychlost lodi v nejbližším místě od středu černé díry w.

Prvním úkolem je určení výsledné rychlosti rakety po provedení úhybného manévru. Nechť spojnice rakety a středu černé díry je osa x, osa na ní kolmá bude osa y a poloha počátku bude totožná s polohou rakety těsně po úhybném manévru. Předpokládejme teď, že kapitán Kork palivo vypustí pod nějakým úhlem φ vůči ose x. Ze zákona zachování momentu hybnosti dostaneme

$$v_x = V + \frac{m}{M} v \cos\varphi \quad (4),$$

$$v_y = \frac{m}{M} v \sin\varphi \quad (5).$$



Obr. 6

Dále vyjdeme ze dvou zákonů zachování, a to zákona zachování energie a momentu hybnosti. Protože v nejbližším bodě od černé díry je vektor rychlosti kolmý na spojnici lodi a středu černé díry, platí pro zákon zachování hybnosti

$$L = Mlv_{\mathrm{y}} = Mrw. \tag{6}$$

Ze zákona zachování energie dostaneme

$$\frac{1}{2}M(v_{\mathrm{x}}^2 + v_{\mathrm{y}}^2) - \frac{GMD}{l} = \frac{1}{2}Mw^2 - \frac{GMD}{r}. \tag{7}$$

Vyjádříme z (6) rychlost w a dosadíme do (7), přitom uvážíme, že pro $l \gg r$ můžeme potenciální energii v počáteční poloze zanedbat.

$$\frac{1}{2}M(v_{\mathrm{x}}^2 + v_{\mathrm{y}}^2) = \frac{Ml^2v_{\mathrm{y}}^2}{2r^2} - \frac{GMD}{r}.$$

Dosadíme-li (4) a (5) do (7) a uvážíme-li, že ze zadání je $\varphi = 90°$, vyjde

$$V^2 + \frac{m^2v^2}{M^2} = \frac{l^2m^2v^2}{r^2M^2} - \frac{2GD}{r}. \tag{8}$$

Z toho úpravou dostaneme kvadratickou rovnici pro r.

$$r^2\left(V^2 + \frac{m^2v^2}{M^2}\right) + 2GDr - \frac{l^2m^2v^2}{M^2r^2} = 0. \tag{9}$$

Rovnice (9) má dvě řešení, fyzikální smysl má jen jedno, které se dá upravit na tvar

$$r = \frac{\sqrt{G^2D^2M^4 + (V^2M^2 + m^2v^2)l^2m^2v^2} - GDM^2}{M^2V^2 + m^2v^2}.$$

Tím jsme odpověděli na první otázku.

Dále je potřeba zjistit kritickou hmotnost černé díry. V této situaci bude nejbližší vzdálenost lodě od středu černé díry rovna kritickému, tzv. Schwarzschildovu, poloměru, pro který platí

$$r_{\mathrm{g}} = \frac{2GD}{c^2} \tag{10}$$

Tento vztah se dá odvodit, když si uvědomíme, že úniková rychlost z této vzdálenosti je rovna rychlosti světla. V rovnici (8) dosadíme $r = r_{\mathrm{g}}$ a vyjádříme hmotnost D.

$$D = \frac{r_{\mathrm{g}}}{2G}\left(\frac{m^2v^2}{M^2}\left(\frac{l^2}{r_{\mathrm{g}}^2} - 1\right) - V^2\right).$$

Po dosazení z (10) za r_{g} vyjde po úpravách

$$D = \frac{mvlc^2}{2GM\sqrt{V^2 + c^2 + \frac{m^2v^2}{M^2}}}.$$

To je tedy odpověď na druhou otázku. Zbývá vyřešit bonus.

Jde vlastně o analogický výpočet, jen nedosazujeme za φ. Vyjádříme velikost D stejným způsobem, jen nebudeme za v_{x} a v_{y} prozatím dosazovat, vyjde

$$D = \frac{r_{\mathrm{g}}}{2G}\left(\frac{l^2 v_{\mathrm{y}}^2}{r_{\mathrm{g}}^2} - v_{\mathrm{y}}^2 - v_{\mathrm{x}}^2\right).$$

Dosadíme teď do tohoto vztahu za v_{x} a v_{y} z (4) a (5) a také za r_{g}. Stejným způsobem vyjádříme velikost D. Po všech dosazení a úpravách vyjde

$$D = \frac{mlvc^2 \sin\varphi}{2GM\sqrt{V^2 + c^2 + \left(\frac{m}{M}\right)^2 v^2 + \frac{2mvV\cos\varphi}{M}}}.$$

Tento vztah udává závislost $D = D(\varphi)$. Budeme hledat extrém této funkce, tedy úhel, pro který je derivace $\mathrm{d}/\,\mathrm{d}\varphi$ nulová. Pokud tedy tento vztah zderivujeme a derivaci položíme rovnu nule, dostaneme řešení ve tvaru

$$\varphi = \arccos\left(\sqrt{\left(\frac{Mc^2 + mv^2 + MV^2}{2mvV}\right)^2 - 4} - \frac{Mc^2 + mv^2 + MV^2}{2mvV}\right).$$

Příslušné výpočty si můžete vyzkoušet za cvičení.

Pár slov k došlým řešením. Málo z vás si uvědomilo, že k výpočtu je nutné použít zákon zachování momentu hybnosti či 2. Keplerův zákon. Jen se ZZE se úloha vyřešit nedala, jak si mnozí z vás mysleli. Další chybou byla chybná úvaha, že se dá vliv černé díry během letu zanedbat. To by tam ta černá díra vůbec nemusela být a řešili bychom pohyb volné částice.

Jarda Trnka
jarda@fykos.mff.cuni.cz

Úloha III . P ... *jede, jede autíčko* *(5 bodů; průměr 1,13; řešilo 30 studentů)*

Představte si autíčko, jehož motor má konstantní tažnou sílu F, pohybující se rychlostí v. Jeho výkon tedy je $P = Fv$. Avšak cyklista jedoucí konstantní rychlostí u pozoruje výkon $P = F(v - u)$. Spotřeba benzínu, která odpovídá výkonu, je však stejná z pohledu cyklisty i stojícího chodce. Vysvětlete tento „paradox“. Odpor vzduchu neuvažujte.

Na klasický paradox v mechanice si vzpomněl Honza Prachař.

Většina řešitelů k této úloze přistoupila tak, že nějakým způsobem napsala, že zákon zachování energie platí, tudíž i z pohledu cyklisty musí mít autíčko výkon Fv. Avšak jen málo vysvětlilo paradox, který spočívá v tom, proč cyklista pozoruje výkon jen $F(v - u)$, kam se ztratí onen zbytek.

