Milí řešitelé!

Se zadáním čtvrté série FYKOSu si vás dovolujeme pozvat na Jeden den s fyzikou, což je akce pořádaná naší fakultou 3. února pro všechny středoškoláky i jejich učitele. Na této akci si budete moci prohlédnout mnoho fyzikálních pracovišť fakulty v areálu Karlova, exkurze připravují odborní pracovníci. Uvidíte také spoustu zajímavých fyzikálních experimentů. Připraveny jsou rovněž populární přednášky z mnoha oborů fyziky. Podrobnější informace najdete na `www.mff.cuni.cz/verejnost/jdf/`.

Na řešení čtvrté série máte opět více než měsíc času. Ať se vám úlohy líbí!

Přejeme vám mnoho úspěchů v roce 2005.

Honza Prachař

Zadání IV. série

Termín odeslání: 21. února 2005

Úloha IV . 1 ... *atomový útok v roce 1985*

Sovětským generálům došla trpělivost. Už se nemohli dívat na provokace ze strany amerických imperialistů a stiskli červený knoflík na odpálení atomové bomby. Hned nato do řídicí místnosti přiběhl mladý poručík, který byl zodpovědný za propočítání dráhy letu, že si prý při výpočtech trochu přihnul ze stakanu vodky a důsledkem toho místo na New York míří raketa na spřátelenou Kubu.

Naštěstí je ale po ruce náhradní bomba, kterou by se ta původní dala sestřelit, čímž by se zamezilo rozkolu v socialistickém táboře. Původní raketa byla vystřelena rychlostí v pod úhlem α. Jak mají sovětští experti nastavit úhel odpálení β druhé rakety, aby tu první zasáhli, když mezi oběma odpaly je časová prodleva T?

Diskutujte, kdy se dá mír mezi spřátelenými zeměmi zachránit a kdy už ne. Odpor vzduchu zanedbejte. Všichni samozřejmě víte, že Země je placatá a její gravitační pole je homogenní.

Úloha IV . 2 ... *za nití*

Váleček o malém poloměru r a hmotnosti m se kutálí z nakloněné roviny a na jejím konci přejde hladce do vodorovného pohybu po podložce. Přitom na sebe namotává nit o délkové hustotě ϱ. V jaké vzdálenosti od konce nakloněné roviny se váleček zastaví? Dále znáte výšku nakloněné roviny h a její sklon α. Tření zanedbávejte.

Úloha IV . 3 ... *limuzína v garáži*

Jeden z vítězů Superstar narazil na problém. Jeho nová limuzína je příliš dlouhá na to, aby se vešla do jeho staré garáže. Jeho kamarád, který studuje fyziku, si však věděl rady. Jelikož dobře zná práci Alberta Einsteina, uvědomil si, že pokud se limuzína rozjede dostatečně rychle, zkrátí se její délka z pohledu stojícího pozorovatele natolik, že se již do garáže vejde.

Na začátku a na konci garáže jsou umístěny padací dveře, které se spustí ve chvíli, kdy celá limuzína bude uvnitř. Z pohledu superstar v limuzíně se však naopak v důsledku kontrakce délek zkrátí garáž a vůz se do ní určitě nevejde. Rozhodněte, zda je možné tímto způsobem limuzínu do této garáže zaparkovat.

Úloha IV . 4 . . . *Mössbauerův jev*

Frekvence fotonu vyzářeného jádrem radioaktivního železa není vždy stejná, ale při rozpadech různých jader se nepatrně liší (to platí i pro jiná jádra). Pro jednoduchost předpokládejte, že hodnota energie fotonu v klidové soustavě jádra železa leží náhodně v intervalu $(E_0 - \Delta E, E_0 + \Delta E)$, kde $E_0 = 14{,}4\,\mathrm{keV}$ (keV = kiloelektronvolt), $\Delta E \approx 10^{-8}\,\mathrm{eV}$ ($1\,\mathrm{eV} = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$).

a) Vyzáří-li volný nehybný atom železa foton, musí mít tento atom podle zákona zachování hybnosti opačnou hybnost než vyzářený foton. Vypočítejte kinetickou energii takového atomu a porovnejte ji s veličinou ΔE.

b) Takzvaný Mössbauerův jev spočívá v tom, že je-li foton vyzářen atomem železa vázaným v krystalu, může se hybnost „zpětného rázu“ předat celému krystalu. Vypočítejte kinetickou energii krystalu (posun energie fotonu) v tomto případě za předpokladu, že krystal je složen z řádově 10^{23} atomů.

Stejně jako emise fotonu může probíhat i jeho absorpce. Foton však může být absorbován jen tehdy, když jeho energie v klidové soustavě jádra leží v intervalu $(E_0 - \Delta E, E_0 + \Delta E)$.

c) Rozhodněte, zda může nehybný atom železa absorbovat foton vyzářený jiným nehybným atomem.

d) Vypočítejte, jak rychle se vůči sobě musí pohybovat dva kusy železa, aby už první kus nemohl kvůli Dopplerovu jevu absorbovat fotony vyzářené druhým kusem. Dopplerovým jevem myslíme to, že frekvence záření f, kterou vyzařuje zdroj přibližující se rychlostí v, se v naší soustavě změní na

$$f' = \left(1 + \frac{v}{c}\right) f\,.$$

Předpokládejte, že při emisi i absorpci se uplatňuje výše zmíněný Mössbauerův jev.

Potřebné konstanty nalezněte v tabulkách.

Úloha IV . P . . . *rezonující sklenička*

Kroužením mokrým prstem po hraně broušené skleničky (například na víno) lze vyloudit poměrně intenzivní zvuk. Pokud se do skleničky nalije voda, pak frekvence vyluzovaného tónu klesá se vzrůstající výškou hladiny. Sami si to vyzkoušejte a pokuste se tento jev vysvětlit.

Úloha IV . E . . . *čaj po večeři*

Organizátoři FYKOSu popíjeli v menze po večeři výborný čaj. Protože jsou to zvídaví lidé, zamysleli se někteří z nich nad procesem chladnutí čaje. Předmětem sporu bylo, do jaké míry přispívají k chladnutí čaje procesy vypařování, vedení tepla a vyzařování. Pokuste se stejný problém řešit experimentálně.

Řešení II. série

Úloha II . 1 ... Mojžíšův zázrak *(4 body; průměr 3,60; řešilo 75 studentů)*

Mojžíš přistoupil k Rudému moři zvolav: „Rozevři se mořská hladino a nech národ vyvolených projít suchou nohou do zemi zaslíbené.“ Poté vstoupil do mořských vln a ty se rozestoupily. Určete, jak velkou silou byl obdařen Mojžíš, aby mohl převést Židy přes Rudé moře. Předpokládejte, že moře je široké 1 km a hluboké 20 m.

Vymyslel Jarda Trnka při čtení Bible.

> *Hospodin řekl Mojžíšovi: „Proč ke mně úpíš? Pobídni Izraelce, ať táhnou dál. Ty pak pozvedni svou hůl, vztáhni ruku nad moře a rozpoltíš je, a tak Izraelci půjdou prostředkem po suchu.“*

Aby mohl Mojžíš vyvést svůj lid z egyptského otroctví, musí jednak rozevřít hladinu Rudého moře a poté ji také udržet. Tím prvním se zabývat nebudeme, předpokládejme, že to provedl velmi rychle a bude nás tudíž zajímat pouze statický případ. Aby se hladina nad nebohými Židy neuzavřela, musí Mojžíš udržet vodní stěny, tj. vyrovnat hydrostatický tlak. Ten má v hloubce x velikost $p = \varrho g x$. Síla, kterou je nutné působit na malou část stěny v hloubce x, je

$$\mathrm{d}F = p\,\mathrm{d}S = \varrho g x l\,\mathrm{d}x\,,$$

kde l je šířka moře. Po integraci dostaneme

$$F = \varrho g l \int_0^h x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\varrho g l h^2\,,$$

kde h je hloubka moře. Protože Mojžíš musí udržet obě vodní stěny, má celková síla velikost

$$F_{\text{celk}} = 2F = \varrho g l h^2\,.$$

Pokud nechceme či neumíme integrovat, můžeme říci, že průměrný hydrostatický tlak je $\overline{p} = h\varrho g/2$, a dosadit do

$$F = \overline{p}S = \tfrac{1}{2}h\varrho g\,hl = \tfrac{1}{2}\varrho g l h^2 \quad\Rightarrow\quad F_{\text{celk}} = 2F = \varrho g l h^2\,.$$

Číselně vychází asi $F_{\text{celk}} = 4\,\mathrm{GN}$. To odpovídá tíze 5 letadlových lodí USS Enterprise či 10 000 tanků T-34.

Tomáš Bednárik v tom vidí Mojžíšovy svaly, naopak *Standa Vosolsobě* to připisuje duchovní síle, která je nezměřitelná. *Jakub Benda* a *Petr Morávek* se pak domnívají, že Mojžíš vlastně sám nic nevykonal, protože jeho ruce vedl Bůh. *Hanka Vítová* se též zabývala otázkou, kolik místa zabere jeden Žid, čímž předznamenala jiné temné období národa Davidova.

Jarda Trnka
jarda@fykos.mff.cuni.cz

Úloha II . 2 ... *kolik drátů na sloupech?* *(4 body; průměr 3,32; řešilo 47 studentů)*

Kolikafázové napětí bychom museli používat, aby efektivní hodnota napětí fáze–zem byla stejná jako efektivní hodnota napětí mezi dvěma sousedními fázemi?

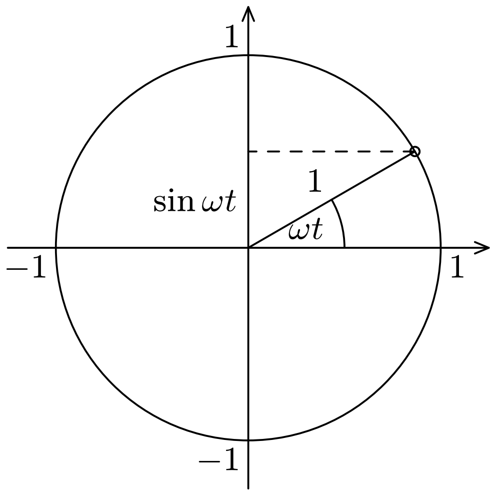
Úlohu navrhl Pavel Augustinský.

Úloha se dala řešit více způsoby, ukažme si nejprve jeden z těch složitějších.

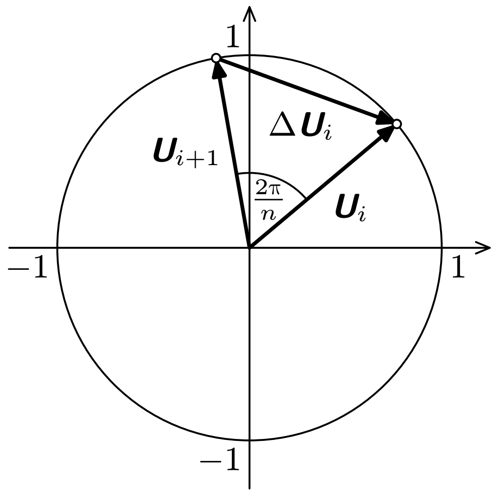
Napětí v síti má sinusový průběh, což můžeme zapsat jako

$$U(t) = U_0 \sin(\varphi + \omega t)\,, \quad \text{kde} \quad \omega = 2\pi f\,.$$

Funkci sinus však můžeme definovat na jednotkové kružnici (viz obr. 1), proto lze vztahy mezi napětími jednotlivých fází vyjádřit pomocí tzv. fázorového diagramu, což není v podstatě nic jiného než znázornění sinů, které určují časový průběh napětí, na kružnici.



Obr. 1



Obr. 2

Umístíme tedy na kružnici n fázorů tak, aby sousední fázory svíraly úhel $2\pi/n$. Amplituda, popřípadě efektivní hodnota napětí mezi sousedními fázemi je znázorněna fázorem odpovídajícím vektorovému rozdílu $\Delta\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_i - \boldsymbol{U}_{i+1}$. Z obrázku 2 plyne, že

$$\Delta U = 2U_0 \sin\frac{\pi}{n}.$$

Sdružené napětí (napětí mezi sousedními fázemi) je

$$U_\mathrm{s} = 2U_0 \sin\frac{\pi}{n}\,.$$

Fázové napětí (napětí fáze vzhledem k zemi) je

$$U_\mathrm{f} = U_0\,.$$

(Stále je řeč o amplitudách resp. efektivních hodnotách napětí.)

