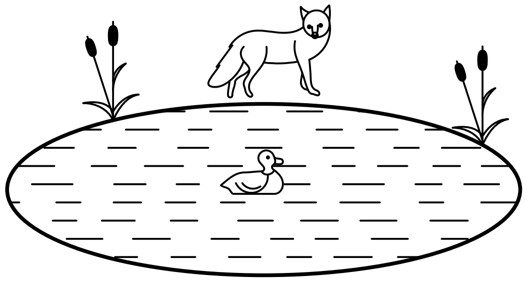
Zadání I. série

Termín odeslání: 18. října 2004

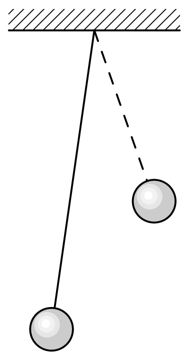
Úloha I . 1 ... *ošklivé kačátko*



Obr. 1. Kačátko v rybníku

Opuštěné ošklivé kačátko zůstalo osamocené uprostřed kruhového rybníku. Chce se dostat za svými sourozenci a matkou kachnou, ale na břehu rybníka na něj číhá liška. Kačátko je ještě mladé, proto dokáže vzlétnout pouze z pevné země. Určete maximální poměr rychlostí běhu lišky a plavání kačátka, aby stihlo doplavat na břeh a z něj lišce uletět. Poraďte také kačátku, jakou strategii má zvolit.

Úloha I . 2 ... *přistřižené kyvadlo*



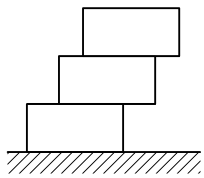
Obr. 2

Malá hmotná kulička visí na konci nehmotného provázku a kmitá svojí vlastní frekvencí f kolem rovnovážné polohy (viz obr. 2). Jaká bude vlastní frekvence f', pokud zkrátíme provázek na polovinu?

Úloha I . 3 ... *mistr zedník*

Zedník staví cihly na sebe do výšky jako schody podobně jako na obr. 3. Snaží se je postavit co nejvíce do dálky a ví, že jich může použít, kolik chce. Poraďte mu, jak to má provést, aby se „dostal“ co možná nejdále, i když nesmí používat maltu.

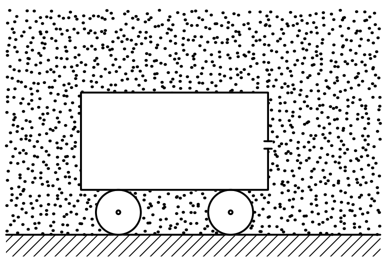
Úloha I . 4 ... *vodník Děsílko poznává svět*



Obr. 3

Vodník sedí na dně v čisté klidné vodě svého rybníka a dívá se vzhůru, jeho oči jsou v hloubce $h = 1{,}5\,\mathrm{m}$ pod povrchem vody. Jak se Děsílkovi jeví prostor nad povrchem vody? Předpokládejte, že index lomu oka je stejný jako index lomu vody.

Úloha I . P ... *antiraketa*

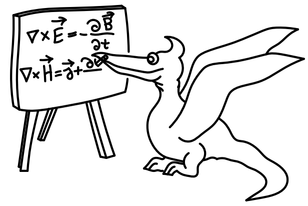


Obr. 4. Antiraketa

Uvažme nádobu na kolečkách s otvorem dle obr. 4. Uniká-li stlačený vzduch z nádoby ven, nádoba se pohybuje. Jde o princip analogický raketovým motorům. Představme si nyní opačnou situaci. Nádobu, v níž bylo vakuum, umístěnou ve vzduchu, který do nádoby proudí malým otvorem. Jak se bude nádoba pohybovat? Předpokládejte, že se nádoba může po zemi pohybovat bez odporu.

