

Milí řešitelé!

Dostáváte do rukou zadání letošní předposlední série. Omlouváme se, že se k vám dostává se zpožděním, je to zaviněno technickými potížemi na naší straně. Také se chceme omluvit za neúplnou výsledkovou listinu třetí série, ve které chybí body za třetí úlohu. Její opravovatel totiž zatím nestihl obodovat vaše řešení.

Naopak doufáme, že vás potěšíme tím, že jsme stihli v expresním čase opravit vaše řešení čtvrté série, která najdete přiložená v obálce. Rovněž výsledková listina čtvrté série je na konci brožurky.

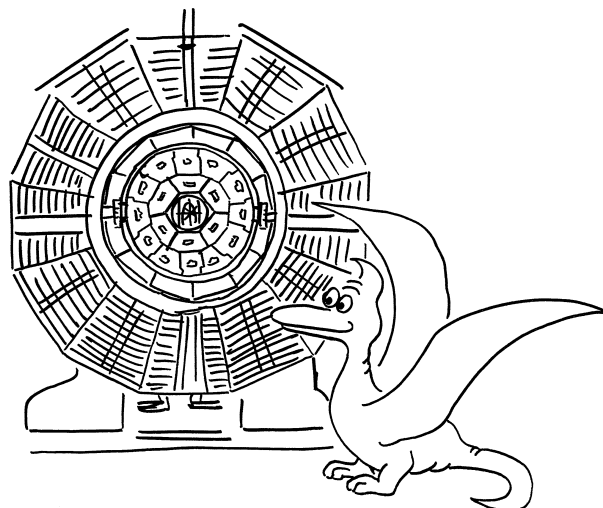
Někteří z vás (ti úspěšnější) již obdrželi pozvánku na jarní soustředění. Ostatní ovšem nemusí házet flintu do žita! O účasti na druhém (podzimním) soustředění ještě rozhodnou poslední dvě série.

Dále bychom chtěli reagovat na anketu, která proběhla v minulé sérii. Těší nás, že často navštívujete FYKOSÍ [www stránky](http://www.fykosi.cz). Budeme se snažit je často aktualizovat jak řešeními úloh poslední série, tak postupně doplňovanou výsledkovou listinou, kterou chcete, abychom zveřejňovali i neúplnou. Ohledně žádaných zajímavostí z fyziky, odkazů a studijních textů bychom vás odkázali na stránky <http://fo.cuni.cz/> a <http://fyzweb.cuni.cz/>.

Psali jste si také o možnost komunikace s ostatními řešiteli, uvedli jsme proto do provozu *Diskusní fórum* na našich webových stránkách <http://fykos.mff.cuni.cz/>, tak se zde nestyďte diskutovat.

Na závěr úvodních komentářů jedna užitečná poznámka: tečka nad veličinou znamená její derivaci podle času, například $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$.

Honza Prachař



Den s experimentální fyzikou

Jako každý rok i letos si vás dovoluujeme pozvat na tradiční celodenní akci s názvem Den s experimentální fyzikou (DSEF), kterou pořádáme pro své řešitele, event. jejich přátele či pedagogický doprovod, a to samozřejmě bez ohledu na výsledky v naší soutěži. Dostanete jedinečnou příležitost prohlédnout si nejrůznější zařízení, se kterými fyzikové pracují, seznámit se s aktuální problematikou a nejnovějšími poznatky v experimentální fyzice a také poznat učitele na Matematicko-fyzikální fakultě. Letošní DSEF se uskuteční v **pondělí 18. dubna 2005**.

Pro tento rok jsme na základě ankety a zkušeností z minulých akcí připravili některé *zásadní změny v organizaci a náplni*, se kterými vás touto pozvánkou a přiloženou přihláškou chceme seznámit.

Především letos poprvé DSEF opustí areál v Tróji a vydá se na velmi zajímavá pracoviště *Ústavu fyziky plazmatu v Praze na Slovance*. Zde se nachází jeden z nejvýkonnějších laserových

systémů na světě PALS a dále tokamak pro termojadernou fúzi s názvem CASTOR. Tradiční bude návštěva školního reaktoru Vrabec (pouze pro starší 16 let včetně), při níž jsme loni zažili cvičný jaderný poplach a vyzkoušeli bezpečnostní systémy reaktoru. (V dalším roce se na Vrabce s největší pravděpodobností nepůjde, protože jsou plánovány exkurze do Ústavu jaderného výzkumu v Praze-Řež.) Další exkurze proběhnou v areálu v Tróji a budou upřesněny asi dva týdny před akcí na našich webových stránkách. Pokusíme se vyjednat návštěvu pracovišť, která jste vloni neviděli, oblíbená můžeme zopakovat.

Přihlášky

Zavádíme nový systém *přihlášky přes webový formulář*, který je zprovozněn na FYKOSích stránkách <http://fykos.mff.cuni.cz>. Těm, kteří nemají přístup na internet alespoň jednou týdně, se omlouváme. Předchozí způsoby přihlašování ještě ponecháváme. Před vyplněním (prosíme všech údajů) jakékoliv formy přihlášky si pečlivě přečtěte pokyny a podmínky na ní uvedené. Vše najdete také na stránce <http://fykos.mff.cuni.cz/cz/dsef>.

Papírovou podobu přihlášky najdete přiloženou k této brožurce. Termín pro odeslání přihlášky je **pondělí 4. dubna 2005**.

Pavel Brom
dsef@fykos.mff.cuni.cz

Šestý smysl

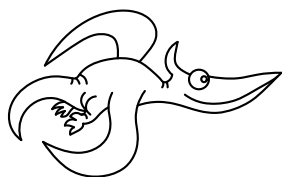
Šestatřicet z vás se zapojilo do naší ankety spojené s šestým smyslem. Správné odpovědi byly

1. korespondenční seminář – **FYKOS**,
2. organizátor FYKOSu – **Honza Prachař**,
3. řešitel FYKOSu – **Student Pilný**,
4. letošní úloha ve FYKOSu – **ošklivé káčátko**,
5. fyzikální vzorec či zákon – **$E = mc^2$** ,
6. fyzikální jednotka – **newton**,
7. kniha o fyzice – **Feynmanovy přednášky z fyziky**,
8. televizní seriál – **Simpsonovi**,
9. asijské město – **Tokio**,
10. křestní jméno – **Jan**.

Nejlepší šestý smysl má *anonym*¹, který uhádl správně 8 otázek, jen třikrát se mýlila *Beáta Hergelová*, po šesti správných odpovědích měli *Zuzana Jungrová*, *Jan Valášek* a *Petr Vaško*, chválu zaslouží také *Jan „Béda“ Bednář*, *Jakub Benda*, *Martin Formánek*, *Zuzana Pôbišová* a *Daniel Šimsa* s pěti přesnými trefami.

Jirka Lipovský

¹⁾ Pokud si myslíte, že anonym jste vy, ozvěte se nám prosím.



Zadání V. série



Termín odeslání: 25. dubna 2005

Úloha V.1 ... dáreček od Buffala

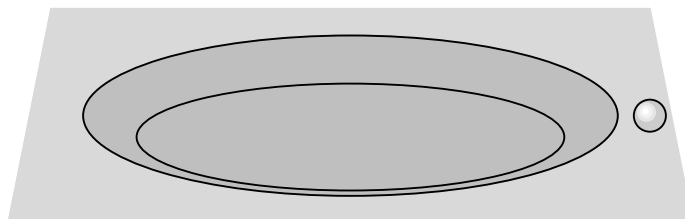
Buffalo Bill se už roky snaží polapit Jessieho Jamese, známého banditu. V městečku Clay County mu konečně přišel na stopu. Strhla se přestřelka. Buffalo si všiml sudu plného petroleje na vozíku mezi sebou a Jessiem. „Jak dostat sud k Jessiemu, abych ho mohl zapálit?“ rozmýšlí Bill.

Jessie prostřelil sud v 9/10 výšky a ze sudu začal stříkat petrolej. Buffalo se trefil přesně do poloviny sudu a střílí znovu. Vyřešte, s jakým počátečním zrychlením se bude pohybovat vozíček v závislosti na tom, kam se Bill trefí podruhé. Předpokládejte, že hybnost kulky je nulová, a tření zanedbejte. Zamyslete se nad dalšími zajímavými okolnostmi tohoto souboje.

Úloha V.2 ... pád ze schodů

Malý Karlík si hraje s kuličkou. Při cvrnkání je však neopatrný, kulička se mu odkutálí k nakloněné rovině, kterou doma mají místo schodiště, a začne po ní klouzat dolů. Kulička se pohybuje tak, že vektor její rychlosti \mathbf{v} svírá s horní hranou nakloněné roviny úhel φ . Vypočítejte vektor rychlosti \mathbf{v}' kuličky (tj. jeho velikost a také *směr*) pod nakloněnou rovinou, jejíž výška je h . Tření mezi kuličkou a zemí je malé, proto ho zanedbejte. Předpokládejte, že horní a dolní hrana nakloněné roviny je zaoblená, takže se kulička neodlepí od podlahy.

Jako bonus můžete vypočítat, jak se změní směr rychlosti kuličky, která proletí válcovou jamkou o poloměru R a hloubce h se zkosenými hranami (viz obr. 1). Délku zkosení můžete vzhledem k poloměru jamky zanedbat.



Obr. 1

Úloha V.3 ... beta rozpad

Při měření rozpadu neutronu na elektron a proton proměřovali čeští vědci energii vylétávajícího elektronu. Jak mohou pouze na základě údajů z tohoto měření poznat, zda nevzniká při tomto rozpadu ještě jiná částice? Uvažujte, že neutron je před rozpadem v klidu.

Úloha V.4 ... neposlušná gravitace

Při dlouhodobém pozorování zákrytů Jupiterova měsíce Io bylo zjištěno, že naměřená doba oběhů měsíčku kolem planety (např. od předchozího do následného začátku zákrytu) pravidelně kolísá mezi hodnotami 42 h 28 min 21 s a 42 h 28 min 51 s (s chybou měření 2 s).

