

17. ročník, úloha I. E ... absolutní nula (8 bodů; průměr 4,03; řešilo 40 studentů)

S experimentálním vybavením dostupným v době Lorda Celsia změřte teplotu absolutní nuly (v Celsiově stupnici). Poradíme vám, že pro měření můžete využít například vlastností ideálního plynu.

Vymyslel Pavel Augustinský.

Ke změření absolutní nuly využijeme vlastností ideálního plynu. Budeme měřit jeho stavové veličiny při nějakém ději. Tato metoda je relativně málo náročná a vystačíme si se stejnými prostředky, které byly dostupné Lordu Celsiovi.

Teorie

Pokusme se pojmout teorii ve stylu Lorda Celsia. V době Lorda Celsia ještě nebyla žádná teorie pro ideální plyn, proto by například měřil, jak se mění objem plynu při stálém tlaku v závislosti na jeho teplotě. Pokud by byl dostatečně pečlivý, a to on jistě byl, vyšla by mu závislost lineární, jejímž grafem je přímka. Když by tuto přímku prodloužil, tak by v nějaké teplotě protнула nulu na teplotní ose. Při této teplotě by musel mít plyn nulový objem, což je zjevně nemožné. Obdobně by jistě postupoval i s jinými plyny, a ač by sklon této přímky byl jiný, překvapivě by mu vyšlo totéž, přímka by protínala teplotní osu stále ve stejném bodě. Z toho by usoudil, že onen bod bude *absolutní fyzikální nula*.

Úvaha Lorda Celsia je správná, neboť podle stavové rovnice pro ideální plyn platí

$$pV = nRT.$$

Lord Celsius udržoval konstantní tlak plynu v uzavřené soustavě. Potom můžeme napsat

$$V = \frac{nR}{p} \cdot T, \quad \text{tedy} \quad V = C(t - t_0) = Ct - Ct_0, \quad (1)$$

kde C je konstanta, t je teplota v Celsiově stupnici a t_0 teplota absolutní nuly v Celsiově stupnici. Graf závislosti $V = f(T)$ protíná osu x v 0 K, proto graf $V = f(t)$ protne osu x právě v hodnotě teploty absolutní nula. Z (1) víme, že závislost $V = f(t)$ je lineární, neboli

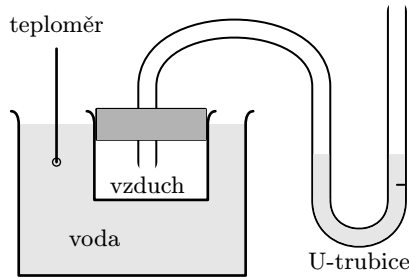
$$V = at + b.$$

Z našich naměřených hodnot určíme koeficienty a a b . Porovnáním s (1) dostáváme

$$t_0 = -\frac{b}{a}.$$

Postup měření

Jako plyn použijeme vzduch, který se vlastnostmi blíží ideálnímu plynu. Plyn jsme uzavřeli do skleněné nádoby. Nádobu jsme zajistili korkovou zátkou s otvorem, kterým vychází trubička spojená s U-trubicí (viz nákres na obrázku 1). Pokud není dostupná přímo U-trubice, dá se použít i něco jiného, co funguje stejně. Zátku jsme zakapali voskem pro zlepšení utěsnění. Celá nádoba je ponořena do vodní lázně, kterou zahříváme a jejíž teplotu měříme. Abychom nádobu udrželi pod vodou, bylo nutné ji zatížit, horní strana byla těsně pod hladinou. V U-trubicí je voda. Protože chceme v nádobě udržet konstantní tlak, musí být výška vody v obou ramenech U-trubice stejná. Na U-trubicí jsme si dále vyznačili rysku, od které jsme měřili výšku hladiny v ramenech.



Obr. 1. Použitá aparatura

Objem nádoby a objem trubice až po rysku označme V_0 , vnitřní průměr trubice je d . Je-li voda ve výšce h , je objem plynu

$$V = V_0 - \frac{1}{4}\pi d^2 h. \quad (2)$$

Vodní lázeň jsme zahřáli a do U-trubice nalili co nejméně vody (hladina je těsně nad ryskou). Systém jsme nechali ustálit, aby se zahřál i plyn v nádobě. Nyní jsme nechali vodní lázeň a s ní i plyn v nádobě chladnout. Vodu jsme promíchávali, aby v ní nevznikaly rozdíly teplot. Chladnutí probíhalo pomalu, aby se stihla ustavit teplotní rovnováha mezi vzduchem a vodou. V nádobě bylo třeba neustále udržovat konstantní tlak, což jsme realizovali dokapáváním vody do otevřeného konce U-trubice. To mělo výhodu, tlak v nádobě byl stejný jako atmosférický, tudíž žádný plyn neunikal ani žádná voda nevnikala do nádoby případnými netěsnostmi. Jak teplota vzduchu klesala, zaznamenávali jsme pro určité teploty výšku h vodní hladiny v U-trubici.