Správné vysvětlení je takové, že ve vztažné soustavě cyklisty autíčko působí na vozovku reakční silou $-F$, vozovka se pohybuje vůči cyklistovi rychlostí u. Tedy zbývající výkon Fu autíčko spotřebuje na rozpohybování vozovky.

Na úlohu se můžeme podívat i z energetického hlediska. Z pohledu pozorovatele stojícího pevně v prostoru se za krátký čas $\mathrm{d}t$ zvětší kinetická energie auta o $[v(\mathrm{d}t)^2 - v(0)^2]m/2$ a kinetická energie Země o $[V(\mathrm{d}t)^2 - V(0)^2]M/2$, kde velká písmenka se vztahují k parametrům Země, malá k parametrům autíčka. Písmenko d před veličinou znamená, že se jedna o malou změnu. Předpokládáme-li, že na začátku stojí pozorovatel v klidu vůči Zemi, tedy $V(0) = 0$, a použijeme-li zákon zachování hybnosti, je změna energie Země $m(\mathrm{d}v)^2/2M$, což je malinké zanedbatelné číslo.

Z pohledu cyklisty je změna energie autíčka $[(v(\mathrm{d}t)-u)^2-(v(0)-u)^2]m/2$ a změna energie Země $[(V(\mathrm{d}t)+u)^2-u^2]M/2$. Opět použijeme zákon zachování hybnosti, ale tentokrát změna energie Země $mu\,\mathrm{d}v$ není zanedbatelná, nebo Země se vůči cyklistovi na začátku pohybuje rychlostí u. Přičteme-li změnu energie Země ke změně energie autíčka, vyjde nám přesně totéž, co pozoruje chodec.

Lenka Zdeborová
lenka@fykos.mff.cuni.cz

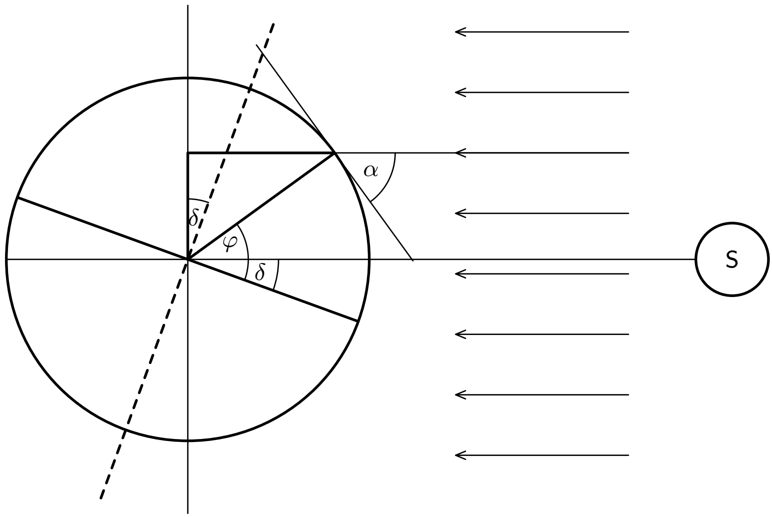
Úloha III . E ... *Země je kulatá* *(8 bodů; průměr 4,71; řešilo 31 studentů)*

Určete, na které rovnoběžce se nachází vaše bydliště. Navrhněte co nejvíce metod a alespoň dvě realizujte.

K určení zeměpisné šířky (rovnoběžky) lze dobře využít faktu, že se Země točí kolem své osy. Tento jev se projevuje na chování mechanických soustav, protože se nacházíme v neinerciální soustavě, a také v tom, co pozorujeme na obloze. Dalším projevem rotace Země je její magnetické pole, jehož intenzitu můžeme měřit. K určení zeměpisné šířky lze případně využít sklonu osy rotace vůči ekliptice (rovina v níž obíhá Země kolem Slunce) a kulatosti Země. To způsobuje různé vzdálenosti od Slunce během roku a projevem je například různá teplota na povrchu Země.

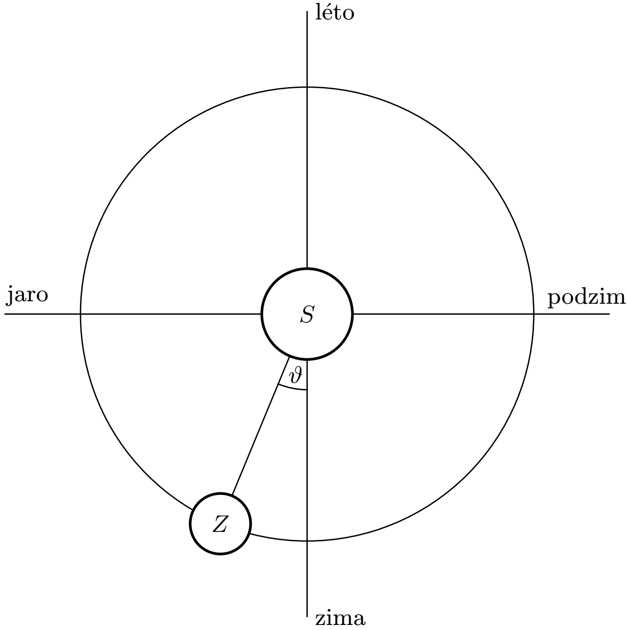
Teorie

Zmíníme zde podrobněji několik metod, které budeme realizovat. Ve všech budeme předpokládat, že Země je dokonalá koule, a zeměpisnou šířkou φ bodu X na povrchu Země označíme úhel, který svírá spojnice střed Země – bod X s rovníkovou rovinou.



Obr. 7

Začneme nejjednodušší metodou, kterou jste využili téměř všichni řešitelé. Pokud budeme za jasné noci pozorovat oblohu, zjistíme, že se celá otáčí kolem jednoho bodu (příčinnou je již zmíněná rotace Země). Tento nehybný bod se nachází velice blízko Polárky. Uvědomíme-li si, že vzdálenost Polárky od Země je ohromná vzhledem k velikosti Země, je zřejmé, že výška Polárky nad obzorem je rovna zeměpisné šířce, neboť osa zemské rotace míří k ní. Nesmíme ovšem ve výsledku zapomenout na chybu, zbůsobenou nenulovou vzdáleností Polárky od nehybného bodu noční oblohy (tato vzdálenost se během roku mění, vinnou precese zemské osy, nepřesahuje 1°).



