

**17. ročník, úloha IV. 2 ... záhadné kyvadélko** (5 bodů; průměr 2,67; řešilo 9 studentů)

Kovová palička může kmitat okolo koncového bodu. Její druhý konec se stále dotýká kovového oblouku. Bod závěsu je přes kondenzátor kapacity  $C$  zapojený na střed kovového oblouku (tj. nejnižší bod, ve kterém se nachází dolní konec paličky). Celé kyvadélko se nachází v homogenním magnetickém poli indukce  $B$ , která je kolmá na rovinu kmitů. Jaká je doba kmitu kyvadla, pokud hmotnost paličky je  $m$  a tření a odpor drátu zanedbáme? Počáteční výchylku kyvadla  $\alpha_0$  uvažujeme malou.

*Úlohu znal a navrhl Miro.*

Označme si výchylku kyvadla  $\varphi$ , délku závěsu  $r$ ,  $U_C$  napětí na kondenzátoru a  $U_P$  napětí na kovové paličce. Jelikož se palička pohybuje v magnetickém poli, tak se na ní bude indukovat napětí

$$U_P = \frac{d\mathbf{B} \cdot \mathbf{S}}{dt} = \frac{Br^2 d\varphi}{dt} = Br^2 \dot{\varphi}.$$

Bez odporu je napětí na paličce stejné jako na kondenzátoru

$$U_P = -U_C = Q/C,$$

což po dosazení za  $U_P$  dává

$$Br^2 \dot{\varphi} = -Q/C. \quad (1)$$

Tím máme vyřešenou elektrickou část problému a teď se podíváme na mechanický pohyb paličky. Tady použijeme druhou impulsovou větu

$$M = J\ddot{\varphi}, \quad (2)$$

kde  $J$  je moment setrvačnosti, který má pro paličku hodnotu  $mr^2/3$ . Moment síly je dán součtem magnetické a gravitační síly, tedy

$$M = mg \frac{r}{2} \sin \varphi \doteq \frac{mgr^2}{2} \varphi + \frac{Br^2}{2} I.$$

To nám spolu s rovnicí (2) dává

$$\frac{mr^2}{3} \ddot{\varphi} = \frac{mgr}{2} \varphi + \frac{Br^2}{2} I. \quad (3)$$

Nyní už máme všechny rovnice, které potřebujeme, jen rovnicí (1) musíme zderivovat podle času

$$Br^2 \ddot{\varphi} = -I/C.$$

Z této rovnice dosazením za  $I$  do (3) máme

$$\left( \frac{2}{3} mr^2 + CB^2 r^2 \right) \ddot{\varphi} = mgr \varphi,$$

což je rovnice harmonických kmitů s dobou kmitu

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2r}{3g} + \frac{CB^2 r^3}{2mg}}.$$

**Miro Kladiwa**  
fykos@mff.cuni.cz

---

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.