Pokuste se jak kvalitativně, tak kvantitativně vysvětlit pozorované změny. Kvantitou rozumíme určení „velikosti této příčiny“ na základě měření samozřejmě s odhadem chyby!

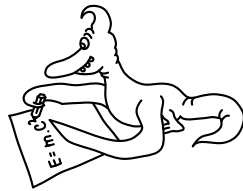
Úloha V.P ... rychlejší než voda

Zamyslete se nad tím, zda se může lodička bez motoru na řece pohybovat rychleji než samotná voda. Svou odpověď zdůvodněte a předpokládejte, že proudění vody je laminární.

Úloha V . E ... paličův seník

Určete teplotu vznícení náplně plynového zapalovače, tj. nejnižší teplotu, na kterou ji musíme zahřát, aby se na vzduchu vznítila. Jako bonus můžete též zjistit zápalnou teplotu technického lihu nebo jiné organické látky.

Postupujte například tak, že na odporový drát rozžhavený průchodem elektrického proudu pustíte plyn ze zapalovače. K určení zápalné teploty využijete změřené hodnoty napětí a proudu a známou závislost odporu na teplotě. Vaší vynalézavosti se však meze nekladou. Varujeme: Oheň způsobuje těžké popáleniny, postupujte proto obezřetně!

**Řešení III. série****Úloha III.1 ... teplota na Zemi (4 body; průměr 2,62; řešilo 53 studentů)**

Průměrná teplota na povrchu Země je $T = 287\text{ K}$. Jaká bude nová průměrná teplota T' , pokud se střední vzdálenost mezi Zemí a Sluncem zkrátí o 1 %?

Část úlohy z 28. MFO v Kanadě.

Předpokládejme, že Slunce izotropně vyzařuje energii, což způsobuje, že na Zemi je větší teplota, než je teplota vakua (asi 2,7 K). Má-li Slunce celkový zářivý výkon Q , je ve vzdálenosti r příslušná intenzita

$$E = \frac{Q}{4\pi r^2}.$$

Výkon připadající na povrch Země je potom $P = ES$, kde S je plošný obsah řezu Zemí. Pokud se vzdálenost mezi Zemí a Sluncem zmenší o 1 %, zvětší se příslušný výkon

$$P' = E'S = \frac{Q}{4\pi r'^2} S = \frac{Q}{4\pi (0,99r)^2} S \doteq 1,02P.$$

Abychom zjistili, jak se změní teplota na Zemi, musíme znát vztah mezi zářivým výkonem a teplotou. Ve stacionárním stavu (teplota na Zemi se nemění) se musí přijatá energie od Slunce rovnat vyzážené energii. Pro zjednodušení předpokládejme, že se Země chová jako černé těleso. Pro zářivý výkon potom platí Stefanův-Boltzmannův vztah $P = \sigma T^4$, kde $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-4}$ je Stefanova-Boltzmannova konstanta. Z toho již snadno dopočteme novou teplotu T'

$$\frac{P'}{P} = \frac{T'^4}{T^4} \doteq 1,02 \quad \Rightarrow \quad T' \doteq \sqrt[4]{1,02} T \doteq 1,005T.$$

Po dosazení dostaneme $T' = 288,4\text{ K}$, což je změna asi o 1,4 K.

Velká část řešitelů si neuvědomila, že vztah mezi výkonem a teplotou udává právě Stefanův-Boltzmannův vztah, a počítala s přímou úměrností $P \sim T$. Našlo se i pár řešitelů, kterým nová teplota vyšla nižší než ta původní.

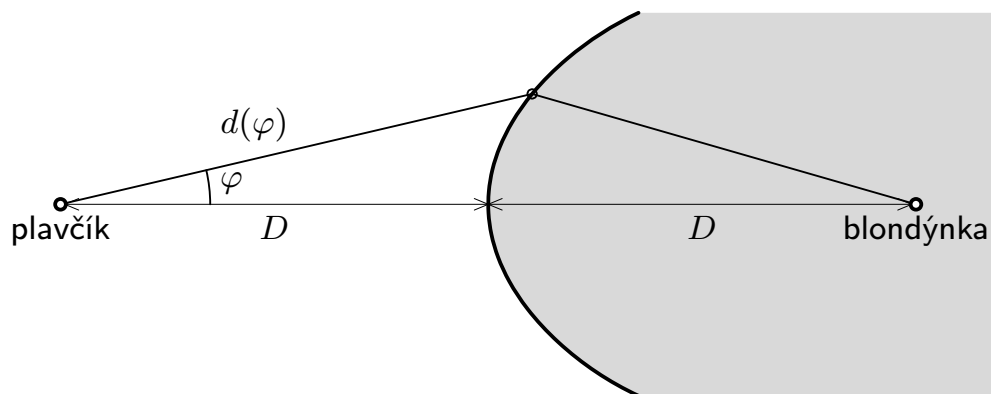
Jarda Trnka

jarda@fykos.mff.cuni.cz

Úloha III.2 ... pobřežní hlídka (4 body; průměr 2,50; řešilo 32 studentů)

Plavčík stojící ve vzdálenosti D od břehu moře náhle spatří topící se bujnou blondýnku, která doplávala do vzdálenosti D od břehu (viz obr. 2). Poradte mu, jak se k ní má co nejrychleji dostat, pokud rychlost jeho běhu je v a rychlost plavání $v/2$. Vzdálenost okraje moře od plavčíka závisí na úhlu φ následujícím předpisem

$$d(\varphi) = \frac{D}{3} (8 \cos \varphi - 2 \sqrt{16 \cos^2 \varphi - 12 \cos \varphi - 3} - 3).$$



Obr. 2. Na pláži

Ujasněme si nejdříve, pro jaké úhly má daný tvar pobřeží smysl. Zavedme substituci $x = 8 \cos \varphi - 3$, vztah ze zadání se zjednoduší na

$$d = \frac{D}{3} (x - \sqrt{x^2 - 21}). \quad (1)$$

Řešení můžeme tedy hledat pro $x \geq \sqrt{21}$, což odpovídá podmínce $\cos \varphi \geq (3 + \sqrt{21})/8$. Úhel φ se tedy může pohybovat v intervalu $(-18^\circ 35'; +18^\circ 35')$.

Je zřejmé, že se ideální dráha plavčíka bude skládat ze dvou úseček – nejdříve uběhne dráhu d po souši a poté uplave dráhu l k blondýnce. Vzdálenost l si můžeme vyjádřit z kosinové věty

$$l = \sqrt{d^2 + 4D^2 - 4Dd \cos \varphi}.$$

Vytkneme d a za $\cos \varphi$ dosadíme z uvedené substituce

$$l = d \sqrt{1 + \frac{4D^2}{d^2} - \frac{D(x+3)}{2d}}.$$

Vztah (1) upravíme

$$\left(x - \frac{3d}{D}\right)^2 = x^2 - 21 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3d}{2D} + \frac{7D}{2d}$$

a dosadíme do předchozí rovnice

$$l = d \sqrt{1 + \frac{4D^2}{d^2} - \frac{3}{4} - \frac{7D^2}{4d^2} - \frac{3D}{2d}} \quad \Rightarrow \quad 2l = d \sqrt{\left(\frac{3D}{d}\right)^2 - 2\left(\frac{3D}{d}\right) + 1}.$$

V posledním výrazu uvidíme dobře známý trojčlen $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$, a protože $3D/d > 1$, můžeme jej odmocnit.

$$2l = 3D - d.$$

Běží-li plavčík rychlostí v a plave-li rychlostí $v/2$, bude celková doba nutná k záchraně blondýnky

$$t = \frac{d}{v} + \frac{2l}{v} = \frac{d + 3D - d}{v} = \frac{3D}{v}.$$

Dokázali jsme tedy, že výsledná doba na úhlu φ vůbec nezávisí, plavčík může vystartovat pod libovolným úhlem ze zmíněného intervalu.

Jirka Lipovský

jirka@fykos.mff.cuni.cz

Úloha III.3 ... nabitá krychle (4 body; průměr 2,40; řešilo 5 studentů)

Jaký je poměr hodnot elektrostatického potenciálu ve vrcholu a ve středu nevodivé rovnoměrně nabitě krychle? Celkový náboj na krychli je Q a délka strany krychle je a . Předpokládejte, že elektrický potenciál v nekonečnu je nulový. *Vymyslel Pavel Augustinský.*

Je jasné, že spočítat potenciály od tak složitě (rozuměj nikoliv sféricky symetrického) tělesa, jako je krychle, přímým výpočtem není jednoduché. Pokusíme se proto vymyslet nějaký trik, kterým bychom mohli úlohu vyřešit na jeden řádek.