Obr. 8

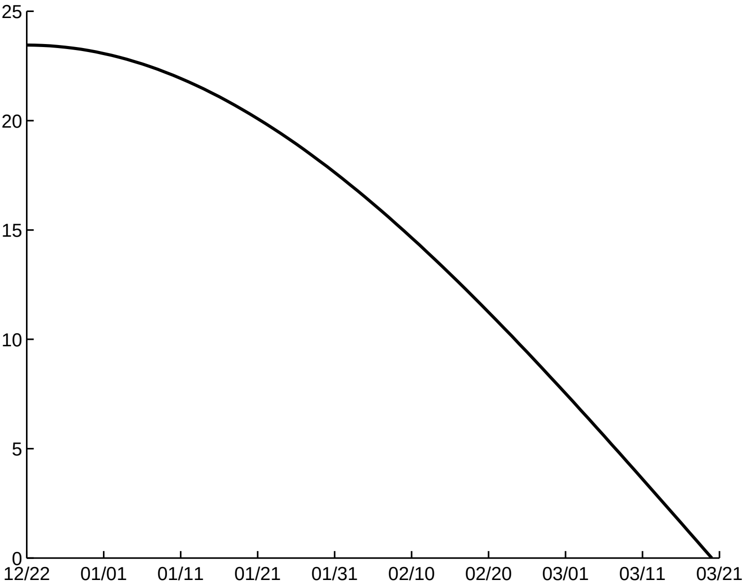
Další možností, jak určit zeměpisnou šířku, je využít pohybu Slunce po obloze. Budeme měřit úhel Slunce nad obzorem α v pravé sluneční poledne. Udělejme řez Zemí, aby v něm ležela zemská osa a spojnice Země–Slunce, jak znázorňuje obr. 7. Pro zeměpisnou šířku potom dostáváme

$$\varphi = 90^\circ + \delta - \alpha, \tag{11}$$

kde δ značí deklinaci – úhlová vzdálenost Slunce od světového rovníku (v létě je kladná, v zimě záporná, v den rovnodennosti nulová). Zbývá určit deklinaci. Polohu Země na oběžné dráze kolem Země budeme parametrizovat úhlem ϑ (viz obr. 8), dklon zemské osy vůči ekliptice označíme $\delta_0 = 23^\circ\, 25'$. Po technickém výpočtu, který nebudu uvádět, dostaneme

$$\cos\delta = \sqrt{1 - \sin^2\delta_0 \cos^2\vartheta}. \tag{12}$$

Předpokládejme, že rychlost oběhu Země kolem Slunce je konstantní, potom bude výpočet úhlu ϑ z datumu snadný, stačí si uvědomit, že mezi zimou (22. 12. 2003 8:01) a jarem (20. 3. 2004 7:48) opíše průvodič Země na oběžné dráze pravý úhel. Závislost deklinace na datumu je znázorněna v grafu na obr. 9. Ve skutečnosti není rychlost oběhu konstantní, porovnáním skutečných hodnot deklinace z hvězdářské ročenky s hodnotami vypočtenými podle (12) ale zjistíme, že rozdíl činí maximalně 0,15 °, což s ohledem na přesnost našeho měření bude bohatě stačit.



Obr. 9

Třetí metodu, kterou uvedeme, je meření velikosti tíhového zrychlení. V domácích podmínkách je jednoznačně nejpřesnější měření z doby kmitu matematického kyvadla. Pro velice přesná měření hodnoty tíhového zrychlení se používá gravimetr, který využívá volného pádu. Sestup volně padajícího tělesa ve vakuované nádobě je velmi přesně sledován pomocí laserového interferometru. Interferenční proužky jsou navázány na absolutní standardy délky. Velmi přesné měření času je prováděno pomocí atomových rubidiových hodin. Takto je možné změřit tíhové zrychlení až na sedm platných cifer. O takovéto přesnosti si budeme moci jen zdát.

Neomezíme se pouze na model matematického kyvadla, které má dobu kmitu $T = 2\pi\sqrt{l/g}$. Tím bychom se dopustili chyby v řádu desetin procenta, což si nemůžeme dovolit. Pro periodu malých kmitů fyzického kyvadla platí

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}},$$

kde l je vzdálnost osy otáčení od težiště, I je moment setrvačnosti kyvadla vzhledem k ose otáčení a m hmotnost kyvadla. Tíhové zrychlení potom určíme ze vztahu

$$g = \frac{4\pi^2 I}{T_{\mathrm{m}}^2 ml}. \tag{13}$$

Kyvadlo jsme realizovali kovovou kuličkou na provázku, jehož moment setrvačnosti je

$$I = \frac{2}{5}Mr^2 + Ml^2 + \frac{1}{3}m(l-r)^2,$$

kde M jsme označili hmotnost kuličky a m hmotnost porvázku. Dosazením do vztahu (13) obdržíme

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T_\mathrm{m}^2} \frac{M}{m+M} \cdot \left(1 + \frac{2}{5}\left(\frac{r}{l}\right)^2 + \frac{1}{3}\frac{m(l-r)^2}{Ml^2}\right). \tag{14}$$

Nyní potřeba přiřadit naměřenému tíhovému zrychlení zeměpisnou šířku. Tíhové zrychlení je vektorový součet odstředivého a_o a gravitačního a_g zrychlení. Pokud budeme předpokládat

$$a_\mathrm{o} = \omega^2 R \cos\varphi, \qquad a_\mathrm{g} = \varkappa \frac{M}{R^2},$$

kde ω je úhlová rychlost rotace Země, R je poloměr Země a M je hmotnost Země, dostaneme

$$g = \sqrt{\varkappa^2 \frac{M^2}{R^4} + \omega^2 \left(\omega^2 R^2 - 2\varkappa \frac{M}{R^2}\right) \cos^2\varphi}. \tag{15}$$

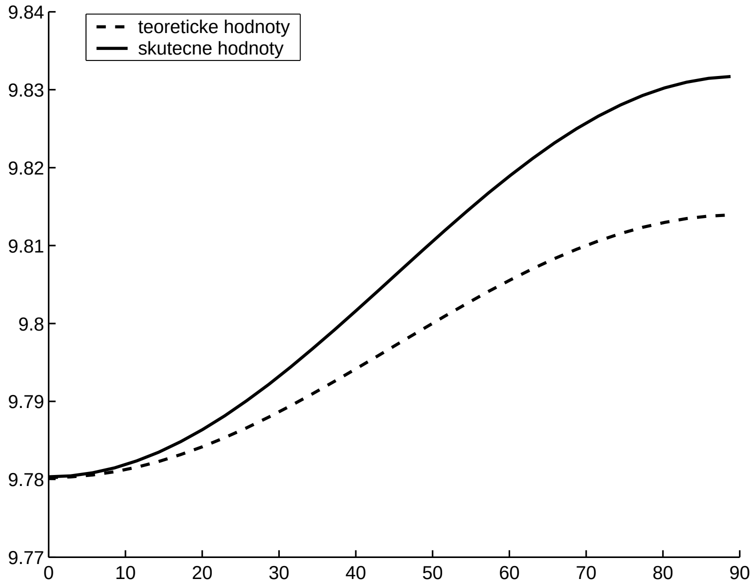
Experimenty ukazují, že je tento vztah dost nepřesný. Chybu zanáší předpoklad kulatosti Země, o které víme, že je na pólech zploštělá. Vyřešíme to tím, že budeme používat empirický vztah pro závislost tíhového zrychlení na zeměpisné šířce[1]