Chceme, aby se obě tato napětí rovnala $U_\mathrm{f} = U_\mathrm{s}$.

$$U_0 = 2U_0 \sin\frac{\pi}{n} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{n}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Z poslední rovnice dostáváme $n = 6$. Požadavek $n \in \mathbb{N}$ musí být splněn, jinak bychom mohli získat např. něco takového jako 6/5-fázové napětí, které sice splňuje rovnici, ale bohužel (nebo naštěstí) neexistuje.

Úloha se dala řešit i jednodušeji. Stačilo si uvědomit, že aby se příslušná napětí rovnala, musí fázory na obrázku výše tvořit rovnostranný trojúhelník. Z toho ale plyne, že fázový posun mezi $\boldsymbol{U}_i$ a $\boldsymbol{U}_{i+1}$ (odpovídající úhlu svíranému fázory) musí být 60° neboli $\pi/3$. Do kružnice se tedy vejde 6 fázorů, a proto musíme mít 6 fází. Drátů musí být samozřejmě o 1 víc, neboť potřebujeme ještě nulák.

Většinou jste dospěli ke správnému výsledku. Někteří z vás však zvolili takový postup, že zkoušeli porovnávat fázové a sdružené napětí pro počet fází dva a více, dokud se nezarazili u šesti. Za to jsem dávala o bod méně, protože takový postup vůbec nedával jistotu, že byla nalezena již všechna řešení, a navíc nebyl příliš elegantní.

Jana Ringelová
jana@fykos.mff.cuni.cz

Úloha II . 3 ... *vrtulník* *(4 body; průměr 1,32; řešilo 66 studentů)*

Aby se helikoptéra mohla vznášet, musí mít její motor výkon P. Jaký výkon P' musí mít helikoptéra, která je přesnou poloviční kopií původní helikoptéry, aby se také vznášela? Předpokládejte, že rotor má 100 % účinnost. *Úloha byla převzata z MFO v Kanadě.*

Jelikož menší vrtulník je poloviční kopií původního vrtulníku, zmenší se všechny jeho rozměry na polovinu. To znamená, že plocha rotoru bude čtvrtinová a objem osminový. Protože je kopie vyrobena ze stejného materiálu, je její hustota stejná jako hustota originálu a pro hmotnost platí

$$m' = \varrho V' = \varrho \frac{V}{8} = \frac{m}{8}\,.$$

Aby se vrtulník vznášel, musí motor vynakládat sílu, jejíž svislá složka vykompenzuje gravitační sílu. Menšímu vrtulníku tedy stačí vynaložit osminovou sílu ve srovnání s větším.

Otáčející se listy rotoru vrtulníku překonávají odpor vzduchu a mají takový tvar, aby vzduch odtlačovaly pod sebe. Tím mění hybnost vzduchu – působí tedy na vzduch silou. Vzduch bude podle zákona akce a reakce působit stejně velkou silou opačného směru na listy rotoru. Na úzký proužek listu $\mathrm{d}S$, který má vzdálenost r od středu vrtule, šířku $\mathrm{d}r$ a výšku a, tedy vzduch působí silou o velikosti

$$\mathrm{d}F = \tfrac{1}{2} C \,\mathrm{d}S \varrho v^2 = \tfrac{1}{2} C \varrho \omega^2 r^2 a \,\mathrm{d}r\,, \tag{1}$$

kde ϱ je hustota vzduchu a ω úhlová rychlost otáčení vrtule. Celková síla působící na vrtuli je pak integrál z (1)

$$F = \tfrac{1}{6} C \varrho a \omega^2 R^3 \sim a\omega^2 R^3\,, \tag{2}$$

kde R je poloměr vrtule.

Jak jsme si řekli výše, svislá složka této síly působící na malý vrtulník, musí být osminová vzhledem k síle působící na velký vrtulník. Protože je úhel naklonění listů u obou rotorů stejný, znamená to, že i velikost této síly musí být osminová. Bohužel rovnost

$$F' = \tfrac{1}{8} F \tag{3}$$

neplatí. Jelikož jsou všechny parametry až na ω určeny poměrem zmenšení, vidíme, že menší vrtulník bude muset mít jinou úhlovou rychlost otáčení vrtule. Tu nyní vypočteme dosazením (2) do (3) (za čárkované veličiny rovnou dosadíme jejich vyjádření nečárkovanými)

$$\frac{a}{2}\,\omega'^2 \left(\frac{R}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\,a\omega^2 R^3 \quad \Rightarrow \quad \omega' = \omega\sqrt{2}\,.$$

Menší vrtulník se udrží ve vzduchu, pouze když bude $\sqrt{2}$krát rychleji otáčet vrtulí. Nyní, když známe potřebnou rychlost otáčení rotoru, můžeme spočíst výkon rotorů obou vrtulníků a porovnat je.

$$\mathrm{d}P = \mathrm{d}Fv = \tfrac{1}{2}C\,\mathrm{d}S\varrho v^3 \sim \omega^3 r^3 a\,\mathrm{d}r \quad \Rightarrow \quad P \sim a\omega^3 R^4\,,$$

pro poměr dostáváme

$$\frac{P'}{P} = \frac{a/2 \cdot 2\sqrt{2}\,\omega^3 \cdot (R/2)^4}{a\omega^3 R^4} = \frac{\sqrt{2}}{16} = 2^{-7/2}\,.$$

Vidíme, že menšímu vrtulníku stačí ke vznášení výkon, který je $2^{-7/2}$krát menší než výkon většího vrtulníku.

Velmi častou chybou řešitelů bylo, že u poloviční kopie předpokládali poloviční hmotnost, objem i plochu vrtule. Často také porovnávali jen tíhovou sílu působící na vrtulníky, ale zapomněli uvážit závislost vztlaku na ploše či rychlosti rotoru. Někteří dokonce zanedbávali odpor vzduchu, který je jedním z nejdůležitějších faktorů.

Petra Suková
pet@fykos.mff.cuni.cz

Úloha II . 4 ... zoufalí trosečníci *(4 body; průměr 1,32; řešilo 31 studentů)*

Trosečníci na severním pólu si chtějí zpříjemnit chvíli před blížící se smrtí posledním šálkem kávy. Poraďte jim, jak si mají ohřát vodu, aby se jí dostalo na co nejvíce z nich. Se svými skromnými technickými prostředky mohou ohřev realizovat následujícími způsoby:

a) *Akumulátor o vnitřním odporu $2R$ přímo připojí k topné spirále o odporu R.*
b) *Tentýž akumulátor připojí do série s topnou spirálou a kondenzátorem. Pokaždé, když se kondenzátor nabije, jej z obvodu vytáhnou a připojí obráceně.*
c) *Tímtéž akumulátorem budou střídavě nabíjet kondenzátor a vybíjet ho přes topnou spirálu.*

Vymyslel Matouš Ringel, když si na výletě vařil kávu.

Naši trosečníci si na severní pól dovezli vskutku nadstandardní vybavení – mají akumulátor, kondenzátor a topnou spirálu. Jako nejjednodušší způsob, jak ohřát vodu, se jeví využít pouze akumulátor a topnou spirálu. Ale bude tento způsob nejúčinnější? Účinnosti ve třech možných zapojeních si rozeberme podrobně. Počítáme přitom teoretické účinnosti, tj. skutečné účinnosti zahrnující ztráty na jednotlivých spotřebičích jsou ještě menší.

a) Energie zdroje se spotřebuje na zahřátí zdroje o odporu $2R$ a topné spirály o odporu R. Akumulátor a spirála jsou zapojeny do série. Oběma tak prochází stejný proud a toto zapojení funguje jako napěťový dělič. Napětí se rozdělí v poměru odporů. Na akumulátoru bude napětí $2U/3$ a na spirále $U/3$. Výkon se rozdělí ve stejném poměru. U tohoto zapojení jsou tedy trosečníci schopni využít $1/3$ možného výkonu.
b) Projdeme si společně jeden cyklus od okamžiku, kdy je na kondenzátoru nulové napětí, do okamžiku, kdy je opět téměř vybitý. Po připojení napájení bude obvodem procházet proud $I = U/3R$ až do chvíle, než se kondenzátor nabije na napětí U. Zdroj vykonal práci CU^2. Z toho energii $CU^2/2$ získal kondenzátor a zbylá $CU^2/2$ se rozdělila v poměru 2:1 mezi akumulátor a topnou spirálu. Na spirálu tedy připadá $CU^2/6$.

   Poté kondenzátor z obvodu vytáhneme a připojíme obráceně. Nyní kondenzátor podporuje zdroj ve vykonání práce CU^2. V obvodu je celková energie $3CU^2/2$, protože do celkové energie musíme započítat i energii nabitého kondenzátoru $CU^2/2$. Po skončení cyklu je kondenzátor vybitý, tj. jeho energie je nulová. Všechna energie se podle zákona zachování energie musela rozdělit mezi akumulátor a spirálu. Obdobně jako v a) v poměru 2:1. V této části cyklu získala topná spirála energii $CU^2/2$.

Celková energetická bilance nám říká, že během jednoho cyklu zdroj dodá energii $2CU^2$ a spirála přijme $2CU^2/3$. Výkon je tedy stejný jako v části a), a to 1/3 celkového výkonu. Samozřejmě bychom měli vzít v úvahu, že při tomto zapojení budou ztráty větší než při zapojení a).

c) Nejdříve zapojíme do obvodu pouze akumulátor a kondenzátor. Z energie odebrané z akumulátoru získá kondenzátor energii $CU^2/2$. Po nabití kondenzátor odpojíme a necháme jej vybíjet přes topnou spirálu. Té předá kondenzátor svou energii. Tento způsob je nejúčinnější, protože se při něm na spirále 1/2 možné energie přemění na teplo.

Je zajímavé, že pouze 5 řešitelů napadlo přemýšlet nad účinnostmi jednotlivých způsobů a neodbýt řešení úlohy povídáním, jaká je na severním pólu zima a že nejvýhodnější bude použít způsob a), který vypadá nejjednodušeji. Mnozí řešitelé se zaměřili na určení proudů protékajících obvodem v jednotlivých zapojeních, ale to nevedlo tak přímočaře k řešení jako propočítání účinností. Výsledkem je celkově nízký počet bodů za tuto úlohu.

Jana Hrudíková
hrudikoj@seznam.cz

Úloha II . P ... *nečekaná překážka* *(5 bodů; průměr 1,63; řešilo 51 studentů)*

Řidič automobilu jedoucí rychlostí v náhle spatří, že jeho vůz směřuje doprostřed betonové zdi šířky $2d$ ve vzdálenosti l. Součinitel klidového tření mezi pneumatikami a vozovkou je f. Poraďte řidiči, co má dělat, aby se vyhnul srážce se zdí. Rozhodněte, pro jakou velikost rychlosti je to ještě možné. *Napadlo Pavla Augustinského při cestě autem.*

Podobně jako u minulých úloh (např. ošklivé kačátko) šlo v této úloze o nalezení nějaké „optimální“ trajektorie. V praxi bychom často rádi znali skutečně optimální řešení, ale mnohdy se spokojíme i s řešením, které je pouze lepší než ostatní. To je základem rozmanitých přibližných metod, se kterými se určitě setkáte coby fyzici či inženýři. Hledání nejlepšího řešení je obecně pracné, musíme si vždy rozvážit, zda nám zlepšení výsledku stojí za vynaloženou námahu.

Takto filozoficky začínám proto, poněvadž nikdo z vás nevyřešil tuto úlohu správně ve smyslu nalezení správné trajektorie a důkazu, že je opravdu správná. Všichni jste se ale pokusili vyzkoušet různé možnosti, a pak z nich vybrat nejvhodnější. Držíce se úvodu, počínali jste si v podstatě správně, i když ne zcela, čemuž odpovídá všeobecně nižší počet bodů. Každopádně si ale ukažme, jak vypadá nejlepší řešení.

Podívejme se nejprve, kterak se může auto pohybovat. Ze zadání víme, že koeficient tření mezi pneumatikami a zemí je roven f. Proto největší přípustné zrychlení/zpomalení získáme z rovnice $ma = mgf$, tj.

$$a = fg\,.$$

Auto může brzdit, zrychlovat či zatáčet libovolně, ovšem nejvýše s tímto zrychlením.