Měření

Objem V_0 jsme určili pomocí injekční stříkačky $V_0 = (136 \pm 3)$ ml. Vnitřní průměr trubičky jsme změřili posuvným měřítkem $d = (6,0 \pm 0,2)$ mm. Naměřili jsme několik hodnot $[t, h]$, z h jsme poté vypočetli V . Pro lepší přesnost výsledku by mělo být rozmezí měřených teplot co největší a počet naměřených bodů $[t, h]$ také co největší. Dále budeme určovat chybu V , kterou počítáme podle vztahu (2). Na chybu ΔV_0 na chvíli zapomeneme, protože má při všech měřeních stejnou hodnotu. Relativní chyby d a h jsou

$$\delta d = \frac{\Delta d}{d} = \frac{0,2}{6} = 0,033 \quad \text{a} \quad \delta h = \frac{\Delta h}{h} = \frac{5 \text{ mm}}{h}.$$

Chybu Δh jsme se snažili odhadnout tak, aby v ní byla zahrnuta chyba měření teploty i výšky hladiny a chyba systematická. Hodnota δh je tedy pro každé měření jiná. S využitím (2) a obecného vztahu pro výpočet chyby veličiny, pokud ji počítáme z jiných veličin měřených s chybou,

$$\Delta V = \frac{\partial V}{\partial h} \Delta h + \frac{\partial V}{\partial d} \Delta d,$$

dostáváme

$$\Delta V = \frac{1}{4}\pi d^2 h(2\delta d + \delta h) = \frac{1}{4}\pi d^2 \Delta h + \frac{1}{2}\pi d h \Delta d.$$

Vidíme, že k chybě ΔV nejvíce přispívá Δd , zvláště pro větší hodnoty h , proto jsme průměr d měřili posuvným měřítkem. Hodnoty h , V a ΔV pro 17 měřených teplot jsou v následující tabulce.

$t[^\circ\text{C}]$	36	35	34	33	32	31	30	29,5	29
$h[\text{mm}]$	7	19	38	52	67	86	101	110	115
$V[\text{ml}]$	135,8	135,5	134,9	134,5	134,1	133,6	133,1	132,9	132,7
$\Delta V[\text{ml}]$	0,2	0,2	0,2	0,2	0,3	0,3	0,3	0,3	0,4

$t[^\circ\text{C}]$	28,5	28	27,5	27	26,5	26	25,5	25	
$h[\text{mm}]$	120	131	140	149	152	162	169	180	
$V[\text{ml}]$	132,6	132,3	132,0	131,8	131,7	131,4	131,2	130,9	
$\Delta V[\text{ml}]$	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,5	0,5	

Hodnoty $[t, V]$ vyneseme do grafu, chyby ΔV vyznačíme chybovými úsečkami. Naměřené hodnoty jsou označeny křížkem. Těmito body proložíme přímkou, protože podle teorie předpokládáme závislost $V = at + b$. To můžeme provést od ruky nebo nám křivku může spočítat počítač. V grafu je regresní přímka vyznačena tučně. Dále si vyznačíme, jak může tato přímka vypadat v krajních případech (v grafu jsou čárkované), k tomu využijeme chybové úsečky. Z našeho grafu odečteme a a b pro regresní přímku a $a_{1,2}$, $b_{1,2}$ pro mezní případy.

$$a = 0,443 \text{ ml}\cdot\text{K}^{-1}, \quad b = 120 \text{ ml},$$

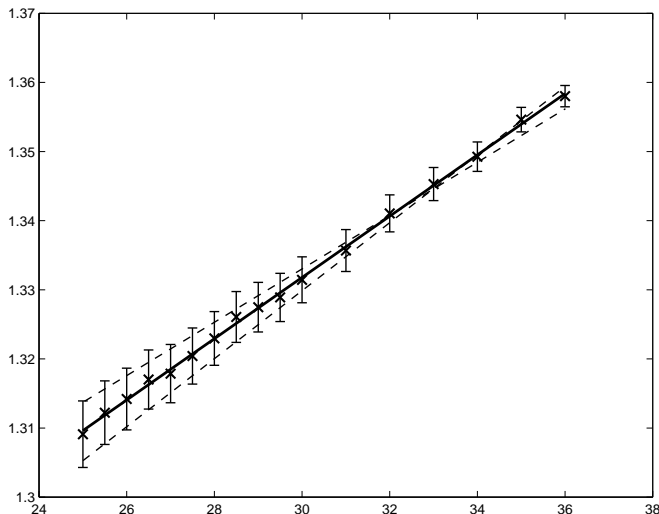
$$a_1 = 0,38 \text{ ml}\cdot\text{K}^{-1}, \quad b_1 = 122 \text{ ml},$$

$$a_2 = 0,48 \text{ ml}\cdot\text{K}^{-1}, \quad b_2 = 118 \text{ ml}.$$

Odtud máme

$$a = (0,44 \pm 0,06) \text{ ml}\cdot\text{K}^{-1}, \quad b = (120 \pm 2) \text{ ml}.$$