$$g = 9{,}7803185 \cdot (1 + 0{,}005278895 \cdot \sin^2\varphi - 0{,}000023462 \cdot \sin^4\varphi), \tag{16}$$

který se pro naše potřeby velice dobře shoduje se skutečností. Porovnání vztahů (15) a (16) najdete v grafu na obrázku 10. Závislosti se výrazně rozcházejí pro velké zeměpisné šířky.

Vztah (16) samozřejmě nevystihuje vliv slapových sil od Slunce a Měsíce, nadmořské výšky, podloží, okolního terénu. My je bez obav zanedbáme, například změna nadmořské výšky o 1 m zmenší tíhové zrychlení o $3 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

1) Na `http://gretchen.geo.rpi.edu/roecker/AppGeo96/lectures/gravity/gravoutline.html` najdete veškeré podrobnosti týkající se tíhového zrychlení.



Obr. 10

Poslední metoda, kterou zde podrobněji rozebereme, využívá gyroskopu. Gyroskop je těžký setrvačník upevněný ve svém těžišti (tíhová síla tedy nemá na jeho pohyb vliv). Pro gyroskop vázaný na vodorovnou rovinu platí pohybová rovnice

$$\ddot{\vartheta} + \frac{I_z \Omega w \cos\varphi}{I_x}\vartheta = 0,$$

kde ϑ je výchylka z rovnovážné polohy (severojižní směr), Ω je úhlová rychlost rotace Země, w je úhlová rychlost rotace setrvačníku, I_z je moment setrvačnosti gyroskopu vzhledem k ose symetrie a I_x je moment setrvačnosti vzhledem k ose na ni kolmé. Setrvačník tedy bude kmitat kolem severojižního směru s úhlovou rychlostí

$$\omega_\mathrm{v} = \sqrt{\frac{I_z \Omega w \cos\varphi}{I_x}}.$$

Podobně pro gyroskop vázaný na svislou rovinu, jehož normála má severojižní směr, platí pohybová rovnice

$$\ddot{\vartheta} + \frac{I_z \Omega w \sin\varphi}{I_x}\vartheta = 0,$$

Setrvačník tedy bude kmitat kolem svislého směru s úhlovou rychlostí

$$\omega_\mathrm{s} = \sqrt{\frac{I_z \Omega w \sin\varphi}{I_x}}.$$

Pro zeměpisnou šířku tedy dostáváme vztah

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \left(\frac{\omega_\mathrm{s}}{\omega_\mathrm{v}}\right)^2. \tag{17}$$

Při realizaci však můžeme narazit na problém, jak upevnit strvačník v těžišti při kmitech ve svislé rovině. Vychodiskem může být následující postup. Setrvačník zavěsíme na provázek, aby splýval s jeho osou, vytvoříme tak kyvadlo. Pokud setrvačník nerotuje, je úhlová rychlost tohoto kyvadla

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{mgl}{I_x + ml^2}},$$

kde m je hmotnost setrvačníku a l je vzdálenost závěsu od těžiště. V případě, že rotuje

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{mgl}{I_x + ml^2} \pm \frac{I_z \Omega w \sin\varphi}{I_x + ml^2}},$$

znaménko v odmocnině závisí na směru rotace. Z posledních dvou vztahů dostáváme vztah

$$\omega_\mathrm{s}^2 = \pm(\omega_2^2 - \omega_1^2)\frac{g}{g - \omega_1^2 l}, \qquad (18)$$

který nám umožní určit ω_s pomocí jiných dvou měření. Nevýhoda této metody je v tom, že frekvence ω_1 a ω_2 jsou relativně blízké, to bude zanášet velkou chybu, neboť obě úhlové frekvence od sebe odečítáme.

Existuje ještě spousta dalších možností, jak určit zeměpisnou šířku. Můžeme odměřit polohu slunce několikrát za den a tím určit rovinu, ve které se pohybuje. Rovněž můžeme pozorovat pohyb libovolné hvězdy po obloze, z jejích kulminací lze pak určit zeměpisnou šířku. Neinerciálnost soustavy spojené se Zemí se projevuje Coriolisovou silou, kterou se můžeme pokusit pozorovat. Jedním z jejich projevů je například stáčení roviny kmitů kyvadla (Faucaltovo kyvadlo), to je ale obtížné v domácích podmínkách naměřit. Dále můžeme zjišťovat směr a velikost intenzity magnetického pole Země za pomoci kmitů tyčového magnetu.

Postup měření

Měření výšky Polárky nad obzorem je nejméně náročný experiment, který dává relativně přesné výsledky. Většina řešitelů se do jeho realizace pustila, z toho důvodu jsme se rozhodli ho neprovádět. Ukážeme zde jiné experimenty, na které si tolik řešitelů netrouflo.

Výšku Slunce nad obzorem jsme měřili pomocí délky stínu vržené svislou tyčkou. Na to se nám hodila překližka, kterou jsme rozřezali na deset plátků. Každý plátek jsme na straně, která bude nahoře, zašpičatili. Ustavili jsme si vodorovnou plochu a pokryli ji papírem, aby bylo možné zaznaménávat polohy stínu. Potom jsme svisle upevnili připravené plátky z překližky, aby vrhaly stín na naši kreslící plochu. Pak už jen stačilo zaznamenávat délky stínů zhruba od půl dvanácté, dokud nebyli nejkratší (pravý sluneční čas není totožný se středoevropským, vinnou nerovnoměrnosti rychlosti oběhu kolem Slunce se jejich rozdíl během roku mění).

Dobu deseti kmitů našeho kyvadla jsme měřili čítačem, který měří uplynutou dobu mezi dvěma určenými průchody kyvadla dolní rovnovážnou polohou. Zde byla osvětlená fotodioda, která byla při průchodu kyvadla dolní rovnovažnou polohou zastíněna, a čítač odstartoval nebo zastavil stopky. Čítač měřil čas na 6 platných cifer, chyba je na jeho poslední cifře. Vzdálenost r jsme měřili posuvným měřítkem, délku l pásovým metrem (dílek 1 mm).