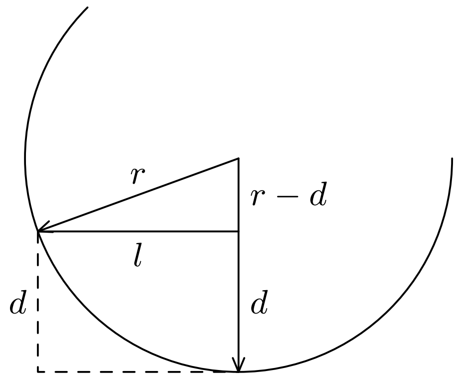
Dále je jasné, že stihne-li auto zabrzdit dřív, než narazí do zdi, může objet libovolnou zeď. To nastane, platí-li $l > vt - at^2/2$, kde čas t odpovídá úplnému zabrzdění, čili $v = at$. Odtud $l > v^2/2a$ znamená pro řidiče jistou záchranu.

Abychom potěšili ty, kteří řešili i pohyb po kružnici, rozebereme jej také. Zřejmě nejmenší poloměr takové kružnice se dostane z maximální velikosti třecí síly, která je zároveň silou dostředivou. Odtud

$$\frac{v^2}{r} = fg\,.$$

Největší přípustný poloměr kružnice odpovídá kružnici, která se zdi právě dotkne. Z obrázku a Pythagorovy věty vidíme vztah $r^2 = l^2 + (r - d)^2$, tedy

$$r = \frac{l^2 + d^2}{2d}\,.$$



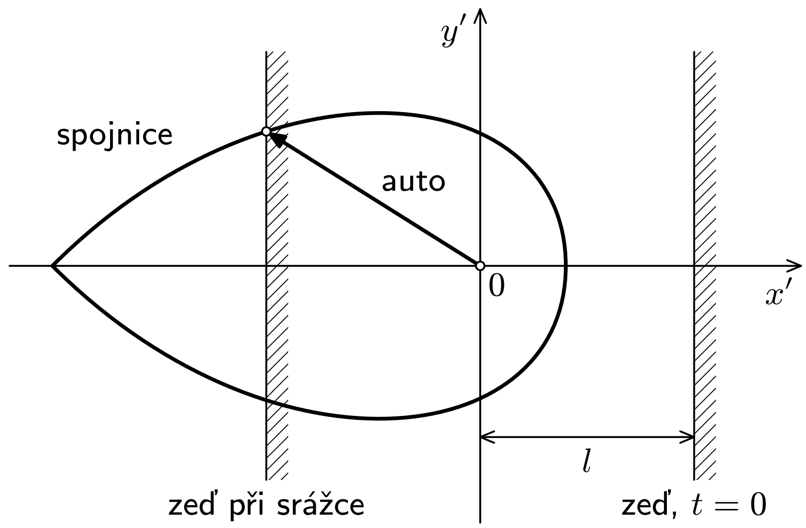
Obr. 3

Po kružnici má smysl jet jen tehdy, když rychlost, odpovídající tomuto poloměru, je větší než maximální rychlost, kdy je auto ještě schopno zabrzdit. Poněvadž poloměr je při stejné rychlosti roven dvojnásobku brzdné dráhy, odpovídá to podmínce $r > 2l$. Tímto získáváme kvadratickou nerovnici

$$\left(\frac{l}{d}\right)^2 - 4\,\frac{l}{d} + 1 > 0\,,$$

která je splněna pro $l/d > 2 + \sqrt{3}$ a $l/d < 2 - \sqrt{3}$. Zde si však musíme uvědomit, že druhé řešení jest irelevantní, což většina z vás, kteří jste se dostali až sem, neudělala. Pak totiž pro šířku zdi platí $d > r$, tedy kružnice kraj zdi protne až na „zpáteční cestě"; předtím už jednou zeď protla.

Nyní prozkoumáme, jaká je nejlepší možná strategie. Použijeme trik motivovaný touto úvahou. V souřadnicové soustavě spojené se zemí se nám pohyb auta komplikuje tím, že v ní má auto určitou počáteční rychlost, přičemž není geometricky jasné, jak přesně k pohybu přispělo zrychlování a jak původní rychlost. Trik spočívá v sledování pohybu ze souřadnicové soustavy, kde je auto na počátku v klidu. V této soustavě je situace jednodušší, například rovnoměrnému zrychlení v jednom směru odpovídá přímka, což je příjemné. Zeď se tam pohybuje rovnoměrně směrem k autu. Nechť se zeď pohybuje doleva, na začátku měla x-ovou souřadnici rovnu l a v čase t bude tato souřadnice rovna $l - vt$. Předpokládejme, že zeď je velmi velká (tedy že určitě nejde objet).



Obr. 4

Zkoumejme pohyby auta s konstantním zrychlením v jednom směru, tj. po přímkách, jak už bylo řečeno. Když se auto po nějaké přímce pohybuje, někde se s tou velkou zdí srazí. V naší rovině si tento bod označme tečkou. Když budeme měnit směr přímky, budeme dostávat různé tečky, jejichž spojením vznikne uzavřená spojitá křivka („kapka"). Spojitost plyne z očekávání, že když malinko změníme směr, posune se příslušný průsečík taky o malinko (bez skoků). Kdybychom přímku otočili o 360°, vrátíme se do původního průsečíku, což představuje uzavřenost křivky tvořené průsečíky.

Úlohu máme vyřešenou, když si uvědomíme, že autíčko nemůže bez srážky se zdí protnout tuto křivku. Kdyby se totiž autíčko pohybovalo jinak než přímo, do příslušného bodu křivky se nutně dostane později, ale v tu dobu tam už byla zeď. Proč později? Přímka odpovídá veškerému úsilí vynaloženému na zrychlování v daném směru. Po obecné křivce se zrychlení vynakládá i do jiných směrů, takže na náš směr zbyde méně. Nyní nám bude zřejmé následující tvrzení. Největší zeď, kterou jde objet, odpovídá maximu průsečíkové křivky.

Shrňme nabyté poznatky: dokázali jsme si, že nejvýhodnější je zrychlovat s konstantním zrychlením v nějakém pevném směru a že tento směr odpovídá maximu té křivky. Nyní zbývá najít jeho polohu. To lze provést standardními metodami (anulováním derivace). Má to ovšem jeden drobný háček, a sice pro polohu maxima obdržíme rovnici 4. stupně, kterou sice jde vyřešit v uzavřeném tvaru (tj. pomocí odmocnin narozdíl od rovnic vyšších stupňů), ale dost složitě. Nicméně existuje i průchodnější postup.

Vrátíme se zpátky na zem, kde zeď stojí a auto brzdí. Teď jsme bohatší o informaci, jak máme jet, ještě však nevíme, kam máme jet. Za tím účelem musíme vysledovat, co v této soustavě představují přímky v předchozí soustavě. Už v prvním ročníku jste se dozvěděli o vrhu šikmém, kde zrychlení má konstantní směr dolů. Trajektorií je parabola se svislou osou. Analogicky v naší situaci bude trajektorií parabola s osou ve směru zrychlení. Když budeme měnit směr, budeme dostávat různé paraboly. Parametrická rovnice takové paraboly je

$$\begin{aligned} x &= vt - \tfrac{1}{2} a \cos\varphi\, t^2\,, \\ y &= \tfrac{1}{2} a \sin\varphi\, t^2\,. \end{aligned}$$

Nyní použijeme myšlenku hledání maxim pomocí derivací. Jak víte, extrému odpovídá nulová derivace. To ale znamená, že při malém posunutí od výchozího bodu se hodnota funkce v prvním přiblížení nezmění, neboť tečna grafu, jež jej aproximuje v okolí tohoto bodu, má nulový sklon. Tuto myšlenku použijeme následujícím způsobem. Nechť překážka stojí ve vzdálenosti x. Chceme najít parabolu, která je pro toto x nejvýše, přičemž různé paraboly dostáváme různou volbou úhlu φ – směru zrychlení. Máme-li takovou parabolu, pak při malé změně úhlu φ o $\mathrm{d}\varphi$ se podle úvahy výše výška paraboly v prvním přiblížení nesmí změnit. Můžeme změnu výšky explicitně spočítat a položit ji rovnou nule.

Malá potíž spočívá v tom, že aby zůstalo x pevné, musí se změnit čas. Nechť se úhel změní o $\mathrm{d}\varphi$ a čas, kdy má autíčko souřadnici x, z t na $t + \mathrm{d}t$. Nyní napíšeme rovnici, která vyjadřuje, že se x nezměnilo, tedy rovnici pro x-ovou složku změny paraboly. Platí

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x &= v(t + \mathrm{d}t) - \tfrac{1}{2} a(\cos\varphi + \mathrm{d}\cos\varphi)(t + \mathrm{d}t)^2 - vt + \tfrac{1}{2} a \cos\varphi\, t^2 = \\ &= (v - at\cos\varphi)\,\mathrm{d}t + \tfrac{1}{2} a \sin\varphi\, t^2\, \mathrm{d}\varphi\,, \end{aligned}$$

neboť $\mathrm{d}\cos\varphi = -\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$. Požadujeme $\mathrm{d}x = 0$, což nám dává vztah mezi $\mathrm{d}t$ a $\mathrm{d}\varphi$

$$\mathrm{d}t = \frac{\frac{1}{2} a \sin\varphi\, t^2}{at\cos\varphi - v}\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

Napíšeme rovnici pro změnu y, kam posléze dosadíme za $\mathrm{d}t$ z právě získaného vztahu

$$\mathrm{d}y = \tfrac{1}{2} a\,(\sin\varphi + \mathrm{d}\sin\varphi)\,(t + \mathrm{d}t)^2 - \tfrac{1}{2} a \sin\varphi t^2 = a\sin\varphi\, t\,\mathrm{d}t + \tfrac{1}{2} a\cos\varphi\, t^2\,\mathrm{d}\varphi\,,$$

neboť $\mathrm{d}\sin\varphi = \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi$. Podmínka maxima je $\mathrm{d}y = 0$, což po dosazení představuje rovnost

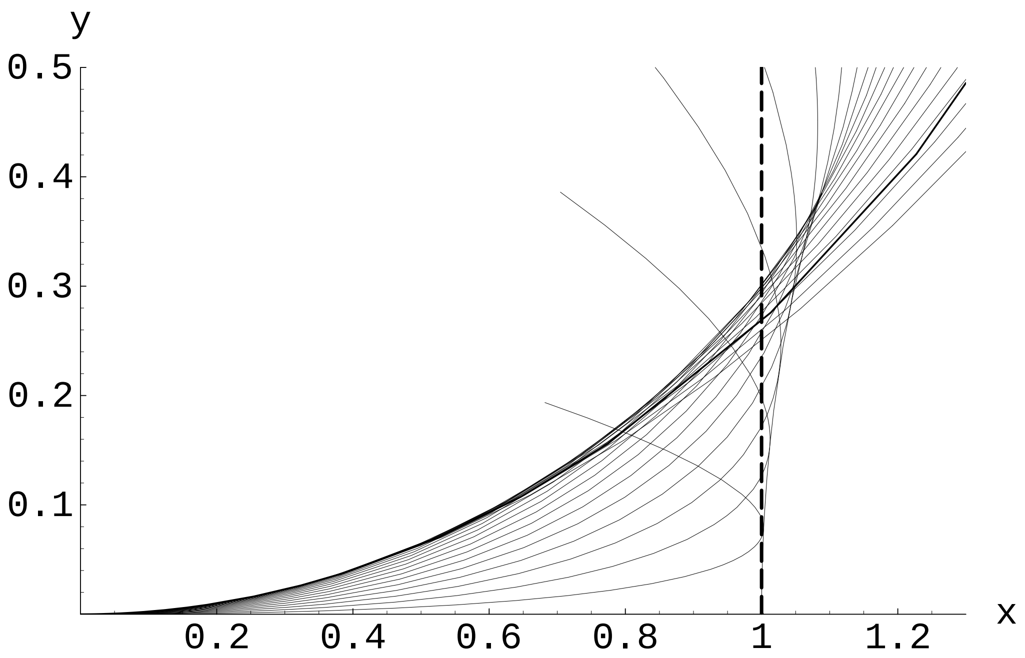
$$v\cos\varphi = at\,.$$

Všimněte si, že tato podmínka je ekvivalentní tvrzení, že nejvyšší bod je roven vrcholu nějaké paraboly, kde je rychlost kolmá na zrychlení.