Úloha I . E ... *a přece se točí*

Již několik století víme, že se Země točí. Změřte tedy dobu, za kterou se Země otočí o 360° kolem své osy. Své měření se pokuste provést co nejpřesněji. Můžete navrhnout a vypracovat několik různých metod a jejich výsledky porovnat. V každém případě proveďte dostatek měření, abyste je mohli statisticky zpracovat.



Seriál na pokračování

Úvod

Svět, ve kterém žijeme, je na první pohled plný různých těles. Tělesa se pohybují nebo jsou v klidu, vzájemně interagují buď na dálku, nebo přímým dotykem. Při prvním seznámení s fyzikou jste se jistě snažili najít zákony, které mechanické pohyby těles popisují. Úkolem letošního seriálu o **Teoretické mechanice** je ucelit a doplnit vaši představu o mechanice. Zároveň chceme ukázat i jiné silnější nástroje pro studium mechaniky, které rozšíří množinu problémů, které dokážete řešit.

V tomto seriálu budeme zanedbávat rozměry těles oproti rozměrům prostoru, tělesa nahradíme *hmotnými body*. Možná namítnete, že tato představa je vzdálená od reality, v mnoha případech je ale oprávněná, i když rozměry těles nelze zanedbat. Například tuhá tělesa[1], která neinteragují dotykem, můžeme nahradit hmotným bodem umístěným ve hmotném středu. Dále spojité prostředí měnící svůj tvar můžeme rozdělit na maličké části a ty nahradit hmotnými body. Ukazuje se, že nejvýhodnější je formulovat fyzikální principy a zákony pro vzájemné interakce právě hmotných bodů. Případný přechod od diskrétního modelu ke spojitému je už čistě záležitostí matematiky.

Ve všech kapitolách se budeme zabývat buď jedním hmotným bodem nebo konečnými počty hmotných bodů, jejichž pohyb v prostoru je určen přesně. Předmětem mechaniky je nalézt zákony pohybu těchto hmotných bodů. Prvním naším cílem bude matematicky popsat libovolný pohyb hmotného bodu. Tím se zabývá *kinematika*. Zákony těchto pohybů stanovuje *dynamika*.

O tomto textu

Než se pustíme do fyziky, pokusíme se popsat, co lze očekávat od tohoto seriálu. V žádném případě ho nelze zaměňovat s učebnicí[2], tu ostatně budete pravděpodobně při jeho čtení často potřebovat. Cílem je popsat některé části této jinak velmi složité a obsáhlé disciplíny, a to pokud možno pro středoškoláka srozumitelnou a zajímavou formou. Při výkladu je potřeba znalost pojmu derivace a případně integrálu. Pokud vám to nic neříká, zkuste zalistovat v učebnicích matematiky pro vyšší ročníky nebo se zeptejte starších spolužáků či vašeho učitele.

Při čtení seriálu mějte neustále na paměti, že je tu právě pro vás. Nemůžeme samozřejmě vyhovět všem, někdo se z něj příliš nového nedozví[3] a jinému se bude možná zdát příliš těžký. Chceme se proto pohybovat na takové úrovni, která bude vyhovovat co nejvíce čtenářům. To se nám ovšem nepodaří bez vašich ohlasů.

Na adresu `serial@fykos.mff.cuni.cz` posílejte veškeré dotazy a připomínky, ať už půjde o upozornění na chybu, doplňující dotaz k výkladu či přání na obsah dalších dílů. V žádném případě

---

[1] Body tuhého tělesa nemění vzájemnou vzdálenost, tuhé těleso tedy nemění tvar.

[2] Např. J. Horský, J. Novotný, M. Štefaník: *Mechanika ve fyzice*, Academia, Praha 2001 nebo B. Vybíral: *Základy teoretické mechaniky, 1. až 3. díl*, Gaudeamus, Hradec Králové 1992, 1999.

[3] Celý první díl je převážně o zavedení základních pojmů. Kdo se při jeho čtení bude nudit, může nám místo toho poslat náměty na další díly.

se nebojte napsat, že jste něco nepochopili. Bude-li vás více, pokusíme se k tématu podrobněji vrátit i v dalších dílech. Každý ohlas nám pomůže zlepšit kvalitu seriálu.