Jako gyroskop jsme použili ruční frézku, která splňuje přepoklady těžkého setrvačníku, neboť její otáčky dosahují až $300\,\mathrm{ot{\cdot}s^{-1}}$. Nejprve jsme ji zavěsili nad těžištěm, aby kmitala ve vodorovné rovině, a měřili dobu dvou jejích kmitů T_v. Frézka kmitala kolem severojižného směru. Bylo možné měřit pouze dobu dvou kmitů, neboť kmitání bylo velice pomalé, a když se přitlumilo, bylo málo patrné. Poté jsme frézku zavěsili, aby lanko splývalo s její osou, a měřili dobu sta kmitů tohoto kyvadla při zapnutém (T_2) a vypnutém (T_1) motoru. Měření T_1 a T_2 musí být obzvláště pečlivé, protože ve vzorci (18) vystupuje jejich rozdíl a obě periody jsou velice blízké. Proto jsme se rozhodli měřit periody sta kmitů.

Výsledky měření

Svinovacím metrem naměřené hodnoty délek tyček h z překližky a délek jejich stínů d uvádíme v následující tabulce spolu s vypočtenými úhly α podle vztahu

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{h}{d}.$$

d [cm]	40,00	41,60	40,30	40,55	40,60	41,40	41,05	40,85	41,55	41,70
h [cm]	29,40	29,60	29,35	29,35	29,50	29,55	29,55	29,40	29,60	29,65
α [°]	36,32	35,43	36,07	35,90	36,00	35,52	35,75	35,74	35,47	35,41

Průměrná hodnota je $\bar{\alpha} = 35,76^\circ$. Měření jsem provedl 7. března 2004, tomuto dni odpovídá podle (12) deklinace $\delta = -5,2^\circ \pm 0,2^\circ$. Pro zeměpisnou šířku podle (11) dostáváme

$$\varphi = 49,04^\circ.$$

Zbývá určit chybu. Chybu měření veličiny h vezmeme jako polovinu dílku měřidla $\Delta h = 0{,}5\,\mathrm{mm}$. Chyba veličiny d je větší, neboť stín, jehož délku jsme měřili, měl neostrý okraj, $\Delta d = 1\,\mathrm{mm}$. Chybu úhlu α potom určíme podle lineárního zákona hromadění chyb

$$\Delta\alpha = \left|\frac{\partial\alpha}{\partial h}\right| \Delta h + \left|\frac{\partial\alpha}{\partial d}\right| \Delta d = \frac{1}{\frac{h}{d} + \frac{d}{h}} \cdot \left(\frac{\Delta h}{h} + \frac{\Delta d}{d}\right) = 3,9^\circ.$$

Statistickou chybu můžeme zřejmě zanedbat. Uvážíme-li i chybu určení deklinace, dostáváme výsledek

$$\varphi = 49^\circ \pm 4^\circ.$$

Naměřené hodnoty doby deseti kmitů kyvadla zhotoveného z mosazné kuličky zavěšené na provázku uvádím v následující tabulce.
Průměrná hodnota a směrodatná odchylka jsou

$$\bar{T} = 2{,}01003\,\mathrm{s}, \qquad s_{\mathrm{sm}} = 0{,}00002\,\mathrm{s}.$$

Vzdálenost závěsu kyvadla od těžiště je $l = (1005 \pm 1)\,\mathrm{mm}$, hmotnost kuličky $M = 55{,}60\,\mathrm{g}$, hmotnost provázku $m = 0{,}1376\,\mathrm{g}$, poloměr kuličky $r = (11{,}9 \pm 0{,}1)\,\mathrm{mm}$ a amplituda výchylky $A \approx 2\,\mathrm{cm}$ (tomu odpovídá úhlová amplituda $\alpha \approx 0,02$). Změřené hodnoty hmotností můžeme vzhledem k ostatním chybám považovat za přesné. Docházelo k malým výchylkám kyvadla, můžeme proto bez obav zanedbat jejich vliv na dobu kmitu. Pro výpočet hodnoty tíhového zrychlení použijeme vztah (14)

$$g = 9{,}805\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}.$$

Nakonec určíme chybu této veličiny, použijeme lineární zákon hromadění chyb, neboť všechny naše chyby jsou systematické. Pro výpočet vycházíme ze vztahu (14), chybu veličiny v závorce lze zanedbat, neboť je velice blízká jedné. Pro relativní chyby tedy vychází

$$\delta g \approx 2\delta T + \delta l \approx \delta l = 0,001.$$

Výsledná hodnota tíhového zrychlení je

$$g = (9{,}805 \pm 0{,}010)\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}.$$

Ze vztahu (16) potom určíme rozmezí zeměpisných šířek, které tomuto tíhovému zrychlení odpovídají. Dostáváme

$$\varphi = 44^\circ \pm 12^\circ.$$

Zbývá poslední metoda. Vzdálenost závěsu od těžiště frézky při kmitání ve svislé rovině byla $l = (395 \pm 2)\,\mathrm{mm}$. Naměřené periody kmitání frézky v různých polohách, jak je popsáno výše, uvádíme v následující tabulce. Jsou zde rovněž vypočtené příslušné úhlové rychlosti podle vztahu $\omega = 2\pi/T$.

Průměrné hodnoty a jejich směrodatné odchylky jsou

$$\begin{aligned} \bar\omega_1 &= 4{,}8316\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}, & s_{\omega_1} &= 0{,}0006\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}},\\ \bar\omega_2 &= 4.8224\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}, & s_{\omega_2} &= 0{,}0005\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}},\\ \bar\omega_\mathrm{v} &= 0{,}6764\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}, & s_{\omega_\mathrm{v}} &= 0{,}0133\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}. \end{aligned}$$

Pro zeměpisnou šířku ze vztahů (18) a (17) dostáváme

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{(\omega_1^2 - \omega_2^2)g}{\omega_\mathrm{v}^2(g - \omega_1^2 l)} = 72,8^\circ. \tag{19}$$

Opět se zamyslíme nad chybou této hodnoty. Chyba měření času způsobená nedokonalými reakcemi člověka je asi 0,1 s, což způsobuje relativní chybu $\delta_\mathrm{m}\omega$. Celkové chyby úhlových frekvencí podle

$$\delta\omega = \sqrt{(\delta_\mathrm{m}\omega)^2 + \left(3\frac{s_\omega}{\omega}\right)^2}$$

jsou

$$\delta\omega_1 = 0,00086, \quad \delta\omega_2 = 0,00083, \quad \delta\omega_\mathrm{v} = 0,059.$$

Celkovou chybu určíme tak, že do vztahu (19) dosadíme krajní hodnoty jednotlivých veličin, které jsou určeny jejich chybami. Vychází

$$\varphi_\mathrm{max} = 82,7^\circ, \qquad \varphi_\mathrm{min} = 14,4^\circ.$$

Hodnota zeměpisné šířky naměřená touto metodou tedy je

$$\varphi = 70^\circ\ {}^{+10^\circ}_{-60^\circ}.$$

Diskuse a závěr

Měření výšky Slunce nad obzorem v pravé sluneční poledne nám dalo nejpřesnější výsledek ze všech metod. Největší chyba je způsobena neostrostí vrženého stínu. Nabízí se to vyřešit tím, že bychom si vzali delší tyč. Stín by sice byl delší, ale zároveň by se zvětšila neostrost, relativní chyba by zůstala stejná. K výreznému zpřesnění bychom museli zvolit jiný zůsob určení výšky Slunce nad obzorem.