Jak známo, potenciál je aditivní veličina, což znamená, že máme-li nějaké náboje, které nám vytvoří potenciál φ_1 , a nějaké jiné náboje, jež vytvoří potenciál φ_2 , všechny náboje dohromady vytvoří potenciál $\varphi_1 + \varphi_2$. Klíč k řešení je představit si krychli jakožto objekt složený z osmi menších krychlí. Tyto krychle se dotýkají vrcholy uprostřed „velké“ krychle. Teď je již zřejmé, že stačí vypočítat, kterak závisí potenciál v rohu krychle na velikosti krychle. Doopravdy, potenciál uprostřed velké krychle si představíme jako sumu potenciálů v rozích malých krychlí (těch je osm). Zapsáno rovnicí

$$\varphi_{\text{krychle střed}} = 8 \cdot \varphi_{\text{poloviční krychle vrchol}}.$$

Provedeme následující úvahu. Náboje na krychli se v podstatě rozmístí do uzlů krystalové mřížky a potenciál můžeme napsat jako součet potenciálů od jednotlivých nábojů. Potenciál od jednoho náboje je, jak známo, $\varphi \sim 1/r$ (znak \sim značí úměrnost, vystupuje tam totiž ještě nepodstatný faktor $1/4\pi\epsilon_0$). Sčítat budeme přes uzly mřížky

$$\varphi \sim \sum \frac{q_i}{r_i}.$$

Nyní tuto krychli roztáhneme do všech stran, dokud strany nebudou měřit dvakrát tolik. Všechny vzdálenosti se dvakrát zvětší. V rohu nyní bude potenciál dvakrát větší krychle, ovšem s osminovou nábojovou hustotou, neboť celkový náboj na krychli při roztahování zůstal zachován a musel se rozdělit mezi osm malých krychlí. Nedostatek vyřešíme jednoduše tak, že do uzlů nové mřížky posadíme náboj osmkrát větší. Vzorec pro potenciál dvakrát větší krychle jest tudíž

$$\varphi_{2\times} \sim \sum \frac{q'_i}{r'_i} = \sum \frac{8q_i}{2r_i} = 4 \cdot \sum \frac{q_i}{r_i} \sim 4\varphi.$$

Potenciál dvakrát větší krychle je čtyřikrát větší. Všimněme si, že celý postup nezávisí na konkrétním tvaru tělesa (pro potenciál uprostřed galaxie a uprostřed dvakrát větší galaxie (obecně pro geometricky podobné situace) by nám vyšlo to samé). Dále si uvědomme, že za relevantnost triku vděčíme malé mřížkové konstantě — pouze při malých vzdálenostech sousedů

můžeme nahradit hustou mřížku s náboji q řídkou mřížkou s náboji $8q$. Ti, co umějí integrovat, si jistě dosadí do příslušného integrálu

$$\varphi \sim \int \frac{\rho}{r} dV$$

a vyjde jim to samé; jejich mřížka je nekonečně hustá, mají tzv. kontinuum.

Nyní již můžeme napsat výsledek

$$\varphi_{\text{krychle střed}} = 8 \cdot \varphi_{\text{poloviční krychle vrchol}} = 2 \cdot \varphi_{\text{krychle vrchol}},$$

což bylo spočítat.

Matouš Ringel

matous@fykos.mff.cuni.cz

Úloha III.4 ... s větroněm přes kanál (4 body; průměr 2,33; řešilo 33 studentů)

Jeden známý letec se rozhodl ve větroni přeletět kanál La Manche. V Calais se nechal vyvléci do výšky $h = 3$ km a z této výšky se přímým klouzavým letem vypravil do Anglie. Jako dobrý pilot ví, kterak při ustáleném letu vypadá závislost klesací rychlosti v_{kles} na dopředné rychlosti v_{dop} (viz graf na obr. 3). Poradte mu, jak rychle má letět, aby doletěl co nejdál.

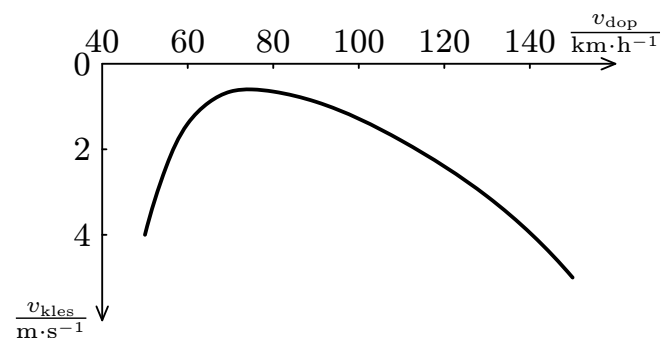
Když je ve třech čtvrtinách cesty do Anglie, začne od ostrovů fučet silný vítr o rychlosti $10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Rozhodněte, jak rychle má letět nyní, aby se dostal co nejdál. Jaká by musela být rychlost větru, aby mu znemožnila přistát na pevnině, případně aby mu umožnila návrat do Francie?

Úlohu vymyslel pilot Matouš Ringel.

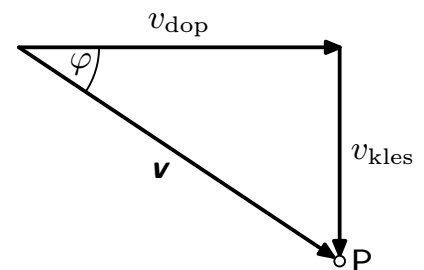
Řešení této úlohy je založeno na pozorování, jež mnoho z vás skutečně zpozorovalo, a sice že bodu $P = (v_{\text{dop}}, v_{\text{kles}})$ křivky odpovídá klesací úhel φ , jenž splňuje rovnici $\text{tg } \varphi = v_{\text{kles}}/v_{\text{dop}}$. Chceme-li z dané výšky doletět co nejdál, je zřejmě nutné klesat pod co možná nejmenším úhlem. Jak si lze snadno uvědomit, vedeme-li přímkou z počátku souřadnic (toho skutečného počátku, tj. $(0, 0)$, na obrázku není), pak úhel, jenž svírá s osou x , je roven právě φ (pohleďte na obrázek 4).

Proto chceme najít přímkou s co možná nejmenším sklonem, ovšem protínající křivku. Vezmeme nějakou přímkou procházející počátkem a budeme ji otáčet. Nejprve bude protínat křivku ve dvou bodech, pak v jednom a nakonec vůbec²⁾. Správná volba je tudíž přímkou protínající křivku v jednom bodě – tečna. Na následujícím obrázku se jedná o přímkou a .

Měli jsme za úkol zjistit, jakou rychlostí v takovém případě poletíme. Jednoduše odečteme x -ovou souřadnici průsečíku. Najdeme $v \approx v_{\text{dop}} \approx 76 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ (zanedbáváme malý úhel klesání). V dalším budeme potřebovat znát i tangens úhlu klesání. Ten odměříme nejlépe tak, že zvolíme bod na příslušné přímce, odečteme jeho souřadnice, a vypočítáme $\text{tg } \varphi$ podle vzorce výše. Nalezneme $\text{tg } \varphi \approx 0,0273$.



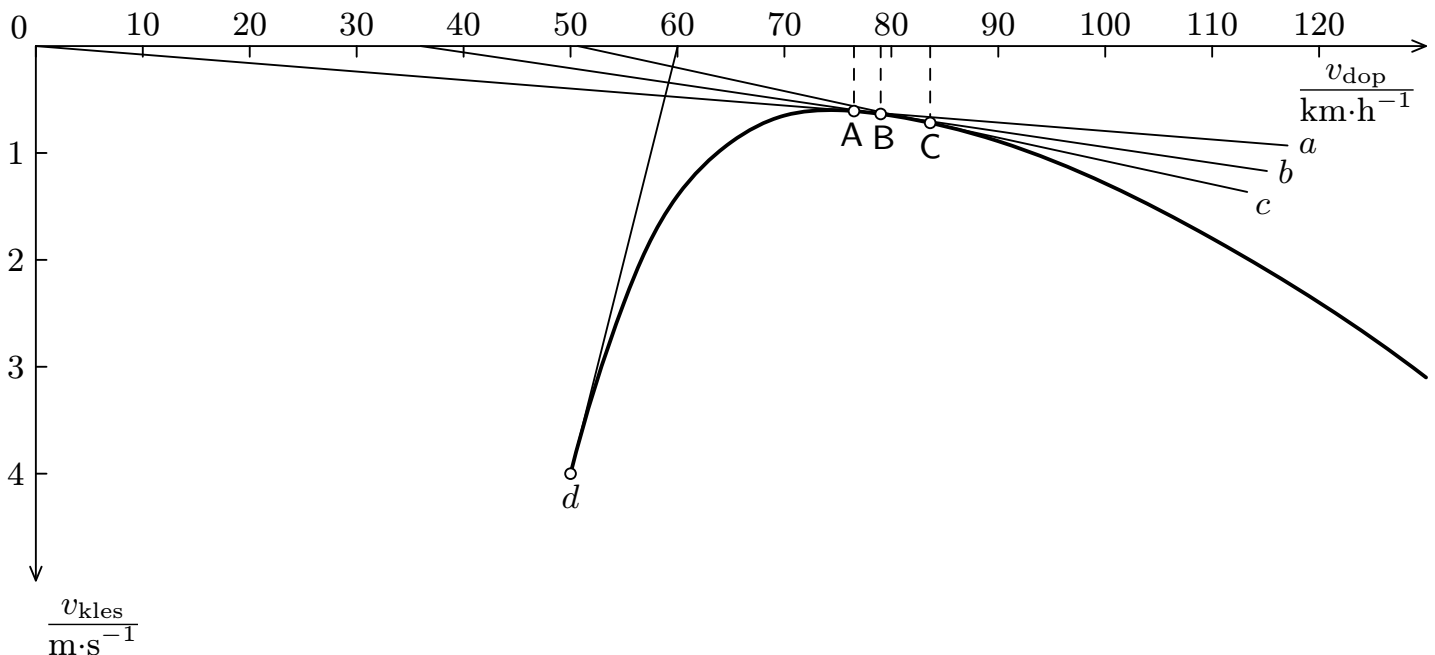
Obr. 3



Obr. 4

²⁾ Toto obecně neplatí. Je nutné, aby se křivka „zatáčela“ pořád na stejnou stranu.

Rozmysleme si, co se stane, když začne foukat protivítr. Naše křivka udává do souvislosti složky rychlosti vůči proudícímu vzduchu. Za bezvětří je křivka platná i vůči zemi, avšak při protivětru ji musíme upravit. Zřejmě nezmění svůj tvar, celá změna se redukuje na posunutí počátku souřadnic ve směru v_{dop} o rychlost větru, neboť letadlo letící stejnou rychlostí vůči vzduchu letí pomaleji vůči zemi. Nyní provedeme úplně stejnou proceduru jako v předchozím bodě, akorát tečnu povedeme z nového počátku souřadnic. Na obrázku tečně odpovídá přímka b . Nejvýhodnější rychlost odečteme rovnu asi $79 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$.