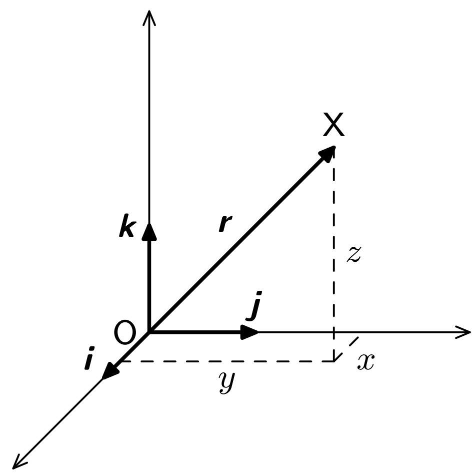
Kapitola 1: Newtonovská mechanika

Kinematika hmotného bodu v kartézské soustavě

Již jsme se zmínili, že kinematika popisuje libovolný pohyb hmotného bodu. Tento pohyb je spojitou řadou událostí v třírozměrném prostoru a čase. Pohyb vztahujeme ke *vztažné soustavě*, což je množina (myšlených) bodů, které jsou v prostoru rozloženy nekonečně hustě (v libovolně malém objemu je nekonečně mnoho těchto bodů). Vztažná soustava nemusí být nutně jen množina myšlených bodů, většinou je vhodné ji ztotožnit s konkrétním tělesem. Nejčastěji uvažujeme vztažné soustavy spojené se Zemí. Pokud se vzdálenosti bodů vztažné soustavy nemění, nazýváme ji *tuhá*. Soustava spojená se Zemí je příkladem tuhé vztažné soustavy.

Náš prostor bude mít *euklidovskou geometrii*, tu kterou znáte již od základní školy. Vzdálenosti bodů budeme měřit v této geometrii v jednom časovém okamžiku. Na měření času budeme používat hodiny, které jdou rovnoměrně a stejně rychle bez vztahu k jakémukoli tělesu, tj. ve všech vztažných soustavách odměřují stejný čas. Tomuto předpokladu říkáme *absolutní čas*. Einsteinova teorie relativity ukázala, že tento předpoklad není oprávněný, platí ovšem dostatečně přesně, pokud se pohybujeme malými rychlostmi vůči rychlosti světla.

Abychom mohli ve vztažné soustavě měřit vzdálenosti a určovat polohu bodů, musíme si v ní nějakým způsobem zavést souřadnice. Souřadnice jednoznačně určují polohu bodu v prostoru, různé body musí mít různou souřadnici. V třírozměrném prostoru potřebujeme pro určení polohy každého hmotného bodu tři čísla, souřadnice je tedy trojice čísel. Za souřadnicovou soustavu budeme volit *kartézskou*. Je to soustava pravoúhlých souřadnic, určená počátkem O a systémem tří ortonormálních (jednotkové velikosti, navzájem kolmých) vektorů $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{k}$. Tento systém volíme pravotočivý – pokud $\boldsymbol{i}$ vystupuje z odtaženého palce pravé ruky a $\boldsymbol{j}$ vystupuje z prstů, potom $\boldsymbol{k}$ vychází z dlaně pravé ruky. Poloha hmotného bodu X je určena polohovým vektorem $\boldsymbol{r}$, představujícím orientovanou úsečku z bodu O do bodu X. Tento vektor můžeme vyjádřit jako



Obr. 5

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}.$$

Čísla (x, y, z) jsou souřadnicí hmotného bodu. Pro vzdálenost dvou hmotných bodů v euklidovské geometrii platí

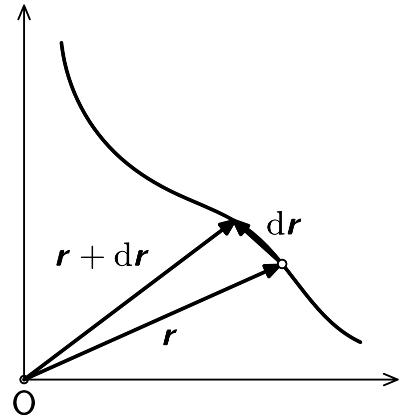
$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2.$$