Ve druhé metodě jsme měřili velice přesně, přesto jsme lepšího určení zeměpisné šířky nedosáhli. To je zaviněno tím, že tíhové zrychlení se na zemském povrchu mění až na třetí platné cifře. Díky tomu, že jsme měli k dispozici přesný přístroj na měření času, zanáší jedinou významnější chybu měření vzdálenosti těžiště kyvadla od závěsu l. Tuto chybu ale u domácky vyrobeného kyvadla těžko zmenšíme.

Třetí metoda nám ve výsledku o zeměpisné šířce příliš neřekla. Byla by přesná, pokud bychom dokázali upevnit gyroskop, aby kmital ve svislé rovině. Tím, že jsme to obešli a měřili vlastně kmity fyzického kyvadla, jsme si experiment znehodnotili. Hodnoty ω_1 a ω_2 jsou velice blízké, protože kmitání gyroskopu je výrazně pomalejší než kmitání fyzického kyvadla. Odečítání těchto úhlových frekvencí ve vzorci (18) způsobilo obrovskou chybu výsledku.

Shrňme výsledky všech metod:

a) $\varphi = 49^\circ \pm 4^\circ$,
b) $\varphi = 44^\circ \pm 12^\circ$,
c) $\varphi = 70^\circ\ {}^{+10^\circ}_{-60^\circ}$.

Skutečná honota zeměpisné šířky místa, kde jsme prováděli měření, je $50^\circ\,6'\,28''$ (tu můžeme najít v mapě, pomocí GPS, nebo například na serveru http://www.mapy.cz). Naměřené hodnoty se v rámci chyb s touto hodnotou shodují.

Poznámky k řešením

Jak již bylo zmíněno, drtivá většina řešitelů využívala k určení zeměpisné šířky Polárku. Našlo se i pár jedinců, kteří určovali polohu Slunce nebo se pokoušeli měřit tíhové zrychlení (což vzhledem malé přesnosti nevedlo k žádným výsledkům). Jiné realizované metody se v řešeních bohužel nevyskytli.

Překvapilo mě (a zároveň zklamalo), že všichni řešitelé považovali odečtení zeměpisné šířky z mapy (či nalezení někde na internetu) za fyzikální experiment. Takto zjištěná hodnota může být použita jedině jako kontrolní údaj. To je jako kdybychom vám zadali určit elementární náboj a vy ho našli v tabulkách a poslali jako řešení experimentální úlohy.

Honza Prachař
honzik@fykos.mff.cuni.cz

Úloha III . S ... *dipóly* *(5 bodů; průměr 2,63; řešilo 8 studentů)*

Spočtěte sílu působící mezi dvěma dalekými elektrickými dipóly o momentech $\boldsymbol{p}_1$ a $\boldsymbol{p}_2$ ve vzdálenosti r, pokud

a) leží v jedné přímce a jsou souhlasně orientovány,
b) jsou souhlasně orientovány ve směru kolmém na spojnici,
c) dipól $\boldsymbol{p}_1$ je orientován kolmo ke spojnici, $\boldsymbol{p}_2$ rovnoběžně s ní směrem k prvnímu.

Spočtěte sílu působící mezi dvěma dalekými elektrickými dipóly o momentech $\boldsymbol{p}_1$ a $\boldsymbol{p}_2$ ve vzdálenosti r, pokud

a) leží v jedné přímce a jsou souhlasně orientovány,
b) jsou souhlasně orientovány ve směru kolmém na spojnici,
c) dipól $\boldsymbol{p}_1$ je orientován kolmo ke spojnici, $\boldsymbol{p}_2$ rovnoběžně s ní směrem k prvnímu.

Víme, že intenzita elektrického pole je pro první dipól

$$\boldsymbol{E}_1 = \frac{3(\boldsymbol{p}_1 \dot{\boldsymbol{r}})\boldsymbol{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{p}_1}{r^3}. \tag{20}$$

Síla působící na druhý elektrický dipól potom je

$$\boldsymbol{F} = p_2 \dot{\nabla} E_1(\boldsymbol{r}).$$

Rozdělme nyní jednotlivé případy.

a) Zvolme si ať dipóly leží na ose x, potom

$$\boldsymbol{p}_1 = (p_1, 0, 0),$$

$$\boldsymbol{p}_2 = (p_2, 0, 0),$$

potom lehkým dosazením do ((20)) dostáváme

$$\boldsymbol{E}_1 = \frac{1}{r^5}(3p_1x^2 - p_1r^2, 3p_1xy, 3p_1xz) \tag{21}$$

a výsledná síla je

$$\boldsymbol{F} = p_2 \frac{\partial}{\partial x} \boldsymbol{E}_1 = \frac{3p_1p_2}{r^7}\left(3xr^2 - 5x^3, y(r^2 - 5x^2), z(r^2 - 5x^2)\right),$$

to v případě $r = (r, 0, 0)$ dává

$$\boldsymbol{F} = -6\frac{p_1p_2}{r^4}(1, 0, 0).$$

b) Při stejné poloze dipólů jako v předcházejícím případě máme

$$\boldsymbol{p}_1 = (0, p_1, 0),$$

$$\boldsymbol{p}_2 = (0, p_2, 0).$$

Intenzita v tomto případě je

$$\boldsymbol{E}_1 = -\frac{p_1}{r^5}(3yx, 3y^2 - r^2, 3zy).$$

Výsledná síla

$$\boldsymbol{F} = p_2 \frac{\partial}{\partial y} \boldsymbol{E}_1.$$

To po zderivování a dosazení $r = (x, 0, 0)$ dá

$$F = 3\frac{p_1p_2}{r^4}(1, 0, 0).$$

c) Opět volíme polohu dipólů na ose x, tedy

$$\boldsymbol{p}_1 = (p_1, 0, 0),$$

$$\boldsymbol{p}_2 = (0, p_2, 0).$$

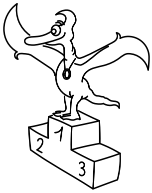
Intenzita bude mít tvar (21) a sílu spočítáme jako