Obr. 5

Nyní vypočítáme, v jaké výšce se bude větroň nalézat ve třech čtvrtinách cesty do Anglie. Na mapě můžeme odměřit šířku Kanálu, jenž je okolo Calais široký asi 40 km. Odtud výška větroňe 10 km od pobřeží Anglie bude $h' = 3 \text{ km} - \text{tg } \varphi \cdot 30 \text{ km} \approx 2,2 \text{ km}$. Má-li vítr zabránit větroňi dosáhnout břehu, musí fučet tak rychle, aby úhel klesání letadla byl větší než úhel nutný k dosažení břehu. Tento označíme α a platí pro něj vztah $\text{tg } \alpha = h'/10 \text{ km}$. Odtud $\text{tg } \alpha \approx 0,22$. Jak jsme již podotkli, úhlu klesání odpovídá úhel přímky vedené počátkem souřadnic a bodem křivky, ve kterém se letadlo nachází. Nejmenší úhel odpovídá tečně. Proto mezní rychlost větru bude taková, že tečna ke křivce vedená z nového počátku souřadnic bude mít právě nalezenou směrnici. Jelikož směrnici známe, musíme najít bod na křivce, ve kterém má tečna tutéž směrnici. To se snadno zkonstruuje podobně, jako kreslíme rovnoběžky pomocí dvou pravítek. Na obrázku situaci vyjadřuje přímka c . Rychlost větru je x -ová souřadnice průsečíku tečny s osou x , tedy $\approx 50 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$. Můžete si snadno ověřit, že se větroň může vrátit do Francie při libovolném větru, jinými slovy pilot nebyl zas až takový dobrodruh.

Jako bonus zjistíme, kdy větroň může ve vzduchu couvat. Po krátkém přemýšlení si uvědomíme, že větroň musí letět co nejpomaleji a protivítr musí být co nejrychlejší. Odtud už snadno odvodíme, že přímka d na obrázku, tedy tečna ke křivce v nejkrajnějším bodě, řeší úlohu.

Křivka v zadání byla dosti plochá – odtud plyne jen malý rozdíl v optimálních rychlostech. I když se od křivek výkonných větroňů příliš neliší, přeci jen jsem situaci podcenil, což vám ztížilo (znepřesnulo) konstrukci. Omlouvám se tímto všem snaživcům, zejména pak *Petru Pe-*

řešením, jenž do řešení zapojil veškerou v okolí dostupnou výpočetní techniku a vyrobil s její pomocí pěkné řešení.

Matouš Ringel

matous@fykos.mff.cuni.cz

Úloha III. P ... věž z vozíčků (5 bodů; průměr 1,87; řešilo 23 studentů)

Určete zrychlení prvního a stého vozíčku (počítáno od země) na obrázku 6. Vozíčků je nekonečně mnoho, na obrázku jsou zakresleny jen první čtyři. Spodní vozíček má hmotnost m , další vozíček, který po něm jezdí, a závaží, se kterým je spojen, má hmotnost $m/2$. Podobně další vozíček a závaží má hmotnost $m/4$ atd. Předpokládejte, že závaží jsou připevněná k vozíčkům, tj. že se ve svislém směru neodchylují. Tření mezi jednotlivými vozíčky zanedbejte.

Úlohu navrhl Honza Houštěk.

Pro každý vozíček ze soustavy (mimo první) bude platit stejná pohybová rovnice, tedy až na indexy, které nám říkají, o který vozíček, resp. zrychlení jde. Všechna zrychlení orientujeme tak, že jejich souřadnice a_n budou kladné.

Zabývejme se nyní tím, jaké síly působí na n -tý vozíček o hmotnosti $m_n = m/2^{n-1}$ (vystupuje zde $n-1$, neboť chceme, aby první vozíček měl hmotnost dle zadání rovnu m). Souřadnici zrychlení tohoto vozíčku označme a_n . S tímto vozíčkem se zároveň pohybuje i závaží o hmotnosti $m_{n+1} = m/2^n$. Dále na n -tý vozíček působí dvě síly, tahová síla o velikosti T_n a síla o velikosti T'_{n+1} , která se přenáší přes kladku vozíčku. T'_{n+1} je reakcí na T_{n+1} a je stejně velká. Nadále budeme všude psát jen T_{n+1} namísto T'_{n+1} . Pohybovou rovnici můžeme prozatím zapsat takto

$$\left(\frac{m}{2^{n-1}} + \frac{m}{2^n}\right) a_n = T_n + T_{n+1}. \quad (2)$$

Nyní potřebujeme určit velikost tahové síly T_n . Na n -té těleso zavěšené na laně působí jen tíhová síla o velikosti $m_n g$. Toto těleso se však navíc pohybuje se zrychlením $a_n + a_{n-1}$ dolů, kde zrychlení a_n je způsobeno vazbou lana a zrychlení a_{n-1} tím faktem, že vozíček držící kladku s ní ujíždí tímto zrychlením opačným směrem pryč. Tím pádem platí tato pohybová rovnice pro zavěšené těleso

$$\frac{m}{2^{n-1}}(a_n + a_{n-1}) = \frac{m}{2^{n-1}}g - T_n$$

a odtud pro T_n , resp. T_{n+1} platí

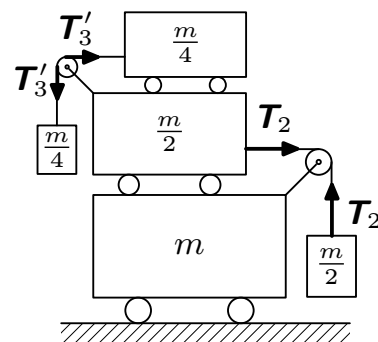
$$T_n = \frac{m}{2^{n-1}}(g - a_n - a_{n-1}), \quad T_{n+1} = \frac{m}{2^n}(g - a_{n+1} - a_n).$$

Tyto vztahy dosadíme do (2) a po úpravách dostáváme rekurentní vzorec

$$a_{n+1} + 6a_n + 2a_{n-1} = 3g, \quad \forall n \geq 2. \quad (3)$$

Nyní si všimneme, že tuto rovnici řeší konstantní posloupnost a_n ($a_n = a_{n+1}$, $\forall n \geq 2$), pak dosazením do (3) zjistíme, že pro všechna n je $a_n = g/3$. Toto řešení není ale jediné. Řešením je také $g/3 + h$, kde h je řešení rovnice s nulovou pravou stranou

$$a_{n+1} + 6a_n + 2a_{n-1} = 0. \quad (4)$$



Obr. 6

O tom se můžete sami přesvědčit dosazením. Abychom zjistili všechna řešení rovnice (4), naučíme se ji řešit. Z toho důvodu na chvíli odbočíme od řešení fyzikálního problému a ukážeme si postup řešení.

Rovnici (4) nazýváme diferenční rovnicí. Její řešení najdeme tak, že budeme předpokládat řešení rovnice ve tvaru x^n , $x \neq 0$. To znamená, že všude namísto a_n napíšeme x^n , obdobně místo a_{n+1} napíšeme x^{n+1} atd. Mějme obecnou rovnici

$$c_r a_{n+r} + \dots + c_1 a_{n+1} + c_0 a_n = 0.$$

Tu převedeme na

$$c_r x^{n+r} + \dots + c_1 x^{n+1} + c_0 x^n = 0 \quad \Rightarrow \quad c_r x^r + \dots + c_1 x^1 + c_0 = 0,$$

toto je rovnice r -tého stupně. Pokud najdeme r různých³ kořenů x_1, \dots, x_r , pro řešení diferenční rovnice platí

$$a_n = k_1 x_1^n + \dots + k_r x_r^n,$$

kde k_1, \dots, k_r jsou neznámé koeficienty, které můžeme určit z počátečních podmínek. Zkuste si vypočítat, jak vypadá explicitní vzorec pro Fibonacciho posloupnost, pro kterou platí $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ a $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

Tento postup aplikujme na rovnici (4). Dostaneme rovnici

$$x^{n+1} + 6x^n + 2x^{n-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 6x + 2 = 0.$$

Tato kvadratická rovnice má dvě řešení

$$x_1 = -3 - \sqrt{7}, \quad x_2 = -3 + \sqrt{7}.$$

Rovnice (4) má pak řešení

$$a_n = k_1 (-3 - \sqrt{7})^n + k_2 (-3 + \sqrt{7})^n,$$

kde k_1, k_2 jsou neznámé koeficienty.