Získali jsme možnost napsat parametrickou rovnici křivky, která je pro každé x stejně vysoká jako nejvyšší parabola (tzv. obalová křivka). Můžete ji vidět na obrázku 5 (silně vytažená křivka). Parametrickou rovnici této křivky získáme dosazením posledního vztahu do rovnic paraboly

$$x = \frac{v^2}{a}\cos\varphi - \frac{v^2}{2a}\cos^3\varphi\,,$$
$$y = \frac{v^2}{2a}\sin\varphi\cos^2\varphi\,.$$

Označíme-li $v^2/2a$ (což, jak víme, je brzdná dráha) jako p, pak vidíme, že pro danou překážku vše závisí pouze na tomto parametru a nikoliv na rychlosti a zrychlení odděleně.



Obr. 5

Je-li vzdálenost zdi od počátku l, pak, jde-li objet, musí platit $y > d$. Chceme najít maximální možný parametr p, pro který daná zeď jde objet. To odpovídá maximální možné počáteční rychlosti, případně minimálnímu možnému zrychlení. Naše křivka se bude při zvětšování p evidentně „přimačkávat“ k ose x. Při takovém pohybu někdy protne okraj zdi, a to odpovídá hledanému maximálnímu p. Zbývá jej najít z rovnice křivky, kde položíme $x = l$ a $y = d$. Podělíme-li rovnice, získáme

$$\frac{d}{l} = \frac{\sin\varphi\cos^2\varphi}{2\cos\varphi - \cos^3\varphi} = \frac{\mathrm{tg}\,\varphi}{1 + 2\,\mathrm{tg}^2\,\varphi}\,,$$

jak plyne z vyjádření $\mathrm{tg}\,\varphi = \sin\varphi/\cos\varphi$. Ekvivalentně $1/\cos^2\varphi = 1 + \mathrm{tg}^2\,\varphi$,

$$2\,\mathrm{tg}^2\,\varphi - \frac{l}{d}\,\mathrm{tg}\,\varphi + 1 = 0\,.$$

Má-li tato rovnice kladné řešení, jde zeď ještě objet. Bude tomu tak zřejmě pro

$$D = \frac{l^2}{d^2} - 8 \geq 0\,,$$

alespoň jeden kořen pak musí vyjít větší něž nula, neboť u $\operatorname{tg}\varphi$ stojí záporné číslo. Přicházíme k závěru, že danou překážku lze objet, když je poměr její pološířky ku vzdálenosti od autíčka menší než $1/\sqrt{8}$.

Podotýkám, že jsme požadovali $l < p$. Měli bychom tedy ověřit, platí-li právě odvozená podmínka, dostaneme doopravdy $p > l$. Za tím účelem přepíšeme rovnici pro l ve tvaru

$$\frac{l}{p} = \frac{l}{d} \frac{\operatorname{tg}\varphi}{(1 + \operatorname{tg}^2\varphi)^{3/2}}\,.$$

Levá, a tedy i pravá strana má být menší než 1. Dosadíme za $\operatorname{tg}\varphi$ z výše uvedené kvadratické rovnice, kde volíme znaménko + (znaménko − odpovídá protnutí sestupné části obalové křivky a nás nezajímá) a analyzujeme pravou stranu. Takto bychom, nejspíše numericky, zjistili, že musí platit $l/d > 2{,}844$, zatímco naše původní kritérium říká $l/d > \sqrt{8} \approx 2{,}828$.

Shrňme vše, co jsme vydedukovali. Nechť máme nějakou překážku v nějaké vzdálenosti. Objet ji, aniž bychom museli být schopni zastavit, lze pouze, pokud je splněna výše uvedená podmínka, respektive její zpřesněná varianta. Pak můžeme dopočítat maximální možný parametr p, tedy maximální možnou vstupní rychlost pro dané zrychlení anebo minimální potřebné zrychlení pro danou rychlost. V opačném případě se jednoznačně vyplatí jet přímo ke zdi a brzdit. Následky srážky totiž určuje hybnost ve směru kolmém na zeď, a tu v okamžiku srážky učiníme nejmenší, budeme-li v tomto směru brzdit.

Zde je již možné přestat s řešením. Splnili jsme to, co jsme si na začátku předsevzali; nemáme sice přesný vzoreček, který by nám pro danou překážku umožnil rozhodnout, jde-li objet, ale máme dobrý odhad a jsme případně schopni numericky ověřit, jestli se nemýlíme.

Matouš Ringel
matous@fykos.mff.cuni.cz

Úloha II . E ... *není hmotnost jako hmotnost* *(8 bodů; průměr 4,81; řešilo 31 studentů)*

Experimentálně ověřte rovnost setrvačné (té, která vystupuje ve druhém Newtonově pohybovém zákonu) a gravitační hmotnosti (té, která vystupuje v Newtonově gravitačním zákonu).

Vymyslel Jarda Trnka na přednášce z relativity.

Teorie

Před měřením si musíme uvědomit, kde gravitační a setrvačná hmotnost vystupují. Například u siloměru se tíhová síla přenáší na výchylku pružiny, takže měříme vlastně hmotnost setrvačnou. Samotná tíhová síla je také tvořena dvěma složkami – kromě gravitační síly na těleso působí rovněž odstředivá síla (Země se otáčí), určovaná hmotnost je tedy součtem gravitační a setrvačné hmotnosti. Orientačním výpočtem se ale můžeme přesvědčit, že setrvačná složka netvoří více než 0,3 % výsledné síly.

Gravitační hmotnost lze určit obyčejným vážením, musíme si však uvědomit, jak přesně použité váhy pracují. Další možností je volný pád, omezuje nás ovšem odpor vzduchu, který do měření vkládá velkou chybu. Setrvačnou hmotnost můžeme určit pomocí kyvadel nebo z dob kmitání těles na pružině. Ve druhém případě je však obtížné použít za výchozí údaj tuhost pružiny, ta byla pravděpodobně určena obdobným experimentem, lépe bylo provést druhé měření pro pružinu tvořenou dvěma stejnými pružinami. Poměr gravitační a setrvačné hmotnosti můžeme také určit z úhlu, o který se od svislého směru odchýlí rotující kulička na provázku. V tomto případě je vodorovná složka výslednice tvořena odstředivou silou (podílí se na ní setrvačná hmotnost) a svislá silou tíhovou, u které můžeme s velkou přesností předpokládat, že je tvořena gravitační hmotností.

S velkou přesností byl poměr gravitační a setrvačné hmotnosti určen pomocí Cavendishových vah. Na tyč zavěšenou na tenkém vlákně jsou připevněna dvě závaží, do jejichž blízkosti umístíme dvě těžké koule. Gravitační síla, kterou tyto koule na menší závaží působí, vyvolá kmitání tyče kolem rovnovážné polohy. Jeho periodu pak můžeme určit tím, že sledujeme odraz světelného paprsku od zrcátka připevněného k tyči.

V domácích podmínkách je pravděpodobně nejjednodušší provést měření doby kmitů matematického kyvadla, proto jsme si tento způsob vybrali také my.

Vzdálenost místa na povrchu Země od jejího středu určíme podle vzorce

$$R = R_{\mathrm{rov}} \sqrt{\frac{\cos^2\varphi + (R_{\mathrm{pol}}/R_{\mathrm{rov}})^4 \sin^2\varphi}{\cos^2\varphi + (R_{\mathrm{pol}}/R_{\mathrm{rov}})^2 \sin^2\varphi}}\,,$$

kde R_{rov} je rovníkový a R_{pol} poledníkový poloměr Země. Uvědomme si ale, že gravitační působení rotačního elipsoidu nemůžeme nahradit působením hmotného bodu v jeho středu. Chybu vzdálenosti R určené z předchozího vztahu proto odhadneme na 5 km, přičemž do ní zahrneme i tyto odlišnosti. Pro Prahu ($\varphi = 50°07'$) vychází

$$R = (6366 \pm 5)\,\mathrm{km}\,.$$

Tíhovou sílu působící na povrchu Země můžeme vyjádřit jako součet gravitační a odstředivé síly. Ve vztahu pro gravitační sílu vystupuje gravitační hmotnost μ a ve vztahu pro odstředivou sílu setrvačná hmotnost m. Výslednici dáme do rovnosti s dostředivou silou.

$$\frac{\varkappa \mu M_{\mathrm{Z}}}{R^2} - m\Omega^2 R\cos\varphi = m\omega^2 l\,,$$

kde l je délka kyvadla, ω úhlová frekvence kmitání kyvadla a Ω úhlová frekvence otáčení Země. Odtud pro poměr gravitační a setrvačné hmotnosti plyne

$$x = \frac{\mu}{m} = \frac{\Omega^2 R\cos\varphi + \omega^2 l}{\varkappa M_{\mathrm{Z}}/R^2} = \frac{4\pi^2 R^2}{\varkappa M_{\mathrm{Z}}} \left(\frac{R\cos\varphi}{T_{\mathrm{Z}}^2} + \frac{l}{T^2} \right)\,, \qquad (4)$$

kde T_{Z} je doba otočení Země a T perioda matematického kyvadla.

Výsledky měření

Matematické kyvadlo jsme si reprezentovali kuličkou zavěšenou na niti. Za délku kyvadla budeme považovat vzdálenost závěsu od středu koule. Tu vyjádříme jako součet délky niti L, délky h háčku, na kterém je koule zavěšena, a poloměru koule r. Poloměr koule i délku háčku jsme určili posuvným měřítkem, délku niti pásovým měřidlem. Chybu délky niti odhadneme na 0,4 cm.

$$h = (0{,}69 \pm 0{,}01)\,\mathrm{cm}\,, \quad r = (1{,}17 \pm 0{,}01)\,\mathrm{cm}\,, \quad L = (99{,}3 \pm 0{,}4)\,\mathrm{cm}\,.$$

Při určování chyby celkové délky matematického kyvadla můžeme chyby poloměru koule i délky háčku zanedbat.

$$l = (101{,}2 \pm 0{,}4)\,\mathrm{cm}\,.$$

Dobu deseti kmitů kyvadla jsme určovali pomocí čítače. Ten vždy zaznamenává dobu, kdy kyvadlo protlo dráhu světelného paprsku, čímž výrazně zvyšuje přesnost měření (odstraňuje reakční dobu experimentátora). Výchylku kyvadla volíme maximálně 3°.

č. m.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$10T$ [s]	20,1838	20,1875	20,1857	20,1834	20,1806	20,1829	20,1857	20,1866	20,1859	20,1803
T [s]	2,01838	2,01875	2,01857	2,01834	2,01806	2,01829	2,01857	2,01866	2,01859	2,01803

Aritmetický průměr je 2,01842 s. Chybu měření odhadneme vzhledem k rozptylu naměřených hodnot na 0,0003 s, neboť měření může být zatíženo systematickou chybou přístroje a metody.

$$T = (2{,}0184 \pm 0{,}0003)\,\mathrm{s}\,.$$

Určení součinu $\varkappa M_\mathrm{Z}$ je poněkud problematické. Předpokládejme, že byl změřen metodou, která nezávisí na setrvačné hmotnosti, a berme

$$\varkappa M_\mathrm{Z} = (3{,}987 \pm 0{,}005) \cdot 10^{14}\,\mathrm{m^3{\cdot}s^{-2}}\,.$$

Poměr μ/m určíme ze vztahu (4), jeho chybu určíme z kvadratického zákona přenosu chyb

$$\Delta x = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial R}\,\Delta R\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial T}\,\Delta T\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial l}\,\Delta l\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial(\varkappa M_\mathrm{Z})}\,\Delta(\varkappa M_\mathrm{Z})\right)^2}\,.$$

Dostáváme poměrně přesný výsledek

$$x = \frac{\mu}{m} = 0{,}999 \pm 0{,}004\,.$$

Diskuse a závěr

Na chybu výsledného poměru μ/m má největší vliv chyba určení délky kyvadla l. Tuto chybu bychom mohli snížit použitím delšího závěsu. Dále se na výsledné chybě projevuje nepřesnost určení součinu $\varkappa M_\mathrm{Z}$ a vzdálenosti R. Chyba způsobená tím, že kmity nejsou harmonické, je o řád menší než uvedené chyby, také předpoklad matematického kyvadla je zde poměrně přesný.

Námi určená hodnota poměru gravitační a setrvačné hmotnosti se tedy v rámci své chyby shoduje s očekávanou hodnotou.