$$\boldsymbol{F} = p_2 \frac{\partial}{\partial y} E_1.$$

Derivování si dovolíme zase vynechat a uvedeme jen výsledek po dosazení $r = (r, 0, 0)$

$$\boldsymbol{F} = 3\frac{p_1p_2}{r^4}(0, 1, 0).$$

Miro Kladiva
miro@fykos.mff.cuni.cz



Pořadí řešitelů po III. sérii

Kategorie čtvrtých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	II	%	Σ
	Student Pilný	MFF UK	3	4	3	5	5	8	5	**33**	*100*	**100**
1.	*Matouš Ringel*	G Broumov	3	4	3	6	5	8	5	**34**	*97*	**97**
2.	*Peter Zalom*	G D. Tatarku, Poprad	3	4	2	4	0	7	1	**21**	*77*	**70**
3.	*Róbert Sedlák*	G Prešov	3	3	3	4	1	5	–	**19**	*65*	**59**
4.	*Tomáš Mánik*	G Lučenec	3	4	3	4	0	2	–	**16**	*60*	**55**
5.	*Jan Fazekaš*	ISŠ Sokolov	3	3	2	2	0	–	2	**12**	*58*	**37**
6.	*Štěpán Uxa*	GSG Jilemnice	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*74*	**31**
7.	*Pavel Daniel*	G Zborovská Praha	3	–	–	–	–	–	–	**3**	*68*	**28**
8.	*Jana Matějová*	SPŠ Chrudim	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*92*	**22**
9.	*Petra Suková*	G Svitavy	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*84*	**21**
10.	*Jan Moláček*	G J. K. Tyla Hradec Králové	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*85*	**17**
11.	*Hynek Hanke*	G Budějovická Praha	2	–	–	–	0	–	–	**2**	*48*	**14**
12.	*Ilič Ognjen*		–	–	–	–	–	–	–	**0**	*100*	**12**
13.–14.	*Lucie Strmisková*	G Kyjov	–	0	–	–	–	–	–	**0**	*63*	**10**
	Zdeněk Tichý	G Pelhřimov	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*77*	**10**
15.–16.	*Jana Hrudíková*	G Přerov	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*64*	**9**
	Vojtěch Krejčiřík	G Kroměříž	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*75*	**9**
17.–19.	*Milan Matějka*	SPŠ SaD Děčín	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*42*	**8**
	Jan Ondruš	G F. M. Pelcla	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*40*	**8**
	Vladimír Sommer	G Neumannova Žďár n. S.	–	–	–	–	0	–	–	**0**	*35*	**8**
20.	*Jan Křivonožka*	G Bílovec	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*47*	**7**
21.–22.	*Ladislav Peška*	G Slaný	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*86*	**6**
	Lukáš Voleský	COP Hronov	3	–	3	–	–	–	–	**6**	*60*	**6**
23.–27.	*Petr Dostál*	G Žamberk	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*71*	**5**
	Milan Kříž	G Arcibiskupské Praha	–	–	1	–	–	–	–	**1**	*71*	**5**
	Michal Růžek	G Arcibiskupské Praha	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*63*	**5**
	Marta Říhová	SPodŠ Náchod	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*45*	**5**
	Zdeněk Váňa	COP Hronov	2	0	3	–	0	–	–	**5**	*33*	**5**
28.	*Pavel Hála*	G Český Krumlov	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*50*	**4**
29.	*Josef Brožek*	SOU Přelouč	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*0*	**0**

Kategorie třetích ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	II	%	Σ
	Student Pilný	MFF UK	3	4	3	5	5	8	5	**33**	*100*	**100**
1.	*Anton Repko*	G Sv. Mikuláša, Prešov	3	2	3	5	1	1	4	**19**	*79*	**79**
2.	*Stanislav Vosolsobě*	G U Balvanu Jablonec nN	3	1	0	2	0	9	–	**15**	*61*	**58**
3.	*Martin Takáč*	G Nové Zámky	3	–	–	–	5	2	–	**10**	*60*	**42**
4.	*Michal Humpula*	G Uherský Brod	3	2	3	1	–	–	2	**11**	*74*	**39**
5.	*Petr Houštěk*	G Pelhřimov	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*86*	**36**
6.	*Peter Greškovič*	G Svidník	2	–	3	1	5	1	–	**12**	*49*	**32**
7.	*Pavlína Böhmová*	G Havířov	3	–	0	–	–	–	–	**3**	*60*	**26**
8.–9.	*Daniel Božík*	G Jura Hronca	3	0	3	–	–	–	–	**6**	*53*	**25**
	Roman Fiala	VOŠ a SPŠE Plzeň	2	0	3	1	0	7	–	**13**	*53*	**25**
10.	*Lukáš Gříšek*	G Františka Hajdy, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*49*	**23**
11.	*Ivan Macháček*	G Uherský Brod	3	1	2	1	–	–	–	**7**	*62*	**21**
12.	*Pavel Kocourek*	SPŠ Panská	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*100*	**20**
13.	*Pavel Hron*	GOA Sedlčany	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*44*	**18**
14.–15.	*Markéta Kavalírová*	G Českolipská Praha	3	0	–	–	–	–	–	**3**	*41*	**13**
	Zdeněk Kučka	G Neumannova Žďár n. S.	–	–	1	–	2	–	–	**3**	*39*	**13**
16.	*Hana Suchomelová*	G Ľudovíta Štúra	–	1	–	–	–	5	–	**6**	*43*	**12**
17.–19.	*Josef Kvasničák*	G Trutnov	1	2	2	–	0	3	–	**8**	*26*	**11**
	Jan Pavelka	G Kapitána Jaroše Brno	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*58*	**11**
	Ondřej Zapletal	G Křenová Brno	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*48*	**11**
20.–21.	*Jiří Kulda*	COP Hronov	–	–	3	–	–	0	–	**3**	*33*	**9**
	Markéta Vilimovská	G Českolipská Praha	3	0	–	–	–	–	–	**3**	*33*	**9**
22.	*Mária Šedivá*	G Ľudovíta Štúra	1	1	–	–	–	2	–	**4**	*31*	**8**
23.–24.	*Radek Beneš*	COP Hronov	3	–	3	–	–	–	–	**6**	*50*	**7**
	Lenka Rychtrová	G Louny	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*16*	**7**
25.	*Dalibor Máj*	GaSG Vrbno p. Pr.	0	–	–	–	–	–	–	**0**	*36*	**5**
26.–27.	*Kateřina Divišová*	GOA Sedlčany	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*27*	**4**
	Richard Gracla	G Nad Štolou Praha	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*25*	**4**
28.–29.	*Lenka Doubravová*	G Matyáše Lercha Brno	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*43*	**3**
	Dominik Schneider	G dr. Josefa Pekaře	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*15*	**3**
30.	*Jan Komínek*	G Chrudim	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*13*	**2**
31.–33.	*Aleš Razým*	SpG Táborská Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*33*	**1**
	Vladimír Stejskal	G Sladkovského nám. Praha	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*25*	**1**
	Denis Vald	G Jírovcova, Č. Budějovice	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*14*	**1**
34.–35.	*Petr Andrla*	BG Barvičova Brno	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*0*	**0**
	Jana Babováková	G Most	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*0*	**0**