Složkami libovolného vektoru $\boldsymbol{A}$ nazýváme takovou trojici čísel (A_x, A_y, A_z), pro kterou platí

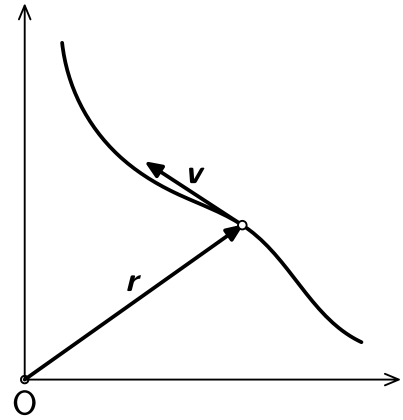
$$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}.$$

Budeme se zabývat problémy, kdy bude polohový vektor obecně spojitou funkcí času $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$. Množina koncových bodů $\boldsymbol{r}(t)$ je *trajektorie* hmotného bodu. Délce trajektorie od pevně zvoleného bodu říkáme *dráha*.

Pro formulaci pohybových zákonů si nevystačíme se samotným polohovým vektor. Je třeba zavést jeho první a druhou časovou derivaci[4].



Obr. 6



Obr. 7

Rychlostí hmotného bodu nazveme vektor

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{r}},$$

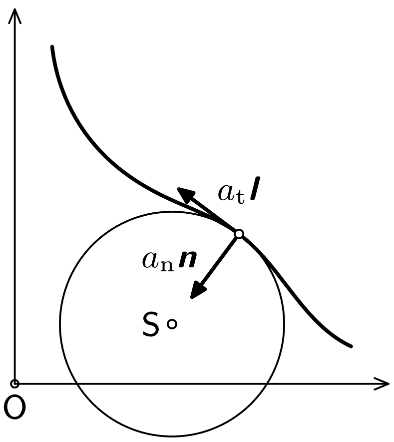
který má směr tečny trajektorie. *Zrychlením* hmotného bodu nazveme vektor

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{\boldsymbol{r}} = \dot{\boldsymbol{v}}.$$

Tečkou značíme první derivaci podle času, dvěma tečkami druhou derivaci. Pro složky rychlosti a zrychlení platí

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z},$$
$$a_x = \ddot{x} = \dot{v}_x, \quad a_y = \ddot{y} = \dot{v}_y, \quad a_z = \ddot{z} = \dot{v}_z.$$

Pro každý bod trajektorie můžeme nakreslit *oskulační kružnici*. Tato kružnice leží v rovině určené vektory rychlosti a zrychlení, dotýká se trajektorie v daném bodě, ve kterém má navíc stejnou křivost. Pro každý bod trajektorie rovněž definujeme jednotkový vektor $\boldsymbol{l}$, který má tečný směr na trajektorii, a $\boldsymbol{n}$, který má směr do středu oskulační kružnice.



Obr. 8

Užitečné je rozložit vektor zrychlení na tečnou a normálovou složku. Rychlost můžeme napsat jako

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{l},$$

derivováním tohoto vztahu získáme

$$\boldsymbol{a} = \ddot{s}\boldsymbol{l} + \dot{s}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\mathrm{d}t}. \tag{1}$$

Nyní využijeme Frenetovy formule

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\mathrm{d}s} = \frac{\boldsymbol{n}}{R},$$

[4] Vektor derivujeme tak, že zderivujeme každou jeho složku.

kde R je poloměr křivosti trajektorie[5]. Vztah (1) dostává tvar

$$\boldsymbol{a} = \ddot{s}\boldsymbol{l} + \frac{(\dot{s})^2}{R}\boldsymbol{n} + 0\boldsymbol{b}.$$