Jirka Lipovský
jirka@fykos.mff.cuni.cz

Úloha II . S ... *Newtonovy pohybové rovnice* *(5 bodů; průměr 4,05; řešilo 20 studentů)*

a) *Napište a řešte pohybové rovnice hmotného bodu v tíhovém poli Země. Souřadnicovou soustavu orientujte tak, že osy x a y jsou vodorovné a osa z míří vzhůru. Počáteční poloha hmotného bodu je $\boldsymbol{r}_0 = (0, 0, h)$, počáteční rychlost je $\boldsymbol{v}_0 = (v_0 \cos\alpha, 0, v_0 \sin\alpha)$. Soustavu spojenou se Zemí považujte za inerciální.*

b) *Muž s puškou sedí v křesle, které se otáčí kolem svislé osy s frekvencí $f = 1\,\mathrm{Hz}$. Spolu s křeslem se otáčí terč, který je k němu pevně upevněn. V jistém okamžiku muž vystřelí kulku rychlostí $v = 300\,\mathrm{km/h}$ směrem od osy otáčení přesně do středu terče. V jakém místě prorazí kulka terč? Řešte jak z pohledu neinerciální, tak z pohledu inerciální vztažné soustavy. Vzdálenost hlavně od středu terče je $l = 3\,\mathrm{m}$, odpor vzduchu zanedbejte.*

c) *Vyjádřete závislost rychlosti hmotného bodu na poloze v gravitačním poli Slunce.*

Zadali autoři seriálu Honza Prachař a Jarda Trnka.

a) Pro zadaný hmotný bod má 2. Newtonův zákon tvar

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}_G\,,$$

kde $\boldsymbol{F}_G = (0, 0, -mg)$ je tíhová síla. Uvažujme souřadnicovou soustavu popsanou v zadání úlohy, v ní máme tři rovnice pro každou kartézskou souřadnici zrychlení

$$ma_x = 0\,, \quad ma_y = 0\,, \quad ma_z = -mg\,, \tag{5}$$

ze kterých přímo dostáváme zrychlení hmotného bodu

$$\boldsymbol{a} = (0, 0, -g)\,.$$

Rychlost hmotného bodu získáme integrací rovnic (5) podle času (každou nejprve vydělíme m)

$$v_x(t) = C_x\,, \quad v_y(t) = C_y\,, \quad v_z(t) = C_z - gt\,,$$

kde C_x, C_y a C_z jsou integrační konstanty, které určíme z počáteční podmínky $\boldsymbol{v}(0) = (v_0 \cos\alpha, 0, v_0 \sin\alpha)$

$$v_x(t) = v_0 \cos\alpha\,, \quad v_y(t) = 0\,, \quad v_z(t) = v_0 \sin\alpha - gt\,.$$

Zbývá určit, jak závisí na čase poloha hmotného bodu, budeme proto integrovat podle času poslední tři vztahy pro složky rychlosti

$$x(t) = D_x + v_0 t \cos\alpha\,, \quad y(t) = D_y\,, \quad z(t) = D_z + v_0 t \sin\alpha - \tfrac{1}{2} g t^2\,,$$

kde D_x, D_y a D_z jsou integrační konstanty, jež určíme z druhé počáteční podmínky $\boldsymbol{r}(0) = (0, 0, h)$

$$x(t) = v_0 t \cos\alpha\,, \quad y(t) = 0\,, \quad z(t) = h + v_0 t \sin\alpha - \tfrac{1}{2} g t^2\,.$$

Tím máme pohybové rovnice vyřešeny, dostali jsme rovnice šikmého vrhu, jak jsme očekávali podle počátečních podmínek.

b) Úlohu vyřešíme nejprve z pohledu inerciální vztažné soustavy spojené se Zemí. Vzdálenost hlavně pušky od osy otáčení označíme d. Zaveďme si následující souřadnicovou soustavu. Počátek je v ose otáčení na úrovni pušky, osa x míří ve směru puška-terč, osa z míří vzhůru a osa y je na obě kolmá (viz obr. 6). V této soustavě má kulka počáteční rychlost a polohu

$$\boldsymbol{v}_0 = (v, \omega d, 0)\,, \quad \boldsymbol{r}_0 = (d, 0, 0)\,.$$

Analogicky jako v úloze a) určíme, jak závisí poloha kulky na čase

$$x(t) = d + vt\,, \quad y(t) = \omega dt\,, \quad z(t) = -\tfrac{1}{2}gt^2\,.$$

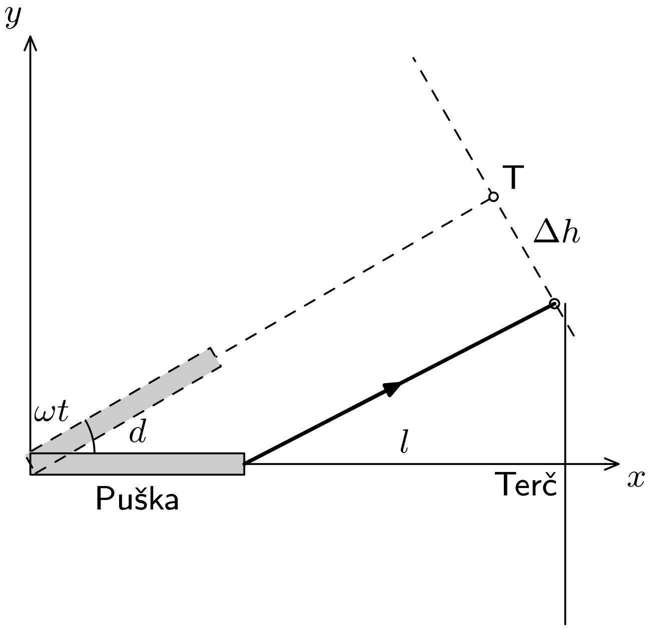
Nyní určíme čas t_1, ve kterém kulka prorazí terč. Víme, že se terč otáčí s úhlovou rychlostí ω, poloha jeho středu T v naší souřadnicové soustavě je (viz obr. 6)

$$\mathsf{T}_x = (d + l)\cos\omega t\,, \quad \mathsf{T}_y = (d + l)\sin\omega t\,.$$

Analyticky popíšeme přímku, která splývá s terčem v rovině xy. Vektor kolmý na přímku má tvar $\boldsymbol{n} = (\cos\omega t, \sin\omega t)$, rovnice přímky proto je

$$\cos\omega t \cdot x + \sin\omega t \cdot y = d + l\,,$$

kde pravou stranu rovnice jsme zvolili tak, aby přímka procházela bodem T. Do této rovnice dosadíme polohu kulky a získáme



Obr. 6

$$(d + vt)\cos\omega t + \omega dt\sin\omega t = d + l\,. \tag{6}$$

Tato rovnice bude splněna v okamžiku, kdy kulka prorazí terč, bohužel ji však nelze řešit analyticky. Vzhledem k vzdálenosti terče od hlavně a rychlosti kulky i rotace je ωt malé, potom s dostatečnou přesností platí $\sin\omega t \approx \omega t$ a $\cos\omega t \approx 1$. Rovnice (6) se potom zjednoduší na tvar

$$\omega^2 d \cdot t^2 + vt - l = 0\,, \tag{7}$$

což je kvadratická rovnice pro t a má jediné kladné řešení

$$t_1 = \frac{v}{2\omega^2 d}\left(-1 + \sqrt{1 + 4ld\,\frac{\omega^2}{v^2}}\right) \approx \frac{v}{2\omega^2 d}\left(-1 + 1 + 2ld\,\frac{\omega^2}{v^2}\right) = \frac{l}{v}\,.$$

V předchozím výpočtu jsme použili přibližný vztah $\sqrt{1 + x} \approx 1 + x/2$, který platí pro malá x.

Zbývá určit, v jakém místě prorazí kulka terč. Vodorovnou vzdálenost od středu terče označme Δh a svislou Δs. Vzdálenost Δh je rovna vzdálenosti polohy kulky a středu terče v čase t_1 (opět použijeme přibližné vztahy $\sin\omega t \approx \omega t$ a $\cos\omega t \approx 1$)

$$\begin{aligned}\Delta h^2 &= (x(t_1) - \mathsf{T}_x(t_1))^2 + (y(t_1) - \mathsf{T}_y(t_1))^2 = \\ &= (d + l - (d + l))^2 + \left(\frac{\omega dl}{v} - \frac{(d + l)\omega l}{v}\right)^2 = \left(\frac{\omega l^2}{v}\right)^2\,,\end{aligned} \tag{8}$$

přičemž kulka prorazí terč napravo od středu. Svislá vzdálenost je dána volným pádem kulky po dobu t_1 a je rovna souřadnici z v čase t_1

$$\Delta s = -z(t_1) = \frac{gl^2}{2v^2} \,. \tag{9}$$

Po dosazení zadaných hodnot vychází $\Delta h = 68\,\mathrm{cm}$ a $\Delta s = 6{,}4\,\mathrm{mm}$.

Vyřešme nyní úlohu z pohledu neinerciální soustavy spojené s rotujícím křeslem. Souřadnicovou soustavu si zvolíme stejným způsobem jako minule, ale tentokrát bude navíc rotovat úhlovou rychlostí ω. V této soustavě má kulka počáteční rychlost $\boldsymbol{v}_0 = (v, 0, 0)$ a polohu $\boldsymbol{r}'_0 = (d, 0, 0)$. Pohybová rovnice kulky je

$$m\boldsymbol{a}' = m\boldsymbol{g} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}') - 2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' \,,$$

Eulerova a translační síla je nulová. Pohybovou rovnici si přepíšeme na tři rovnice pro souřadnice

$$\begin{aligned} \ddot{x}' &= \omega^2 x' + 2\omega \dot{y}' \,, \\ \ddot{y}' &= \omega^2 y' - 2\omega \dot{x}' \,, \\ \ddot{z}' &= -g \,. \end{aligned}$$

Třetí rovnici snadno dvakrát zintegrujeme

$$z' = -\frac{1}{2} g t^2 \,.$$

Do soustavy prvních dvou rovnic zkusíme dosadit řešení ve tvaru (s ohledem na počáteční polohu)

$$\begin{aligned} x'(t) &= d \cos \omega t + A \sin \omega t + B_1 t \cos \omega t + B_2 t \sin \omega t \,, \\ y'(t) &= C \sin \omega t + D_1 t \cos \omega t + D_2 t \sin \omega t \,, \end{aligned}$$

pro neznámé konstanty dostaneme $A = 0$, $C = -d$, $B_1 = -D_2$, $B_2 = D_1$. Aby byla splněna počáteční podmínka pro rychlost kulky, musí navíc platit $B_1 = v$ a $B_2 = \omega d$. Dostáváme tedy

$$\begin{aligned} x'(t) &= (d + vt) \cos \omega t + \omega dt \sin \omega t \approx d + vt + \omega^2 dt^2 \,, \\ y'(t) &= -(d + vt) \sin \omega t + \omega dt \cos \omega t \approx -v\omega t^2 \,. \end{aligned}$$

Kulka prorazí terč v okamžiku, kdy $x' = d + l$, a dostáváme stejnou rovnici jako (6), resp. (7). Z ní jsme vypočítali, že kulka prorazí terč v čase $t_1 = l/v$. Počítejme nyní $y'(t_1)$

$$y'(t_1) = -v\omega t_1^2 = -\frac{\omega l^2}{v} \,,$$

což je zřejmě vodorovná vzdálenost středu terče a místa, kde kulka prorazila terč, a shoduje se s výsledkem (8). Svislá vzdálenost je rovna $z'(t_1)$, ovšem platí $z(t_1) = z'(t_1)$ a dostáváme výsledek (9).

c) Pro vyjádření vztahu mezi rychlostí a polohou hmotného bodu v gravitačním poli Slunce s výhodou využijeme integrál pohybu – mechanickou energii. Kinetická a potenciální energie hmotného bodu je

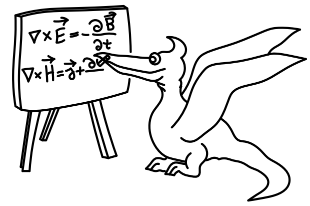
$$T = \frac{1}{2}mv^2\,, \quad V = -\frac{\varkappa m M_\mathrm{S}}{r}\,,$$

kde M_S je hmotnost Slunce a r vzdálenost od Slunce. Veličina $E = T + V$ se zachovává, platí tedy

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\varkappa m M_\mathrm{S}}{r} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2\left(\frac{E}{m} + \frac{\varkappa M_\mathrm{S}}{r}\right)}\,,$$

což je hledaná závislost.