Nyní se vraťme opět k fyzice. Jak jsme již řekli, řešení rovnice (3) je rovno $g/3 + h$, kde h je řešení (4), a tedy zrychlení n -tého vozíčku vypočítáme

$$a_n = \frac{g}{3} + k_1 (-3 - \sqrt{7})^n + k_2 (-3 + \sqrt{7})^n,$$

kde k_1, k_2 musíme určit. Je zřejmé, že k_1 musí být rovno nule, neboť $|-3 - \sqrt{7}| > 1$, a pokud by bylo k_1 nenulové pro n rostoucí do nekonečna, zrychlení by rostlo nade všechny meze. To ale není možné, protože nejvyšší možné zrychlení v tíhovém poli je rovno g . O koeficientu k_2 neumíme zatím nic říci. Označme $\lambda = -3 + \sqrt{7}$, předchozí rovnice se potom přepíše na

$$a_n = \frac{g}{3} + k_2 \lambda^n \quad \forall n \geq 2. \quad (5)$$

³⁾ pro vícenásobné kořeny toto neplatí

Abychom určili, čemu je roven k_2 , potřebujeme ještě jednu rovnici. Touto pohybovou rovnicí bude rovnice pro zrychlení prvního vozíčku. Urychluje jej jen síla přenášená od kladky. Pohybová rovnice pro první vozíček pak vypadá takto

$$\frac{3}{2} ma_1 = \frac{1}{2} m(g - a_1 - a_2).$$

Dosazením za $n = 2$ v rovnici (5) dostáváme

$$a_2 = \frac{g}{3} + k_2 \lambda^2.$$

Tuto rovnici dosadíme do pohybové rovnice pro první vozíček, abychom zjistili, čemu je rovno jeho zrychlení. Po krátkých úpravách dostaneme

$$a_1 = \frac{g}{6} - \frac{1}{4} k_2 \lambda^2.$$

Sepišme si pro přehlednost rovnice, které použijeme pro výpočet k_2 . Poslední rovnice je rovnice (3) pro $n = 2$.

$$a_1 = \frac{g}{6} - \frac{1}{4} k_2 \lambda^2, \quad a_2 = \frac{g}{3} + k_2 \lambda^2, \quad a_3 = \frac{g}{3} + k_2 \lambda^3, \\ a_3 + 6a_2 + 2a_1 = 3g.$$

Nyní dosadíme za a_1 , a_2 a a_3 do poslední rovnice, z toho si vyjádříme k_2

$$\frac{g}{3} + k_2 \lambda^3 + 2g + 6k_2 \lambda^2 + \frac{g}{3} - \frac{1}{2} k_2 \lambda^2 = 3g \quad \Rightarrow \quad k_2 = \frac{g}{3\lambda^2(5,5 + \lambda)}.$$

Přímým dosazením do rovnice pro první vozíček získáváme

$$a_1 = \frac{g}{6} - \frac{g}{12(5,5 + \lambda)} \doteq 0,15g,$$

pro n -tý vozíček platí

$$a_n = \frac{g}{3} \left(1 + \frac{\lambda^{n-2}}{5,5 + \lambda} \right).$$

Snadno si všimneme, že pro n jdoucí do nekonečna konverguje a_n ke $g/3$, protože $|\lambda| < 1$. A konkrétně pro stý vozíček se velikost zrychlení liší od $g/3$ až na 45. desetinném místě.

Karel Tůma

kajinek@fykos.mff.cuni.cz

Úloha III. E ... hustota vzduchu (8 bodů; průměr 5,15; řešilo 27 studentů)

Změřte hustotu vzduchu. Provést to můžete libovolnou metodou, nezapomeňte k vaší metodě uvést potřebnou teorii. Správný experimentální výsledek nesmí také postrádat určení chyby změřené hodnoty.

Navrhl Pavel Augustinský.

Pro řešení problému využijeme dynamické metody určování hustoty plynů. Vyzkoušejme tedy pád tělesa ve vzduchu.

Teorie

Při měření budeme uvažovat ustálený stav, kdy těleso padá rovnoměrně přímočaře, tedy kdy je tíha působící na těleso vyrovnána odporovou silou vzduchu, jehož hustotu máme určit. Jak dobře víme, pro velikost odporové síly známe několik vztahů v závislosti na charakteru proudění a obtékání tělesa. Ve výpočtu použijeme Newtonův vzorec (zdůvodnění viz též Diskuse), kde hustota vzduchu ρ vystupuje, a tedy pro rovnováhu sil dostáváme

$$mg = \frac{1}{2}CS\rho v^2,$$

kde m je hmotnost tělesa, $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ velikost tíhového zrychlení, v velikost ustálené rychlosti, S plocha maximálního průřezu tělesa kolmého k rychlosti v a C součinitel odporu, jehož hodnoty jsou tabelované. Ze zjištěných hodnot těchto veličin vypočteme hledanou hustotu podle vztahu

$$\rho = \frac{2mg}{CS} \left(\frac{t}{s}\right)^2. \quad (6)$$

Postup měření

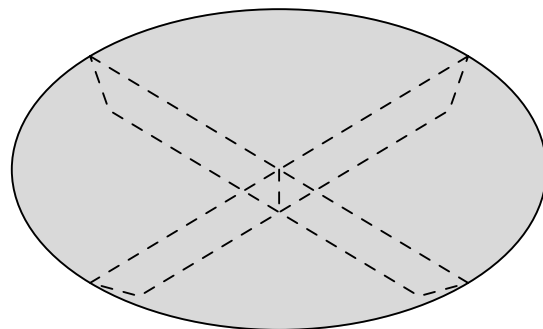
K měření jsme použili kruhovou desku o průměru d , tudíž ploše $S = \pi d^2/4$ a se součinitelem odporu $C = 1,11$, realizovanou velice tenkým papírem, který se užívá ve fotoalbech, aby se fotografie neslepily. Aby byly splněny podmínky pokusu (kolmost na směr rychlosti a rovnoměrný přímočarý pohyb), přilepili jsme zespodu křídélka vysoká 3 cm ve tvaru kříže, navíc udržující rovinu papíru (viz obr. 7). Budeme předpokládat, že koeficient C se touto úpravou nezměnil (viz Diskuse).

Toto těleso klesalo rovnoměrně na dráze $s = 1,15 \text{ m}$, poté se začalo výrazněji naklánět a uhýbat do stran, což dobře známe. Ustálené rychlosti bezpečně dosáhlo na dráze cca 10 cm. Celková hmotnost papírového tělesa m byla určena laboratorními rovnoramennými váhami. Měření průměru kruhu d milimetrovým měřítkem a doby pádu t (ruční měření) na dráze s bylo zpracováno statisticky.

Výsledky měření

Mnozí z vás pečlivé zpracování a vyhodnocení chyb vynechávají. Dovolte mi tedy shrnout základní body.

- a) Rozhodneme se, kde použijeme statistické zpracování. Např. hmotnost jednoho tělesa nebo délku určitého úseku nemá smysl měřit několikrát. Jiný případ je, použijeme-li jiná měřidla, abychom potlačili systematickou chybu měření, nebo kontrolujeme-li neměnnost veličiny v průběhu měření. Naopak rozměry tělesa a ruční měření času určitě zpracujeme statisticky! Zde např. statistická chyba měření průměru d (tj. standardní odchylka σ_d) vypovídá, jak



Obr. 7. Kruhová deska s „křídélky“

přesný kruh máme. V případě měření času statistika eliminuje zkreslení výsledků náhodnou chybou při měření. (Hrubou chybu odhalíme kritériem 3σ .)

- b) Veškeré hodnoty veličin X uvádíme ve tvaru $X = (x \pm \varepsilon_x)$ jednotka. Chyba ε_x (zaokrouhlená na maximálně dvě platné číslice) je možná chyba měření daná polovinou nejmenšího dílku stupnice nebo naším rozumným odhadem, případně spočtená z možné statistické chyby. Střední hodnotu x zaokroulíme ve stejném řádu, jako je chyba ε . Jako možnou chybu ručního měření času vezmeme reakční dobu člověka alespoň 0,2 s, kterou si sami můžeme změřit. Chyby sčítáme podle kvadratického zákona sčítání chyb

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_A^2 + \varepsilon_B^2}.$$

- c) Chybu vypočtené veličiny určíme obecně pomocí parciálních derivací jakožto váhy v kvadratickém zákonu. Pokud však veličiny vystupují v součinu/podílu a jsou zatíženy malými relativními chybami, lze efektivně přímo sčítat relativní chyby. (Ten byl pro rychlý odhad chyby uplatněn v našem zpracování, i když chyby jsou již poměrně velké.)

Výsledky jsou tedy následující. Hodnoty z měření doby pádu a průměru kruhové desky jsou v následující tabulce.

t [s]	1,64	1,70	1,60	1,70	1,68	1,66	1,68	1,60	1,68	1,64
d [mm]	21,00	21,10	21,00	21,00	21,10	21,10	21,00	21,10	21,10	21,10

Spočítáme průměrnou hodnotu a standardní (střední kvadratickou) odchylku. Shrňme naměřené hodnoty

$$s = (1,15 \pm 0,05) \text{ m}, \quad t = (1,66 \pm 0,20) \text{ s}, \quad d = (0,2106 \pm 0,0006) \text{ m}, \quad m = (1,30 \pm 0,05) \text{ g}.$$

Ze vztahu (6) dostáváme $\rho = (1,37 \pm 0,29) \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, správně zaokrouhlený výsledek měření tedy je

$$\rho = (1,4 \pm 0,3) \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3},$$

přičemž je vztažen na následující podmínky měření. Teplota vzduchu 22°C (určena kuchyňským teploměrem), tlak 1014 hPa (podle TV relace o počasí).

Diskuse

Nesmíme zapomenout na diskusi, kde posoudíme splnění podmínek pokusu a správnost výsledků a kde provedeme srovnání s tabelovanými hodnotami a zhodnotíme chyby měření. Případné odchylky se pokusíme zdůvodnit.

Výsledek koresponduje dobře s tabelovanou hodnotou $1,27 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ v rámci chyby měření, která je poměrně velká. Při prvním provedení (ve snaze snížit chybu měření) byl stejným způsobem zkoumán pád na dráze 2,2 m, který dal výsledek $1,8 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, avšak v druhé polovině pádu objekt neletěl rovnoměrně a přímo dolů. Takový pohyb navyšuje dobu pádu t a mění podmínky měření a zřejmě vede k vyšší hodnotě hustoty vzduchu, než je skutečná. Ze stejného důvodu je i přesnější výsledek vychýlen nahoru od tabelované hodnoty.

Měření je zatíženo poměrně velkou chybou danou především nepřesným ručním měřením času, ale navýšenou také větším počtem nepřesně zjišťovaných veličin (tj. měření na krátké dráze a relativně malé hmotnosti).