Nesmíme ale zapomenout na chybu ΔV_0 , která ovlivňuje polohu naměřených hodnot v grafu



Obr. 2. Graf závislosti $V/10^{-4} \text{ m}$ na $t/^\circ\text{C}$

ve svislém směru. Chyba ΔV_0 tedy přispívá k chybě b . Celkově dostáváme

$$b = (120 \pm 5) \text{ ml.}$$

Relativní chyby a a b jsou

$$\delta a = \frac{0,06}{0,44} = 0,14 \quad \text{a} \quad \delta b = \frac{5}{120} = 0,042.$$

Pro teplotu absolutní teploty v Celsiově stupnici jsme si odvodili $t_0 = -b/a$,

$$t_0 = -272,7^\circ\text{C}, \quad \delta t_0 = \delta a + \delta b = 0,18 \quad \Rightarrow \quad \Delta t_0 = 48^\circ\text{C}.$$

Naše naměřená hodnota absolutní nuly je $t_0 = (-270 \pm 50)^\circ\text{C}$.

Závěr

Chyba výsledku vyšla dost velká. To je dáno tím, že jsme závislost $V = f(t)$ proměřovali pro teploty hodně vzdálené od absolutní nuly. Jen náhodou jsme se „trefili“ tak blízko skutečné hodnoty.

Všechny chyby měření jsme zmínili již dříve, jedná se o chybu měření h , d , V_0 a teploty. K těmto chybám přistupují chyby systematické. Vzduch v trubici mimo nádobu má nižší teplotu než vzduch v nádobě. Měříme teplotu vody, vzduch může mít teplotu jinou, pokud není zcela ustavena rovnováha. Z nádoby může unikat vzduch a do vzduchu v nádobě se může vypařovat voda. Vzduch není ideální plyn.

Poznámky k řešení

Všichni řešitelé se zabývali ději plynů v uzavřené soustavě a s využitím jejich vlastností určili absolutní nulu. Byly tři možnosti provedení měření: udržovat konstantní tlak (takto jsme postupovali my, $V \sim T$), udržovat konstantní objem (musíme znát hodnotu atmosférického tlaku, $p \sim T$) a nebo měřit, jak se mění tlak a objem plynu při změnách teploty ($pV \sim T$).

Jiný způsob byl měřit rychlost zvuku ve vzduchu, pro kterou platí $v = \sqrt{K/\rho}$, kde K je modul objemové pružnosti vzduchu. Ze stavové rovnice pro hustotu máme $\rho = pM/RT$ (M je molární hmotnost vzduchu). Celkově tedy pro rychlost zvuku platí

$$v = \sqrt{\frac{KR}{pM}} T.$$

Závislost $v = f(T)$ jsme mohli obdobně jako při ději ideálního plynu pro několik teplot proměřit.

Naprostá většina řešitelů naměřila hodnotu absolutní nuly v rozmezí 50°C od skutečné hodnoty. Bohužel jen málokdo se pokusil určit chybu svého výsledku a jediná *Jana Matějová* ji měla správně vypočtenou. Ostatní napsali většinou něco jako $t_0 = (-273 \pm 3)^\circ\text{C}$ nebo odchylku od skutečné hodnoty.

Na závěr bych chtěl uvést na pravou míru to, v čem udělalo několik řešitelů chybu. Nechť plyn v uzavřené soustavě přejde izobaricky z jednoho stavu do druhého, pro tyto stavy si napíšeme stavové rovnice

$$pV_0 = nRT_0, \quad pV = nRT.$$

Označíme $\Delta T = T - T_0$, nR/p je konstanta. Pak po odečtení obou rovnic dostaneme

$$V = V_0 + \frac{nR}{p} \Delta T = V_0 \left(1 + \frac{nR}{pV_0} \Delta T \right) = V_0 \left(1 + \frac{1}{T_0} \Delta T \right).$$

Pokud bude původní stav plynu při 0°C , pak V_0 bude objem při 0°C , $\Delta T = t$ a T_0 teplota 0°C v Kelvinově stupnici, tedy velikost teploty absolutní nuly t_0 . Označme $\gamma = 1/T_0 = -1/t_0$, pak dostáváme vztah

$$V = V_0(1 + \gamma t) \quad \text{a podobně také} \quad p = p_0(1 + \gamma t).$$

Tyto vztahy řešitelé používali, ale zapomněli, že V_0 a p_0 je objem a tlak plynu při 0°C . Nebo používali vztah $V = V_0(1 + \gamma \Delta t)$, v tomto případě ale není γ konstanta.

Honza Prachař

honzik@fykos.mff.cuni.cz