Vektor $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{l} \times \boldsymbol{n}$ značí binormálu. Tečná, normálová a binormálová složka zrychlení je tedy

$$a_\mathrm{t} = \dot{v}, \quad a_\mathrm{n} = \frac{v^2}{R}, \quad a_\mathrm{b} = 0.$$

Inerciální vztažný systém

Nyní již dokážeme popsat pohyb hmotného bodu. Zákony mechaniky budeme formulovat pro tuhé vztažné soustavy s kartézskými souřadnicemi, které jsme si popsali v minulé kapitole, protože v těchto systémech jsou zákony nejjednodušší. Otázkou je, zda jsou tyto zákony ve všech vztažných systémech totožné, nebo zda existují nějaké privilegované systémy. Newton tento problém řešil tak, že zavedl *absolutní prostor* a fyzikální zákony formuloval pro vztažný systém, který je vůči absolutnímu prostoru v klidu. Tento vztažný systém Newton charakterizoval tím, že *volný hmotný bod* se vůči němu pohybuje bez zrychlení (rovnoměrně přímočaře). Pokud tento vztažný systém nazveme inerciální, získáme známou formulaci **1. Newtonova zákona:**

„Volný hmotný bod se v inerciální vztažné soustavě pohybuje bez zrychlení."

Zbývá dodat, co je volný hmotný bod. Rozumíme jím hmotný bod, na nějž nepůsobí žádné pravé síly (tj. ty, které pocházejí ze vzájemné interakce hmotných bodů), nebo jejichž výslednice je nulová.

Na přelomu 19. a 20. století se po marných pokusech zjistit rychlost Země vůči absolutnímu prostoru dospělo k tomu, že žádný absolutní prostor neexistuje. Což nakonec vedlo k zformulování „speciální teorie relativity", jejímž důsledkem je i neexistence absolutního času.

Ač žádný absolutní prostor neexistuje, umíme najít inerciální vztažné systémy. Například soustavu spojenou se stálicemi nebo se Zemí můžeme považovat za inerciální. Na Zemi působí zdánlivé síly (příčinou je rotace Země), které musíme vyrovnávat, aby se hmotný bod pohyboval bez zrychlení. Potom se tedy nejedná o volný hmotný bod. Pokud se ale na odstředivou sílu budeme dívat jako na pravou, stejně jako na gravitační (jejich sečtením dostaneme sílu tíhovou), bude soustava spojená se Zemí inerciální (alespoň pokud nebudeme provádět velice přesná měření).

Poslední problém, nad kterým se zamyslíme, je jednoznačnost inerciální soustavy. Odpověď je jednoduchá. Mějme nějakou inerciální vztažnou soustavu S, vůči které se všechny volné hmotné body pohybují bez zrychlení. Nyní uvažme soustavu S', která se vůči S pohybuje konstatní rychlostí $\boldsymbol{u}$. Ta bude zřejmě také inerciální. Pokud počátky soustav v čase $t = 0$ splývají, dostáváme následující vztah mezi polohovými vektory v obou soustavách

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{u}t,$$

pokud k tomuto přidáme vyjadření absolutnosti času

$$t = t',$$

máme *Galileiho transformaci* mezi soustavami S a S'.

---

5) R má také význam poloměru oskulační kružnice.

Úloha I . S ... *kinematika hmotného bodu*

a) Poloha hmotného bodu v závislosti na čase v kartézské souřadnicové soustavě je popsána polohovým vektorem

$$\boldsymbol{r}(t) = (R\cos\omega t, R\sin\omega t, d).$$

Určete, jak závisí na čase vektory $\boldsymbol{v}(t)$ a $\boldsymbol{a}(t)$. Vypočítejte také tečnou, normálovou a binormálovou složku zrychlení.

b) Kolo poloměru R se valí bez prokluzování po přímé dráze rychlostí v. S kolem je pevně spojen bod ve vzdálenosti r od středu. Určete jeho pohyb a rychlost jako funkce času v soustavě spojené se Zemí. Může být jeho rychlost v určitém okamžiku nulová?