Zbývá zhodnotit správnost úvah a rovnic, ze kterých jsme vycházeli. Charakter proudění lze určit podle Reynoldsova čísla, na základě jehož odhadnuté velikosti (ν je kinematická viskozita vzduchu)

$$Re = \frac{dv}{\nu} \approx \frac{0,21 \cdot 0,69}{1,4 \cdot 10^{-5}} \approx 10^4$$

lze konstatovat, že naše proudění je turbulentní a v tomto případě platí dostatečně přesně Newtonův vzorec (čili závislost na kvadrátu velikosti rychlosti v). Nezbytná úprava tělesa (doplnění svislými křídélky) může způsobit turbulence pod plochou desky. Příslušnou změnu tabelovaného součinitele C však neumíme odhadnout. Lokální ani časovou změnu hustoty vzduchu při měření (s ohledem na rychlost pohybu v) nepředpokládáme.

Pavel Brom

paja@fykos.mff.cuni.cz

Úloha III. S ... Lagrangeovy rovnice 1. druhu (5 bodů; průměr 3,92; řešilo 12 studentů)

- a) Mějme hmotný bod zavěšený na nehmotném a nepružném vlákně. Zaveďte kartézskou souřadnicovou soustavu a v ní napište vazebnou podmínku pro hmotný bod.
 b) Napište Lagrangeovy rovnice 1. druhu pro hmotný bod z části a). Ukažte, že z nich plyne pohybová rovnice matematického kyvadla

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0, \quad (7)$$

kde φ je úhlová výchylka z rovnovážné polohy.

- c) Malé těleso je v klidu na vrcholu polokoule a začne klouzat dolů. Pomocí Lagrangeových rovnic 1. druhu určete, v jaké výšce se těleso odlepí od polokoule. (Nápověda: Těleso se odlepí v okamžiku, kdy $\lambda = 0$.)

Zadali autoři seriálu Honza Prachař a Jarda Trnka.

- a) Souřadnicovou soustavu zavedeme následujícím způsobem (viz obr. 8). Počátek zvolíme v místě závěsu, osu x orientujeme vodorovně doprava, osu y svisle vzhůru.

Hmotný bod se zřejmě pohybuje po kružnici se středem v počátku soustavy souřadnicové o poloměru l , kde l je délka závěsu. Stačí nám tedy napsat odpovídající rovnici kružnice

$$f = x^2 + y^2 - l^2 = 0,$$

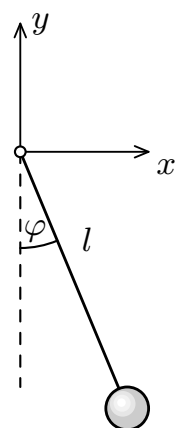
což je vazebná podmínka hmotného bodu.

- b) Přistupme nyní k sestavení Lagrangeovy rovnice 1. druhu. Na hmotný bod působí kromě vazebné síly ještě síla tíhová $\mathbf{F}_G = (0, -mg)$. Dle seriálu má pohybová rovnice pro x -ovou souřadnici tvar

$$m\ddot{x} = 0 + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 2\lambda x,$$

obdobně pro y -ovou souřadnici

$$m\ddot{y} = -mg + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = -mg + 2\lambda y.$$



Obr. 8

Abychom vyloučili neznámou funkci λ , první rovnici vynásobíme y a odečteme od ní x -násobek druhé,

$$m(\ddot{x}y - \dot{y}x) = mgx. \quad (8)$$

Tuto rovnici nyní přepíšeme pomocí parametrů l a φ , abychom dostali rovnici (7).

Vztah mezi x , y a výchylkou z rovnovážné polohy φ je (viz obr. 8)

$$x = l \sin \varphi, \quad y = -l \cos \varphi, \quad (9)$$

tyto vztahy dvakrát derivujeme podle času

$$\ddot{x} = -l \sin \varphi \dot{\varphi}^2 + l \cos \varphi \ddot{\varphi}, \quad \ddot{y} = l \cos \varphi \dot{\varphi}^2 + l \sin \varphi \ddot{\varphi}. \quad (10)$$

Dosaďme nyní z (9) a (10) do rovnice (8), dostáváme

$$\begin{aligned} l^2 \sin \varphi \cos \varphi \dot{\varphi}^2 - l^2 \cos^2 \varphi \ddot{\varphi} - l^2 \cos \varphi \sin \varphi \dot{\varphi}^2 - l^2 \sin^2 \varphi \ddot{\varphi} &= gl \sin \varphi, \\ -l \ddot{\varphi} &= g \sin \varphi, \end{aligned}$$

což je rovnice matematického kyvadla ze zadání.

- c) Poloměr polokoule označme R a souřadnicovou soustavu zvolme stejnou jako v části a). Jelikož tělísko klouže po polokouli, vazebná podmínka bude $f = x^2 + y^2 - R^2 = 0$. Lagrangeovy rovnice 1. druhu budou shodné s těmi, které jsme odvodili v části b),

$$m\ddot{x} = 2\lambda x, \quad m\ddot{y} = -mg + 2\lambda y.$$

Teď provedeme malý trik. První rovnici vynásobíme x , druhou y a sečteme je

$$m(\ddot{x}x + \ddot{y}y) = -mgy + 2\lambda(x^2 + y^2). \quad (11)$$

Dvakrát zderivujeme vazebnou podmínku

$$\frac{df}{dt} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 0, \quad \frac{d^2f}{dt^2} = 2\dot{x}^2 + 2\dot{y}^2 + 2x\ddot{x} + 2y\ddot{y} = 0. \quad (12)$$

Nyní si stačí uvědomit, že $R^2 = x^2 + y^2$ a pro rychlost platí $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$, potom z rovnic (11) a (12) dostaneme

$$-mv^2 = -mgy + 2\lambda R^2.$$

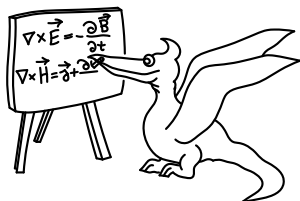
Abychom si ušetřili integrování pohybových rovnic, použijeme rovnou zákon zachování energie $mv^2/2 + mgy = mgR$, který spolu s poslední rovnicí dává

$$2mg(y - R) = -mgy + 2\lambda R^2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2}{3}R + \frac{2\lambda R^2}{3mg}.$$

Nás zajímá poloha tělíska v okamžiku, kdy $\lambda = 0$ (právě tehdy se odlepí od polokoule). Výška tělesa v tomto okamžiku bude $y = 2R/3$.

Honza Prachař

honzik@fykos.mff.cuni.cz



Seriál na pokračování

Kapitola 3: Použití Lagrangeova formalismu, příklady

Hlavním účelem tohoto seriálu není vyložit rigorózně všechnu teorii, která se týká Lagrangeovského formalismu, ale spíše naučit ho efektivně používat, zaměříme se teď na příklady. Proto se nezaledněte složitějšího matematického aparátu a zkuste projít příklady uvedené v této kapitole, stačí znát pojem derivace.

V předcházejících kapitolách byl výklad prokládán příklady, ty však byly většinou velmi jednoduché. Cílem nebylo tyto úlohy vyřešit, to by šlo daleko jednodušeji s pomocí newtonovské mechaniky, ale ukázat principy, pomocí nichž se řeší složitější příklady. Právě na ty se teď zaměříme. Ukáže se, že Lagrangeův přístup může být v obtížnějších úlohách daleko efektivnější než newtonovský.

Zatím jsme si vysvětlili, jak fungují určité principy mechaniky a jak s nimi počítat. Umíme počítat s D'Alembertovým principem, Lagrangeovými rovnicemi, ale nevíme, kdy přesně co máme použít.

Princip virtuální práce

Tento princip je velmi výhodný při určování rovnovážných poloh. Je naopak téměř nepoužitelný při počítání dynamického vývoje soustavy. Samotný výpočet často spočívá v tom, že vyjádříme polohu těžiště soustavy pomocí nějakých parametrů (které se mohou měnit – třeba úhel, nebo nějaká vzdálenost). Potom řešíme rovnici vyjadřující princip virtuální práce

$$\sum_{i=1}^3 F_i \delta x_i = 0.$$

Řešení se většinou redukuje na hledání extrému nějaké souřadnice těžiště x_i jako funkce zvolených parametrů, neboť v těchto extrémních bodech platí $\delta x_i = 0$. Jedná se vlastně o hledání minimální potenciální energie.

Příklad 8 – rovnovážná poloha tyčky

Najděte rovnovážnou polohu tyčky znázorněné na obrázku 9. Má délku $2l$, je opřena o hranu stolu a stěnu.

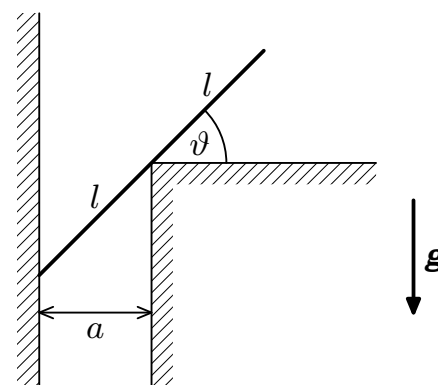
Řešení

Protože se jedná o statickou úlohu, použijeme princip virtuální práce. Pokud si zavedeme souřadnicovou soustavu s vodorovnou osou x a svislou osou y , můžeme psát

$$F_x \delta x + F_y \delta y = 0.$$

Protože jediná vtištěná síla je zde tíha tyčky G , která má směr osy y , redukuje se tento vztah na tvar

$$G \cdot \delta y = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta y = 0.$$



Obr. 9

Protože tíhová síla působí v těžišti tělesa, je δy virtuálním posunutím těžiště. Výšku těžiště si můžeme parametrizovat pomocí úhlu ϑ , který svírá tyčka se stolem. Potom výšku těžiště vyjádříme jako $y = -a \operatorname{tg} \vartheta + l \sin \vartheta$. Virtuální posunutí bude nulové, když funkce $y = y(\vartheta)$ bude nabývat extrému. To je důležité si uvědomit i v jiném případě. Platí tedy

$$\delta y = \frac{dy}{d\vartheta} \cdot \delta\vartheta = \left(-\frac{a}{\cos^2 \vartheta} + l \cos \vartheta \right) \delta\vartheta = 0.$$

Potom již lehko dostaneme

$$-\frac{a}{\cos^2 \vartheta} + l \cos \vartheta = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos^3 \vartheta = \frac{a}{l}.$$

Z toho již lehko najdeme hledaný výsledek.