Honza Prachař
honzik@fykos.mff.cuni.cz



Seriál na pokračování

Virtuální posunutí, D'Alembertův princip

Vraťme se teď k vazebné síle $\boldsymbol{R}$, kterou jsme definovali pomocí vztahu

$$\boldsymbol{R} = \lambda \operatorname{grad} f\,,$$

a uvažujme vazbu, která nezávisí na čase. Již víme, že tato síla je kolmá na vazbu, tedy na plochu (či na křivku v prostoru), po které se hmotný bod pohybuje. Posuňme hmotný bod o vektor $\delta\boldsymbol{r}$ po vazebné ploše. Pokud je tento vektor posunutí velmi malý, můžeme považovat vektor $\boldsymbol{R}$ za konstantní, posunutí $\delta\boldsymbol{r}$ je tedy kolmé k vazebné síle, čili platí

$$\boldsymbol{R} \cdot \delta\boldsymbol{r} = 0\,, \tag{10}$$

neboť skalární součin dvou kolmých vektorů je nula. Vektor $\delta\boldsymbol{r}$ nazýváme *virtuálním posunutím*. Vztah (10) má tvar práce $W = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{s}$ a ukazuje, že práce vykonaná vazebnou silou (*virtuální práce*) při tomto virtuálním posunutí je nulová. Vazebnou sílu $\boldsymbol{R}$ můžeme podle vztahu z Lagrangeových rovnic 1. druhu vyjádřit jako $\boldsymbol{R} = m\ddot{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{F}$. Po dosazení do (10) dostaneme

$$(\boldsymbol{F} - m\ddot{\boldsymbol{r}}) \cdot \delta\boldsymbol{r} = 0\,.$$

Rozepišme tento vztah do složek

$$\sum_{i=1}^{3}(F_i - m\ddot{x}_i)\delta x_i = 0\,. \tag{11}$$

Požadavek, aby tento vztah platil pro všechna virtuální posunutí δx_i v souladu s vazbami, vyjadřuje *d'Alembertův princip*.

Pokud by systém nebyl podroben vazbám, byla by virtuální posunutí δx_i vzájemně nezávislá (tím je míněno, že virtuální posunutí δx_1 ve směru osy x neovlivňuje posunutí ve směru jiných os a naopak) a d'Alembertův princip by byl tudíž ekvivalentní s Newtonovými pohybovými rovnicemi pro vtištěné síly $F_i - ma_i = 0$. Za přítomnosti vazeb ale nejsou posunutí δx_i nezávislá a koeficienty, které u nich ve vztahu (11) vystupují, nejsou rovny nule, což je přirozeným důsledkem existence vazebných sil.

Výhodou d'Alembertova principu je, že dynamiku tělesa popisuje pouze jedna rovnice, narozdíl například od Newtonových rovnic, které jsou tři. Další výhodou je, že nám umožňuje hledat řešení pohybových rovnic systému, aniž bychom se museli zabývat vazebnými silami, které v tomto principu vůbec nevystupují.

Často nás zajímá rovnovážná poloha daného systému podrobeného vazbám. V tomto případě je $a_i = \ddot{x}_i = 0$ a vztah (11) se zjednoduší na tvar

$$\sum_{i=1}^{3} F_i \delta x_i = 0\,.$$

To znamená, že práce vykonaná vtištěnými silami F_i při nekonečně malé výchylce z rovnovážné polohy je nulová. Stejný vztah dostaneme z d'Alembertova principu, pokud budeme považovat $F_i - m_i a_i$ za *efektivní sílu*, která zahrnuje i zdánlivé síly. Výhodou principu virtuální práce je, že místo diferenciálních rovnic řešíme rovnice algebraické.

D'Alembertův princip můžeme rovněž formulovat pro obecně N hmotných bodů. Soustava N hmotných bodů se vyvíjí takovým způsobem, že

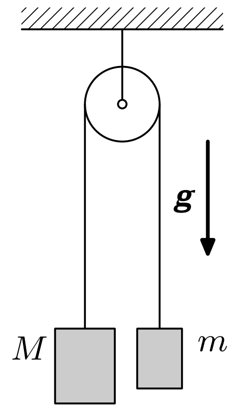
$$\sum_{i=1}^{3N} (F_i - m\ddot{x}_i)\delta x_i = 0 \tag{12}$$

pro každé virtuální posunutí δx_i.

Vše si teď ukažme na příkladu.

Příklad 5 – *soustava s kladkou*

Určete zrychlení soustavy na obrázku 7. Uvažujte $M > m$, tření na kladce zanedbejte.



Obr. 7

Řešení

Vzdálenost tělesa o hmotnosti m od kladky označme x_1, vzdálenost druhého tělesa o hmotnosti M označme x_2. Napišme si nejprve vazebnou podmínku. Je-li délka lana L, má vazebná podmínka tvar

$$x_1 + x_2 - L = 0\,.$$

Pro virtuální posunutí tedy platí

$$\delta x_1 = -\delta x_2\,.$$

Napišme si vztah (11)

$$M(g - \ddot{x}_1)\delta x_1 + m(g - \ddot{x}_2)\delta x_2 = 0\,,$$

po dosazení za δx_2 a vyjádření $\ddot{x}_1$ z druhé derivace vazbové podmínky ($\ddot{x}_1 = -\ddot{x}_2$) dostaneme

$$[M(g - \ddot{x_1}) - m(g + \ddot{x_1})]\delta x_1 = 0\,.$$

Protože tato rovnice musí platit pro všechna posunutí δx_1, dostáváme

$$M(g-\ddot{x}_1)-m(g+\ddot{x}_1)=0 \quad\Rightarrow\quad \ddot{x}_1=\frac{M-m}{M+m}\,g\,.$$

Lagrangeovy rovnice 2. druhu

Dostáváme se k nejdůležitější části našeho seriálu. Zatím jsme při popisu pohybu hmotných bodů zohledňovali silový přístup, tedy ze znalosti působících sil a vazeb jsme sestavili pohybové rovnice. Existuje ale i druhý, většinou daleko efektivnější způsob. Jedná se o energetický přístup. Ze znalosti potenciální a kinetické energie pak pomocí speciálních rovnic dokážeme sestavit tytéž pohybové rovnice jako pomocí sil. Výhoda je v tom, že většinou dokážeme snáz určit hodnotu než velikosti působících sil.

Abychom mohli energetický princip efektivně použít, požadujeme po soustavě jednu důležitou vlastnost – aby v ní platil zákon zachování energie. Pokud se energie ztrácí, např. v důsledku třecích sil, lze Lagrangeovy rovnice 2. druhu také použít, mají ale podstatně složitější tvar.

Princip výpočtu bude následující. Má-li hmotný bod n stupňů volnosti, zvolíme si n obecných souřadnic, označme je q_1, $q_2, \ldots, q_n$. Může se jednat třeba o úhel či délku. Poté pomocí těchto souřadnic, jejich derivací a času vyjádříme energii. Vztahy pro energii dosadíme do rovnice, která povede právě k pohybovým rovnicím dané soustavy. Přejděme od abstrakce ke konkrétním vztahům.

Definujme nejdříve funkci

$$L=T-V\,,$$

kde T je kinetická energie a V je potenciální energie soustavy. Tato funkce se nazývá *Lagrangeova funkce* nebo zkráceně *lagrangián.* Pro něj platí n rovnic

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0\,,\quad i=1,\ldots,n\,. \tag{13}$$

Tyto rovnice se nazývají *Lagrangeovy rovnice 2. druhu.* Lagrangeovy rovnice mají stejný tvar ve všech obecných souřadnicích, volba souřadnic je tedy naprosto libovolná.

Podobně jako u Lagrangeových rovnic 1. druhu se i zde zamyslíme nad tím, jaký tvar mají Lagrangeovy rovnice 2. druhu pro soustavu N hmotných bodů. Nechť je soustava omezena r holonomními vazbami, soustava má tedy $3N-r$ stupňů volnosti. Můžeme si zvolit $3N-r$ zobecněných souřadnic q_i, které nám soustavu jednoznačně popíší. Dále postupujeme stejně jako pro jediný hmotný bod. Lagrangián soustavy (rozdíl celkové kinetické a celkové potenciální energie) vyjádříme jako funkci souřadnic q_i, jejich derivací a času. Pro soustavu potom platí $3N-r$ Lagrangeových rovnic 2. druhu

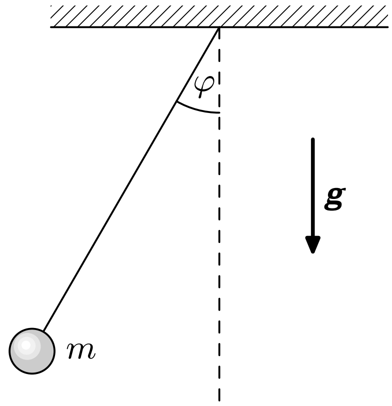
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0\,,\quad i=1,\ldots,3N-r\,.$$

Máme tak $3N-r$ diferenciálních rovnic pro $3N-r$ neznámých $q_1,\ldots,q_{3N-r}$.

Konkrétní výpočet si ukážeme na jednoduchém příkladu.

Příklad 6 – *matematické kyvadlo*

Vypočítejte periodu matematického kyvadla o délce l.



Obr. 8

Řešení

Matematické kyvadlo má jeden stupeň volnosti, jako jeho souřadnici volíme výchylku φ z rovnovážné polohy. Pro kinetickou energii platí

$$T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 \,,$$

pro potenciální energii

$$V = mgl(1 - \cos\varphi) \,.$$

Lagrangián kyvadla je tedy

$$L = T - V = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 - mgl(1 - \cos\varphi) \,. \tag{14}$$

Dosadíme do (13) a uvědomíme si, že kinetická energie nezávisí na φ a potenciální nezávisí na $\dot{\varphi}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = m l^2 \ddot{\varphi} + mgl \sin\varphi = 0 \,.$$

Pokud jsou výchylky malé, můžeme použít aproximaci $\sin\varphi \approx \varphi$. Po dosazení a úpravě dostaneme

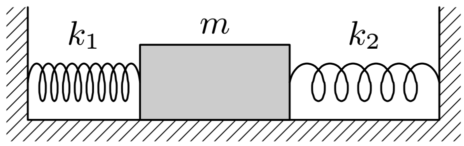
$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\,\varphi = 0 \,. \tag{15}$$

Nyní se již můžeme radovat, protože toto je rovnice harmonických kmitů a platí $\omega^2 = g/l$. Z toho již snadno dostaneme hledaný vztah pro periodu.

Velmi důležitá je správná volba souřadnice, která bude vystupovat v Lagrangeových rovnicích. V příkladu 6 jsme sice neměli na výběr, protože matematické kyvadlo má pouze jeden stupeň volnosti, ale setkáme se i se systémy s více stupni volnosti. Ne že bychom při nevhodné volbě souřadnic nedošli ke správnému výsledku, ale cesta by byla o poznání delší. Pokud zobecněnými souřadnicemi vhodně popíšeme zkoumaný systém, jsou Lagrangeovy rovnice velice užitečný nástroj, ba dokonce jsou přímo pro tyto případy takto zformulované.

Příklad 7 – *dvě pružiny*

Určete periodu kmitů tělesa na obrázku 9. Tuhost první pružiny je k_1 a druhé k_2. Tření a hmotnost pružin neuvažujte, pružiny jsou na začátku bez napětí.



Obr. 9

Řešení

Těleso má jeden stupeň volnosti, za souřadnici si zvolíme vzdálenost tělesa od rovnovážné polohy, označme ji x. Pro kinetickou energii platí $T = m\dot{x}^2/2$. Potenciální energie se skládá z potenciální energie pružnosti první pružiny, která má hodnotu $V_1 = k_1 x^2/2$, a potenciální energie pružnosti druhé pružiny, která má hodnotu $V_2 = k_2 x^2/2$. (Potenciální energie záleží pouze na absolutní výchylce z rovnovážné polohy.) Pro Lagrangián tedy dostáváme

$$L = T - V = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} k_1 x^2 - \frac{1}{2} k_2 x^2 \,.$$

Po dosazení do Lagrangeových rovnic obdržíme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = m\ddot{x} + k_1 x + k_2 x = 0\,.$$

Tento vztah můžeme upravit na tvar

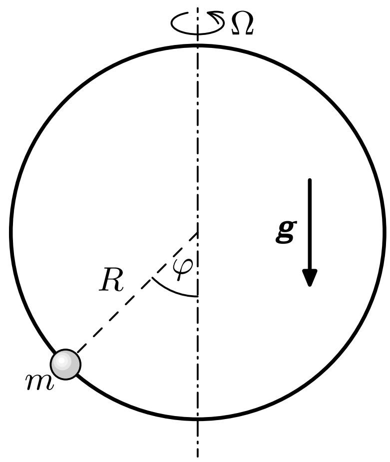
$$\ddot{x} + \frac{k_1 + k_2}{m}\,x = 0\,.$$

To je ale rovnice harmonických kmitů, pro niž platí $\omega^2 = (k_1 + k_2)/m$. Z toho již snadno dopočteme hledaný výsledek.