Kategorie druhých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	II	%	Σ
	Student Pilný	MFF UK	3	4	3	5	5	8	5	**33**	*100*	**100**
1.	*Slavomír Takáč*	G Nové Zámky	3	–	–	–	5	2	–	**10**	*60*	**42**
2.–3.	*Tomáš Bednárik*	G Vsetín	3	0	–	1	0	6	–	**10**	*55*	**38**
	Lukáš Severa	G Benešov	3	–	–	–	0	8	–	**11**	*61*	**38**
4.	*Monika Josieková*	G Český Těšín	3	3	3	–	0	7	–	**16**	*65*	**36**
5.	*Aleš Podolník*	G Kapitána Jaroše Brno	1	3	–	1	0	7	–	**12**	*50*	**33**
6.	*Tereza Klimošová*	G Lanškroun	3	–	3	–	5	–	–	**11**	*77*	**30**
7.	*Martin Konečný*	G Boskovice	3	0	3	1	0	6	–	**13**	*31*	**27**
8.–9.	*Marek Scholz*	G Neratovice	3	0	–	3	0	5	–	**11**	*49*	**26**
	Jan Valášek	G Broumov	2	–	–	2	–	2	–	**6**	*60*	**26**
10.	*Petr Smital*	G Kapitána Jaroše Brno	3	3	–	0	2	5	–	**13**	*58*	**23**
11.–12.	*Štěpán Jeřábek*	G U Balvanu Jablonec nN	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*49*	**22**
	Peter Perešíni	G J. G. Tajovského	3	–	3	–	1	–	–	**7**	*56*	**22**
13.	*Michal Sivák*	G Ľudovíta Štúra	1	1	–	2	–	7	–	**11**	*44*	**21**
14.–15.	*Ondřej Bílka*	G Lesní čtvrť, Zlín	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*51*	**19**
	Vladimír Sivák	G Ľudovíta Štúra	1	1	–	–	–	6	–	**8**	*40*	**19**
16.	*Petra Malá*	G Moravský Krumlov	3	–	–	–	2	–	5	**10**	*58*	**18**
17.	*Jana Vrábelová*	G Ľudovíta Štúra	1	1	–	–	–	7	–	**9**	*53*	**17**
18.	*Jan Bednář*	COP Hronov	3	–	3	–	0	0	–	**6**	*39*	**16**
19.	*Jiří Hloska*	G Terezy Novákové Brno	2	–	3	–	–	–	–	**5**	*68*	**15**
20.	*Jiří Šperka*	GOA Blansko	3	–	–	1	0	–	–	**4**	*43*	**12**
21.–23.	*Lucie Hympánová*	G Kladno	3	–	–	–	0	–	–	**3**	*22*	**11**
	Tomáš Jirotka	G Klatovy	3	–	–	–	–	4	–	**7**	*73*	**11**
	Ondřej Kudláček	SPgŠ Liberec	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*55*	**11**
24.–26.	*Jakub Nohejl*	G Vlašim	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*20*	**9**
	Adam Přenosil	G Sladkovského nám. Praha	3	–	–	–	–	–	–	**3**	*64*	**9**
	Josef Rubáš	G Klatovy	0	–	–	–	0	–	0	**0**	*15*	**9**
27.–28.	*Martin Slezák*	G Vlašim	1	–	–	0	–	–	–	**1**	*25*	**7**
	Hana Vítová	G Bystřice n. Pern.	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*35*	**7**
29.	*Jan Korbel*	G Říčany	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*63*	**5**
30.–32.	*Roman Derco*	G Svidník	3	–	–	–	–	–	–	**3**	*100*	**3**
	Pavla Grubhofferová	G Voděradská Praha	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*100*	**3**
	Štěpán Kříž	G Zborovská Praha	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*25*	**3**
33.–34.	*Petr Hanek*	G Nad Kavalírkou Praha	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*8*	**2**
	Štěpán Kozák	G Jeseník	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*10*	**2**
35.–36.	*Vendula Exnerová*	G Nad Štolou Praha	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*25*	**1**
	Hanka Kronusová	G Vlašim	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*13*	**1**

Kategorie prvních ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	II	%	Σ
	Student Pilný	MFF UK	3	4	3	5	5	8	5	**33**	*100*	**100**
1.	*Pavel Motloch*	G Petra Bezruče	3	4	3	–	–	1	2	**13**	*67*	**43**
2.	*Jakub Benda*	G Jana Nerudy Praha	3	–	–	–	–	–	–	**3**	*78*	**25**
3.	*Ondrej Bogár*	G Ľudovíta Štúra	1	1	–	0	–	9	–	**11**	*40*	**19**
4.	*Katarína Baxová*	G Ľudovíta Štúra	–	1	–	–	–	6	–	**7**	*46*	**13**
5.	*Miroslav Kaděra*	G Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*73*	**11**
6.	*Juraj Zajac*	G Ľudovíta Štúra	0	1	–	–	–	6	–	**7**	*43*	**10**
7.–8.	*Radim Pechal*	SPŠE Rožnov p. R.	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*50*	**8**
	Přemysl Šrámek	G Dašická, Pardubice	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*32*	**8**
9.	*Jana Przeczková*	G Havířov	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*13*	**6**
10.–12.	*Ján Čuvala*	G Ľudovíta Štúra	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*38*	**3**
	Pavel Irinkov	G Ústavní Praha	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*15*	**3**
	Kryštof Touška	G Klatovy	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*100*	**3**
13.	*Libor Skala*	G Blovice	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*25*	**1**
14.	*Michael Dvořáček*	G Letovice	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*0*	**0**

FYKOS
UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: http://fykos.mff.cuni.cz
e-mail pro řešení: fykos-solutions@mff.cuni.cz
e-mail: fykos@mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.