Lagrangeovy rovnice 1. druhu

I když mají Lagrangeovy rovnice 1. druhu svůj velký význam, k samotným výpočtům se příliš neužívají. Jednak bývá často obtížné najít vazebnou rovnici (nebo je řešit v obecných souřadnicích) a hlavně se dají většinou použít ke stejnému výpočtu Lagrangeovy rovnice 2. druhu, se kterými se počítá lépe. Nicméně je dobré mít Lagrangeovy rovnice 1. druhu na zřeteli a zapamatovat si ideu, ze které vycházejí.

Lagrangeovy rovnice 2. druhu

Ty mají naopak velmi široké použití, a to nejen v mechanice. Nalezení potenciální a kinetické energie bývá totiž často daleko jednodušší, než se zabývat působícími silami. Používají se tedy k určování pohybu dynamických systémů, např. různých zrychlených pohybů či kmitání. Problém se v podstatě redukuje pouze na nalezení vhodných souřadnic, v nichž vyjádříme Lagrangián.

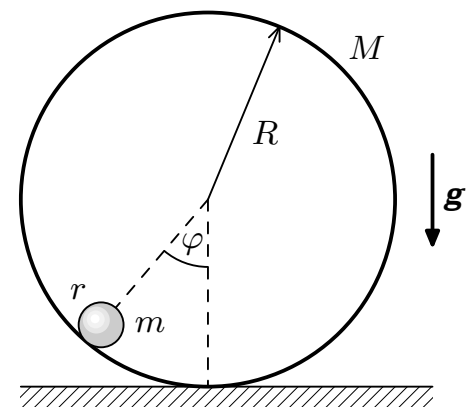
Příklad 9 – dutý válec s kuličkou

Najděte periodu malých kmitů soustavy na obrázku 10. Dutý válec, ke kterému je pevně připevněna kulička, se pohybuje volně.

Řešení

Válec se může jen převalovat z jedné strany na druhou, má tedy jeden stupeň volnosti. Za souřadnici si zvolíme úhel otočení válce z rovnovážné soustavy. Pro kinetickou energii platí

$$T = \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} \left(2MR^2 + \frac{2}{5}mr^2 + m(R-r)^2 \right) \dot{\varphi}^2.$$



Obr. 10

K určení momentu setrvačnosti kuličky vůči ose procházející středem dutého válce jsme použili Steinerovu větu. Potenciální energie dutého válce zůstává stále stejná, pro potenciální energii kuličky platí

$$V = mgR(1 - \cos \varphi).$$

Dosadíme do Lagrangeových rovnic.

$$-\frac{\partial(T - V)}{\partial \varphi} + \frac{d}{dt} \frac{\partial(T - V)}{\partial \dot{\varphi}} = mgR \sin \varphi + \left(2MR^2 + \frac{2}{5}mr^2 + m(R - r)^2 \right) \ddot{\varphi} = 0.$$

Zavedeme-li aproximaci $\sin \varphi \approx \varphi$, dostaneme po úpravě

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgR}{2MR^2 + m(R^2 - 2Rr + 7r^2/5)} \varphi = 0,$$

což je rovnice harmonických kmitů a platí

$$\omega^2 = \frac{mgR}{2MR^2 + m(R^2 - 2Rr + 7r^2/5)}.$$

Odtud již snadno vypočítáme periodu kmitů.

Příklad 10 – soustava břemena a kladek

Na závěr kapitoly spočítejme jeden příklad třemi různými způsoby, které teoretická mechanika nabízí. Budeme určovat zrychlení tělesa M na obrázku 11.

Řešení

Zvolme kartézskou soustavu tak, že osa x míří dolů. Pohyb všech těles je zřejmě jednorozměrný, budeme se zabývat jen x -ovou souřadnicí. Označíme x_1 , x_2 souřadnice kladek, X souřadnici břemene. Levé lano má délku L_1 , pravé L_2 . Vazebné podmínky jsou vyjádřeny rovnicemi

$$f_1 = 2x_1 + X - L_1 = 0,$$

$$f_2 = 2x_2 + X - L_2 = 0.$$

Systém má tedy jeden stupeň volnosti, za nezávislou souřadnici zvolíme X . Pro virtuální posunutí kladek dostaneme podmínky

$$\delta x_1 = \delta x_2 = -\frac{1}{2} \delta X.$$

Pro zrychlení derivováním vazebných podmínek obdržíme

$$\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = -\frac{1}{2} \ddot{X}. \quad (13)$$

Zde se cesty řešení rozcházejí podle použité metody.

a) D'Alembertův princip

Pohybová rovnice

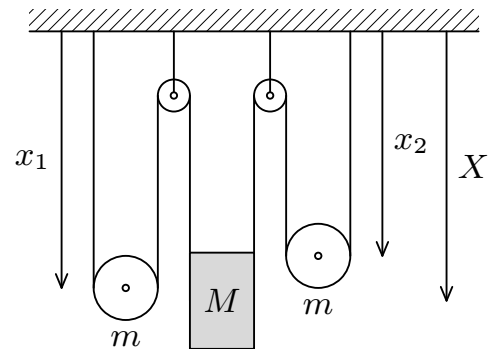
$$\sum_{i=1}^3 (\mathbf{F}_i - m\mathbf{a}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

po rozepsání dává

$$m_1(g - \ddot{x}_1) \cdot \delta x_1 + M(g - \ddot{X}) \cdot \delta X + m_2(g - \ddot{x}_2) \cdot \delta x_2 = 0.$$

Po dosazení za virtuální posunutí a zrychlení dostaneme

$$\left[-\frac{1}{2}m_1(g + \frac{1}{2}\ddot{X}) + M(g - \ddot{X}) - \frac{1}{2}m_2(g + \frac{1}{2}\ddot{X})\right] \cdot \delta X = 0.$$



Obr. 11

Z toho již snadno vyjádříme zrychlení \ddot{X} .

$$\ddot{X} = \frac{4M - 2(m_1 + m_2)}{4M + m_1 + m_2} g. \quad (14)$$

b) Lagrangeovy rovnice 1. druhu

Spolu s vazebnými podmínkami máme soustavu tří rovnic (pro každé těleso jednu)

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 + \sum_{A=1}^2 \lambda_A \text{grad}_1 f_A &= m\ddot{\mathbf{r}}_1, \\ \mathbf{F}_2 + \sum_{A=1}^2 \lambda_A \text{grad}_2 f_A &= m\ddot{\mathbf{r}}_2, \\ \mathbf{F} + \sum_{A=1}^2 \lambda_A \text{grad} f_A &= M\ddot{\mathbf{R}}. \end{aligned}$$

Vazebné rovnice jsou dvě, dva musí být také koeficienty λ . Pro gradienty dostaneme po derivování

$$\begin{aligned} \text{grad}_1 f_1 &= (2, 0, 0), & \text{grad}_1 f_2 &= (0, 0, 0), \\ \text{grad}_2 f_1 &= (0, 0, 0), & \text{grad}_2 f_2 &= (2, 0, 0), \\ \text{grad} f_1 &= (1, 0, 0), & \text{grad} f_2 &= (1, 0, 0). \end{aligned}$$

Po rozepsání soustavy v x -ových složkách dostaneme

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= m_1 g + 2\lambda_1, \\ m_2 \ddot{x}_2 &= m_2 g + 2\lambda_2, \\ M \ddot{X} &= Mg + \lambda_1 + \lambda_2. \end{aligned}$$

Po dosazení za zrychlení \ddot{x}_1 a \ddot{x}_2 z rovnice (13) dostaneme tři rovnice pro tři neznámé \ddot{X} , λ_1 , λ_2 . Řešením vychází (14) a navíc pro napětí lan

$$\lambda_1 = -m_1 g \frac{3M}{4M + m_1 + m_2}, \quad \lambda_2 = -m_2 g \frac{3M}{4M + m_1 + m_2}.$$

c) Lagrangeovy rovnice 2. druhu

Uvážíme-li, že potenciální energie tělesa V je závislá pouze na X a kinetická energie T pouze na \dot{X} , rovnici můžeme psát ve tvaru

$$\frac{\partial V}{\partial X} + \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{X}} = 0. \quad (15)$$

Podobná podmínka jako pro zrychlení (13) a pro virtuální posunutí platí i pro rychlosti. Derivací vazebné podmínky

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = -\frac{1}{2} \dot{X}.$$

Pro kinetickou a potenciální energii potom dostáváme

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}M\dot{X}^2 = \frac{1}{8}(4M + m_1 + m_2)\dot{X}^2,$$

$$V = m_1x_1g + m_2x_2g + MXg = \frac{1}{2}gX(2M - m_1 - m_2) + \frac{1}{2}m_1gL_1 + \frac{1}{2}m_2gL_2.$$

Po dosazení do (15) pak vyjde vztah pro zrychlení \ddot{X}

$$\frac{1}{2}g(2M - m_1 - m_2) + \frac{1}{4}(4M + m_1 + m_2)\ddot{X},$$

odtud

$$\ddot{X} = \frac{4M - 2(m_1 + m_2)}{4M + m_1 + m_2} g.$$

Úloha V. S ... Merkur, jáma a kyvadlo

V následujících úlohách ověříme vaši znalost všech dosud probraných kapitol mechaniky, tj. Newtonova formalismu, D'Alembertova principu a Lagrangeova formalismu.

