

17. ročník, úloha IV. 4 ... slezští havíři (4 body; průměr 2,87; řešilo 38 studentů)

Horníci dolu Fučík v Petřvaldě se omylem prokopali skrz Zemi až k protinožcům. Všichni havíři v zoufalství do dolu naskákali. Jak dlouho bude trvat, než doletí na druhý konec vykopaného dolu, pokud tunel prochází přesně středem Země nebo pokud jeho nejkratší vzdálenost od středu Země je d ? Je možné, aby horníci tento průlet přežili?

Nad problémem se zamýšlel Lukáš Chvátal.

Nejprve si musíme uvědomit, jak klesá intenzita gravitačního pole s hloubkou v šachtě. Z Gaussovy věty a sférické symetrie problému plyne, že k intenzitě pole ve vzdálenosti d od středu Země přispívá pouze hmota, která leží v kouli o poloměru d , jejíž střed je shodný se středem Země (příspěvek ostatní hmoty k výsledné intenzitě je nulový).

Předpokládáme-li, že hustota Země je ve všech jejích bodech stejná, vidíme, že hmota této koule je úměrná d^3 . Z Newtonova gravitačního zákona tedy plyne, že gravitační síla ve vzdálenosti d od středu Země je úměrná $d^3/d^2 = d$. Konstantu úměrnosti snadno určíme z hodnoty g a poloměru Země jako mg/R_Z , kde m je hmotnost havíře.

Nyní si stačí uvědomit, že pohyb, který vykonává havíř, je harmonický, protože síla, která na něj působí, je úměrná jeho vzdálenosti od středu Země. Ze vzorce pro dobu kyvu harmonického oscilátoru tedy dostáváme dobu průletu havíře

$$T = \pi \sqrt{\frac{g}{R_Z}}.$$

V případě, že šachta nevede přímo středem Země, je situace analogická. Potenciální energie harmonického oscilátoru je kvadraticky závislá na vzdálenosti od rovnovážné polohy. Vidíme tedy, že potenciální energie havíře ve vzdálenosti d od středu tunelu, jehož nejbližší vzdálenost od středu Země je a , je podle Pythagorovy věty úměrná $d^2 + a^2$ s konstantou úměrnosti stejnou jako v případě $a = 0$ (potenciální energii volíme ve středu Země jako nulovou). Od případu $a = 0$ se tento vzorec liší pouze o aditivní konstantu a na té výsledek nezávisí. Doba pádu je tedy na a nezávislá.

Pavel Augustinský
fykos@mff.cuni.cz