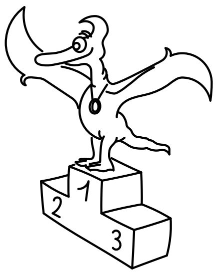
Úloha IV . S ... *Lagrangeovy rovnice 2. druhu*

Malý korálek o hmotnosti m klouže bez tření na drátu ve tvaru kruhové smyčky poloměru R, smyčka se otáčí konstantní úhlovou rychlostí Ω kolem svislé osy (viz obr. 10).

a) Vhodně zvolte zobecněnou souřadnici a sestrojte Lagrangeovu funkci problému.
b) Sestavte Lagrangeovu rovnici 2. druhu, která popisuje pohyb korálku.
c) Rozhodněte, kdy je rovnovážná poloha v nejnižší poloze smyčky stabilní a kdy je labilní v závislosti na Ω. Pro Ω, kdy je tato poloha stabilní, vypočítejte periodu kmitů korálku kolem této polohy.
d) Za bonusové body nalezněte další rovnovážné polohy, diskutujte, zda jsou stabilní, nebo labilní. Pokud jsou stabilní, určete periodu kmitů kuličky kolem těchto rovnovážných poloh.



Obr. 10



Pořadí řešitelů po II. sérii

Kategorie čtvrtých ročníků

	jméno	**škola**	**1**	**2**	**3**	**4**	**P**	**E**	**S**	**II**	**%**	**Σ**
	Student Pilný	MFF UK	4	4	4	4	5	8	5	**34**	*100*	**66**
1.	*Stanislav Vosolsobě*	G U Balvanu Jablonec nN	4	4	4	2	3	9	6	**32**	*94*	**62**
2.	*Ivan Dimitrov*		4	4	4	2	2	1	5	**22**	*76*	**50**
3.	*Anton Repko*	G Sv. Mikuláša, Prešov	4	4	4	1	2	–	5	**20**	*78*	**39**
4.	*Roman Fiala*	VOŠ a SPŠE Plzeň	4	4	1	1	3	–	–	**13**	*73*	**35**
5.	*Jakub Závodný*	G Bratislava, Grösslingova	4	4	4	–	1	5	–	**18**	*80*	**32**
6.	*Zdeněk Kučka*	G Neumannova, Žďár n. S.	4	–	–	–	2	7	2	**15**	*67*	**28**
7.	*Petr Morávek*	G Dašická, Pardubice	4	4	4	–	2	–	–	**14**	*86*	**25**
8.	*Robert Roreitner*	MasSŠ chemická, Praha	4	4	1	4	2	–	–	**15**	*51*	**23**
9.–10.	*Bedřich Roskovec*	MasG Petákova, Plzeň	4	4	1	1	–	–	–	**10**	*51*	**20**
	Zuzana Safernová	G Bílovec	4	–	–	–	–	–	4	**8**	*95*	**20**
11.	*Peter Greškovič*	G Svidník	4	–	1	–	–	–	–	**5**	*54*	**19**
12.	*Kateřina Fišerová*	G Lepařovo, Jičín	–	4	–	–	–	–	–	**4**	*84*	**16**
13.–14.	*Pavlína Böhmová*	G Komenského Havířov	4	4	1	–	–	–	–	**9**	*52*	**14**
	Petr Houštěk	G Pelhřimov	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*70*	**14**
15.	*Petr Kubala*	SPŠ Frýdek Místek	0	–	0	–	–	–	2	**2**	*41*	**13**
16.	*Petr Vaško*	MasG Petákova, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*80*	**12**
17.	*Petr Novotný*	COP Hronov	2	–	1	–	–	–	–	**3**	*43*	**10**
18.	*Lenka Doubravová*	G Matyáše Lercha, Brno	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*60*	**9**
19.–20.	*Jana Babováková*	G Most	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*42*	**8**
	Michal Humpula	G Uherský Brod	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*50*	**8**
21.–23.	*Zdeněk Lochman*	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*37*	**7**
	Tomáš Mihalík	G Husitská	1	–	0	–	–	–	1	**2**	*22*	**7**
	Denis Vald	G Jírovcova, Č. Budějovice	1	4	0	–	2	–	–	**7**	*41*	**7**
24.–26.	*Markéta Kavalírová*	G Českolipská Praha	4	–	–	–	–	–	–	**4**	*100*	**4**
	Markéta Vilimovská	G Českolipská Praha	4	–	–	–	–	–	–	**4**	*100*	**4**
	Kateřina Žabková	SPgŠ Liberec	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*36*	**4**
27.	*Jiří Kubr*	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*27*	**3**

Kategorie třetích ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	II	%	Σ
	Student Pilný	MFF UK	4	4	4	4	5	8	5	**34**	*100*	**66**
1.	*Tomáš Bednárik*	G Vsetín	4	4	1	1	1	6	4	**21**	*74*	**49**
2.	*Aleš Podolník*	G Kapitána Jaroše, Brno	4	–	4	–	3	7	4	**22**	*78*	**42**
3.	*Marek Scholz*	G Neratovice	4	4	3	–	2	7	5	**25**	*83*	**38**
4.	*Miroslav Hrubý*	BG Barvičova Brno	4	4	4	3	2	3	4	**24**	*61*	**37**
5.	*Petr Bezmozek Dvořák*	SPŠ Jihlava	4	3	0	–	1	6	–	**14**	*63*	**36**
6.	*Petra Malá*	G Moravský Krumlov	4	–	1	–	1	7	4	**17**	*65*	**35**
7.–8.	*Ondřej Bílka*	G Lesní čtvrť, Zlín	4	4	2	–	–	–	6	**16**	*71*	**29**
	Martin Konečný	G Boskovice	4	–	0	0	2	8	4	**18**	*54*	**29**
9.–10.	*Peter Perešíni*	G J. G. Tajovského	4	3	–	–	–	–	–	**7**	*80*	**28**
	Slavomír Takáč	G Nové Zámky	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*88*	**28**
11.–12.	*Martin Koštejn*	SPgŠ Liberec	4	4	0	–	1	7	–	**16**	*61*	**27**
	Petr Smital	G Kapitána Jaroše, Brno	4	–	4	–	2	–	–	**10**	*73*	**27**
13.–15.	*Miroslav Janáček*	SPgŠ Liberec	4	4	–	–	2	6	–	**16**	*59*	**26**
	Adam Přenosil	G Sladkovského nám., Praha	4	4	0	–	–	–	5	**13**	*70*	**26**
	Libor Šachl	G Terezy Novákové Brno	4	–	0	2	2	4	–	**12**	*50*	**26**
16.	*Jan Bednář*	COP Hronov	4	4	1	0	–	–	–	**9**	*67*	**24**
17.–19.	*Monika Josieková*	G Český Těšín	4	2	–	–	3	1	–	**10**	*47*	**23**
	Zuzana Pôbišová	G J. G. Tajovského	4	–	1	–	–	–	–	**5**	*74*	**23**
	Jenda Valášek	G Broumov	4	3	–	–	–	4	–	**11**	*74*	**23**
20.	*Roman Derco*	G Svidník	4	–	4	–	2	–	–	**10**	*69*	**22**
21.	*Tereza Klimošová*	G Lanškroun	4	4	1	–	–	–	–	**9**	*88*	**21**
22.	*Vojtěch Molda*	G Vsetín	4	–	2	–	4	1	–	**11**	*48*	**19**
23.	*Martina Miková*	G Olomouc	4	–	0	–	1	–	–	**5**	*43*	**17**
24.–25.	*Beáta Hergelová*	G Lučenec	4	–	1	–	2	–	–	**7**	*50*	**16**
	Vladimír Sivák	G Ľudovíta Štúra	–	–	–	–	–	5	–	**5**	*59*	**16**
26.–27.	*Jiří Hloska*	G Terezy Novákové Brno	–	–	2	–	2	–	–	**4**	*60*	**15**
	Michal Sivák	G Ľudovíta Štúra	–	–	–	–	–	5	–	**5**	*65*	**15**
28.	*Pavel Burda*	G Křenová Brno	4	4	1	–	–	–	–	**9**	*61*	**14**
29.–30.	*Tomáš Jirotka*	G Klatovy	4	–	–	–	–	–	–	**4**	*54*	**13**
	Jana Pokorná	COP Hronov	4	–	–	–	2	–	–	**6**	*65*	**13**
31.–32.	*Michal Seidel*	COP Hronov	–	4	1	0	–	–	–	**5**	*58*	**11**
	Tomáš Šťastný	G D. Tatarku, Poprad	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*34*	**11**
33.	*Lucie Hympánová*	G Kladno	4	–	0	–	0	–	–	**4**	*28*	**10**
34.–35.	*Jaroslav Hančl*	G Bílovec	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*73*	**8**
	Jana Vrábelová	G Ľudovíta Štúra	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*35*	**8**
36.	*Martin Hrdlička*	G Louny	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*64*	**7**
37.	*Milan Klicpera*	G Čelákovice	1	–	0	–	0	–	–	**1**	*21*	**6**
38.–40.	*Vendula Exnerová*	G Nad Štolou, Praha	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*45*	**5**
	Radek Papoušek	G Lesní čtvrť, Zlín	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*45*	**5**
	Hana Vítová	G Bystřice n. Pern.	4	–	–	–	1	–	–	**5**	*56*	**5**
41.–43.	*Radka Bystřická*	G Hodonín	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*57*	**4**
	Jan Matoušek	G Žižkova, Kolín	–	–	–	–	0	–	–	**0**	*25*	**4**
	Darja Suchá	G Kladno	–	–	1	–	–	–	–	**1**	*57*	**4**
44.	*František Matyska*	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*20*	**3**
45.–46.	*Martin Bernátek*	SOŠ Krnov	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*25*	**2**
	Ondřej Lébl	G Nymburk	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*29*	**2**

Kategorie druhých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	II	%	Σ
	Student Pilný	MFF UK	4	4	4	4	5	8	5	**34**	*100*	**66**
1.	*Jakub Benda*	G Jana Nerudy Praha	4	2	4	–	3	8	7	**28**	*90*	**56**
2.	*Pavel Motloch*	G Petra Bezruče	4	4	4	4	2	7	5	**30**	*87*	**54**
3.	*Lukáš Malina*	G Zborovská, Praha	4	4	1	–	2	4	–	**15**	*71*	**35**
4.	*Martin Formánek*	G Uherské Hradiště	4	4	–	0	–	4	4	**16**	*55*	**29**
5.–6.	*Ondrej Bogár*	G Ľudovíta Štúra	4	–	0	–	2	4	2	**12**	*49*	**24**
	Radim Pechal	SPŠE Rožnov p. R.	4	4	3	4	–	–	–	**15**	*77*	**24**
7.	*Jana Lochmanová*	G Chodovická Praha	1	3	1	0	2	4	–	**11**	*41*	**23**
8.	*Jana Przeczková*	G Havířov - Podlesí	5	4	2	1	1	6	–	**19**	*53*	**19**
9.–10.	*Vlastimil Peksa*	G Zborovská, Praha	4	4	2	–	–	–	–	**10**	*67*	**18**
	Jakub Prouza	COP Hronov	4	4	1	3	–	–	–	**12**	*58*	**18**
11.	*Marek Bukáček*	G Havlíčkův Brod	4	0	0	3	–	–	–	**7**	*44*	**17**
12.–14.	*Miroslav Kaděra*	G Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*67*	**16**
	Jaroslava Lavková	G Poprad	1	–	0	0	1	–	–	**2**	*40*	**16**
	Juraj Zajac	G Ľudovíta Štúra	–	–	–	1	–	4	–	**5**	*52*	**16**
15.	*Kristýna Krejčová*	G Tišnov	4	–	–	2	1	–	–	**7**	*54*	**15**
16.	*Martin Lexa*	G Vysoké Mýto	4	–	0	–	–	–	–	**4**	*44*	**12**
17.–18.	*Petr Dvořák*	G V. Makovského	4	–	–	–	–	–	–	**4**	*67*	**8**
	Jiří Špale	GOA Sedlčany	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*73*	**8**
19.	*Beáta Garšicová*	G Vídeňská, Brno	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*47*	**7**
20.–21.	*Petr Šácha*	G Tachov	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*32*	**6**
	Martin Štys	SOU Hronov	4	2	–	–	–	–	–	**6**	*75*	**6**
22.	*Daniel Šimsa*	G Josefa Jungmanna	4	–	1	–	–	–	–	**5**	*63*	**5**
23.–24.	*Peter Berta*	G Veľké Kapušany	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*50*	**4**
	Miloslava Kučeríková	G Poprad	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*36*	**4**
25.	*Petra Votavová*	G Cheb	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*11*	**3**
26.–27.	*Tomáš Ehrlich*	G Holešov	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*50*	**2**
	Přemysl Šrámek	G Dašická, Pardubice	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*18*	**2**
28.–29.	*Martin Berka*	G Moravská Třebová	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*0*	**0**
	Jana Susová	GOA Sedlčany	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*0*	**0**

Kategorie prvních ročníků

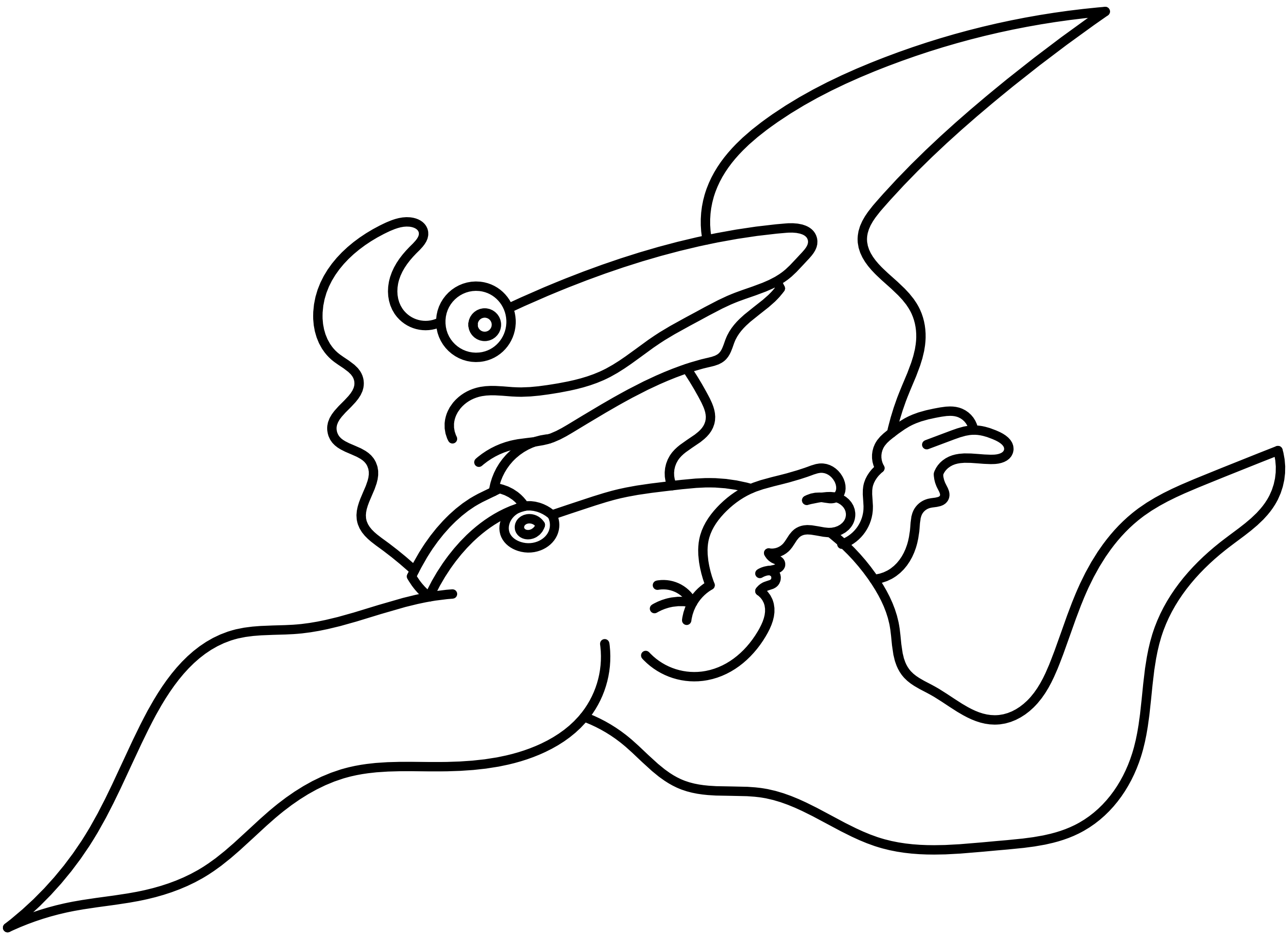
	jméno	**škola**	**1**	**2**	**3**	**4**	**P**	**E**	**S**	**II**	**%**	**Σ**
	Student Pilný	MFF UK	4	4	4	4	5	8	5	**34**	*100*	**66**
1.–3.	*Katarína Baxová*	G Ľudovíta Štúra	–	–	–	1	–	4	2	**7**	*48*	**21**
	Lucie Pospíšilová	G Matyáše Lercha, Brno	4	4	0	0	1	–	–	**9**	*53*	**21**
	Jan Valášek	G Zborovská, Praha	4	4	1	–	3	–	–	**12**	*58*	**21**
4.	*Tereza Fantová*	G Benešov	4	0	0	–	1	1	–	**6**	*37*	**19**
5.	*Josef Müller*	G dr. Josefa Pekaře	1	4	1	1	1	3	–	**11**	*38*	**18**
6.	*Katarína Rozvadská*	G Ľudovíta Štúra	–	1	0	1	1	–	–	**3**	*39*	**17**
7.	*Lenka Sabová*	G Javorová, S. Nová Ves	4	–	1	–	2	–	–	**7**	*57*	**16**
8.–9.	*Jan Červenka*	G Ostrava - Zábřeh	4	4	1	–	1	–	–	**10**	*32*	**12**
	Michaela Kubinová	G Ostrava - Zábřeh	4	4	1	–	1	–	–	**10**	*41*	**12**
10.	*Zuzana Jungrová*	G Blovice	4	–	–	3	1	–	–	**8**	*25*	**10**
11.	*Zdeněk Vais*	G Boskovice	4	–	1	–	–	–	–	**5**	*33*	**9**
12.	*Michal Berta*	G Trebišov	1	0	0	0	1	1	–	**3**	*14*	**8**
13.	*Petra Navrátilová*	COP Hronov	–	1	1	0	–	–	–	**2**	*26*	**7**
14.–15.	*Petr Hons*	G Ostrava - Zábřeh	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*15*	**4**
	Jan Macháček	G Jeseník	–	–	1	–	–	–	–	**1**	*17*	**4**
16.	*Aleš Růžička*	G Tábor	–	–	0	0	1	–	–	**1**	*13*	**3**
17.–18.	*Vlastimil Daníček*	COP Hronov	0	0	0	0	0	–	–	**0**	*4*	**2**
	Jan Navrátil	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*18*	**2**
19.	*Barbora Henzlová*	G Matyáše Lercha, Brno	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*25*	**1**

Soutěž ve hledání chyb

	jméno	**III**	**Σ**
1.	*Jan Matoušek*	9	**9**
2.	*Jana Przeczková*	8	**8**
3.	*Martin Konečný*	7	**7**
4.	*Jakub Benda*	6	**6**
5.–6.	*Petra Malá*	3	**3**
5.–6.	*Tomáš Bednárik*	3	**3**

FYKOS
UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: http://fykos.mff.cuni.cz
e-mail pro řešení: fykos-solutions@mff.cuni.cz
e-mail: fykos@mff.cuni.cz



Anketa & soutěž

Polovina letošního ročníku FYKOSu je již za námi. Jak se vám jeho dosavadní průběh líbil, nám prosím sdělte v anketě. Vyplňte anketu pečlivě, její výsledky určitě ovlivní další průběh semináře.

U jednotlivých úloh hodnoťte, jak se vám líbilo zadání, jak bylo napsané autorské řešení a jak jste byli spokojeni s opravou vašeho řešení. Stupnice je 1–5 jako ve škole. U ostatních položek uveďte slovní hodnocení.

Na další stránce jsme pro vás připravili hru známou pod názvem *šestý smysl*. Cílem je v každé kategorii napsat věc, kterou napíše co nejvíce hráčů. Pochopení pravidel si snadno ověříte na první otázce :-) Výsledky soutěže se nijak neprojeví v bodování, jak to dopadlo, se ale určitě dozvíte.

Celý list potom odstřihněte a pošlete nám ho zpět spolu s vaším řešením čtvrté série. Děkujeme.

Anketa

Úlohy ve FYKOSu – známkujte zadání, autorské řešení, opravování

			I.1 . . . *ošklivé kačátko*				II.P . . . *nečekaná překážka*
			I.2 . . . *přistřižené kyvadlo*				II.E . . . *není hmotnost jako hmotnost*
			I.3 . . . *mistr zedník*				II.S . . . *Newtonovy pohybové rovnice*
			I.4 . . . *vodník Děsílko poznává svět*				III.1 . . . *teplota na Zemi*
			I.P . . . *antiraketa*				III.2 . . . *pobřežní hlídka*
			I.E . . . *a přece se točí*				III.3 . . . *nabitá krychle*
			I.S . . . *kinematika hmotného bodu*				III.4 . . . *s větroněm přes kanál*
			II.1 . . . *Mojžíšův zázrak*				III.P . . . *věž z vozíčků*
			II.2 . . . *kolik drátů na sloupech?*				III.E . . . *hustota vzduchu*
			II.3 . . . *vrtulník*				III.S . . . *Lagrangeovy rovnice 1. druhu*
			II.4 . . . *zoufalí trosečníci*				

Jak hodnotíte letošní seriál?

Jak často navštěvujete FYKOSí www stránky? Co byste chtěli na webu nového?

Uvítali byste studijní text z matematiky používané ve FYKOSích úlohách? Prostudovali byste jej?

Chcete, abychom zveřejňovali předběžné neúplné výsledky? Čtete řešení zveřejňovaná s předstihem na webu?

Máte možnost využívat počítač? Které programy pro potřeby fyziky umíte ovládat?

Máte přístup k mikrovlnné troubě se známou frekvencí záření?

Co jiného byste vzkázali organizátorům?

Šestý smysl

Jméno:*

** toto není soutěžní otázka*

1. *korespondenční seminář*
2. *organizátor FYKOSu*
3. *řešitel FYKOSu*
4. *letošní úloha ve FYKOSu*
5. *fyzikální vzorec či zákon*
6. *fyzikální jednotka*
7. *kniha o fyzice*
8. *televizní seriál*
9. *asijské město*
10. *křestní jméno*

Den s experimentální fyzikou

Naše tradiční akce DSEF se uskuteční na přelomu března a dubna. Chtěli bychom vás o ní předběžně informovat. Přesné informace a pozvánky dostanete spolu se zadáním páté série na konci února. Jsou plánovány exkurze na reaktor Vrabec, pracoviště MFF UK v Tróji a jako novinka na Ústav fyziky plazmatu (tokamak Kastor a laserový systém PALS). Sdělte nám prosím předběžně, zda se plánujete DSEFu zúčastnit.

- ☐ možná se zúčastním
- ☐ zúčastním se za každou cenu
- ☐ ______________________________
- ☐ nezúčastním se, protože o akci nemám zájem
- ☐ nezúčastním se, protože Praha je příliš daleko
- ☐ nezúčastním se, protože se mi nehodí termín

V případě, že se plánujete účastnit, napište, zda máte zájem o všechny exkurze, případně napište, o které zájem nemáte.

Nakonec nám můžete napsat poznámky, přání a vzkazy.

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.