- a) Představte si planetu Merkur obíhající kolem Slunce. Jak známo, jeho eliptická trajektorie se stáčí (posouvá se poloha perihélia), což nemůže být způsobeno gravitační silou

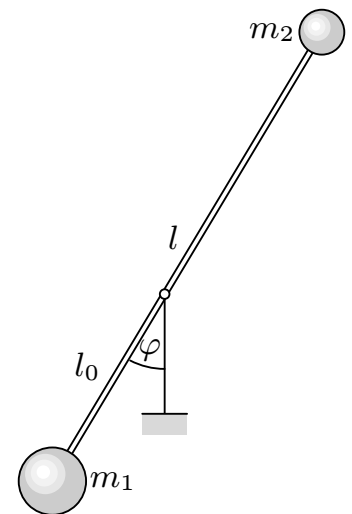
$$\mathbf{F} = \kappa \frac{mM\mathbf{r}}{r^3}.$$

Dokažte, že když k této síle přidáme dodatečnou centrální sílu

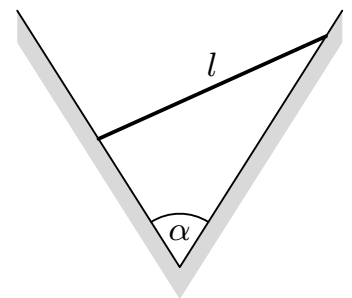
$$\mathbf{F} = C \frac{\mathbf{r}}{r^4},$$

kde C je vhodná konstanta, celá trajektorie (elipsa) se bude otáčet konstantní úhlovou rychlostí (čili existuje vztažná soustava otáčející se konstantní úhlovou rychlostí taková, že trajektorie v ní bude elipsa). Znáte-li tuto úhlovou rychlost Ω , určete konstantu C . Stačí takováto oprava k záchraně Newtonovy teorie gravitace?

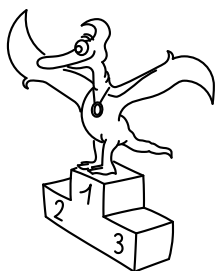
- b) Určete rovnovážné polohy homogenní tenké tyčky délky l opřené o vnitřní stěny jamky ve tvaru písmene „V“ (viz obr. 13) v závislosti na vrcholovém úhlu jamky α .
- c) Pomocí Lagrangeových rovnic vypočítejte periodu malých kmitů dvojitelného kyvadla na obrázku 12. Závaží na koncích nehmotné tyčky délky l mají hmotnosti m_1 a m_2 , vzdálenost bodu závěsu od závaží o hmotnosti m_1 je l_0 .



Obr. 12



Obr. 13



Pořadí řešitelů po III. sérii



Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	III	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	4	5	8	5	34	100	100
1. <i>Stanislav Vosol sobě</i>	G U Balvanu Jablonec nN	4	3	–	4	3	7	3	24	90	86
2. <i>Ivan Dimitrov</i>		4	1	4	3	1	3	3	19	69	69
3. <i>Anton Repko</i>	G Sv. Mikuláša, Prešov	4	4	4	4	4	–	6	26	86	65
4. <i>Petr Houš těk</i>	G Pelhřimov	4	4	–	4	–	–	4	16	85	50
5. <i>Roman Fiala</i>	VOŠ a SPŠE Plzeň	2	3	–	1	–	–	–	6	68	41
6. <i>Robert Roreitner</i>	MasSŠ chemická, Praha	2	1	–	2	1	6	–	12	50	35
7.–8. <i>Bedřich Roskovec</i>	MasG Petáková, Plzeň	2	4	–	4	2	–	–	12	57	32
<i>Jakub Závodný</i>	G Bratislava, Grösslingova	–	–	–	–	–	–	–	0	80	32
9. <i>Zdeněk Kučka</i>	G Neumannova, Žďár n. S.	–	–	–	–	–	–	–	0	67	28
10. <i>Petr Morávek</i>	G Dašická, Pardubice	–	–	–	–	–	–	–	0	86	25
11.–12. <i>Kateřina Fišerová</i>	G Lepařovo, Jičín	4	–	–	2	–	–	–	6	81	22
<i>Peter Greškovič</i>	G Svidník	3	–	–	–	–	–	–	3	56	22
13. <i>Zuzana Safernová</i>	G Bílovec	–	–	–	–	–	–	–	0	95	20
14. <i>Petr Vaško</i>	MasG Petáková, Plzeň	4	1	–	1	–	–	–	6	67	18
15.–16. <i>Pavluřina Böhmová</i>	G Komenského Havířov	–	–	–	–	–	–	–	0	52	14
<i>Petr Kubala</i>	SPŠ Frýdek Místek	1	–	–	–	–	–	–	1	39	14
17.–18. <i>Daniel Božík</i>	G Jura Hronca	4	4	–	2	–	–	–	10	83	10
<i>Petr Novotný</i>	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	43	10
19. <i>Lenka Doubravová</i>	G Matyáše Lercha, Brno	–	–	–	–	–	–	–	0	60	9
20.–21. <i>Jana Babováková</i>	G Most	–	–	–	–	–	–	–	0	42	8
<i>Michal Humpula</i>	G Uherský Brod	–	–	–	–	–	–	–	0	50	8
22.–24. <i>Zdeněk Lochman</i>	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	37	7
<i>Tomáš Mihalík</i>	G Husitská	–	–	–	–	–	–	–	0	22	7
<i>Denis Vald</i>	G Jírovceva, Č. Budějovice	–	–	–	–	–	–	–	0	41	7
25.–27. <i>Markéta Kavalířová</i>	G Českolipská Praha	2	–	–	–	–	–	–	2	75	6
<i>Markéta Vilimovská</i>	G Českolipská Praha	2	–	–	–	–	–	–	2	75	6
<i>Kateřina Žabková</i>	G a SPgŠ Liberec	1	0	–	–	1	–	–	2	25	6
28. <i>Jiří Kubr</i>	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	27	3

Kategorie třetích ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	III	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	4	5	8	5	34	100	100
1. <i>Tomáš Bednárík</i>	G Vsetín	4	1	–	4	3	6	4	22	74	71
2. <i>Aleš Podolník</i>	G Kapitána Jaroše, Brno	4	3	0	1	–	7	–	15	73	57
3. <i>Miroslav Hrubý</i>	BG Barvičova Brno	2	4	4	–	2	7	–	19	65	56
4. <i>Martin Konečný</i>	G Boskovice	2	2	–	2	3	7	3	19	57	48
5. <i>Marek Scholz</i>	G Neratovice	4	–	–	–	–	–	5	9	85	47
6. <i>Petr Bezmozek Dvořák</i>	SPŠ Jihlava	4	2	–	0	1	3	–	10	56	46
7. <i>Peter Perešíni</i>	G J. G. Tajovského	5	4	–	4	–	–	–	13	87	41
8. <i>Petra Malá</i>	G Moravský Krumlov	1	–	–	–	–	3	–	4	59	39
9.–10. <i>Miroslav Janáček</i>	G a SPgŠ Liberec	0	–	–	2	2	8	–	12	58	38
<i>Monika Josieková</i>	G Český Těšín	2	4	–	4	–	–	5	15	58	38
11. <i>Martin Koštejn</i>	G a SPgŠ Liberec	2	–	–	2	–	5	–	9	60	36
12. <i>Libor Šachl</i>	G Terezy Novákové Brno	2	4	–	–	1	1	–	8	47	34
13. <i>Jan Bednář</i>	COP Hronov	4	1	–	1	–	–	–	6	63	30
14.–17. <i>Ondřej Bílka</i>	G Lesní čtvrť, Zlín	–	–	–	–	–	–	–	0	71	29
<i>Roman Derco</i>	G Svidník	4	3	–	–	–	–	–	7	73	29
<i>Petr Smital</i>	G Kapitána Jaroše, Brno	2	–	–	–	–	–	–	2	71	29
<i>Jenda Valášek</i>	G Broumov	–	3	–	3	–	–	–	6	74	29
18.–19. <i>Zuzana Pôbišová</i>	G J. G. Tajovského	2	–	–	–	–	3	–	5	65	28
<i>Slavomír Takáč</i>	G Nové Zámky	–	–	–	–	–	–	–	0	88	28
20. <i>Adam Přenosil</i>	G Sladkovského n., Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	70	26
21. <i>Vojtěch Molda</i>	G Vsetín	2	1	–	1	2	–	–	6	44	25
22. <i>Michal Sívák</i>	G Ľudovíta Štúra	2	–	–	–	–	6	–	8	66	23
23.–24. <i>Tereza Klimošová</i>	G Lanškroun	–	–	–	–	–	–	–	0	88	21
<i>Vladimír Sívák</i>	G Ľudovíta Štúra	–	–	–	–	–	5	–	5	60	21
25. <i>Martina Miková</i>	G Olomouc	–	–	–	–	–	–	–	0	43	17
26.–27. <i>Beáta Hergelová</i>	G Lučenec	–	–	–	–	–	–	–	0	50	16
<i>Tomáš Jirotko</i>	G Klatovy	2	1	–	–	–	–	–	3	50	16
28.–29. <i>Pavel Burda</i>	G Křenová Brno	–	–	–	1	–	–	–	1	56	15
<i>Jiří Hloska</i>	G Terezy Novákové Brno	–	–	–	–	–	–	–	0	60	15
30. <i>Jana Pokorná</i>	COP Hronov	1	–	–	–	–	–	–	1	58	14
31.–32. <i>Michal Seidel</i>	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	58	11
<i>Tomáš Šťastný</i>	G D. Tatarku, Poprad	–	–	–	–	–	–	–	0	34	11
33. <i>Lucie Hympánová</i>	G Kladno	–	–	–	–	–	–	–	0	28	10
34.–35. <i>Jaroslav Hančl</i>	G Bílovec	–	–	–	–	–	–	–	0	73	8
<i>Jana Vrábelová</i>	G Ľudovíta Štúra	–	–	–	–	–	–	–	0	35	8
36. <i>Martin Hrdlička</i>	G Louny	–	–	–	–	–	–	–	0	64	7
37. <i>Milan Klicpera</i>	G Čelákovice	–	–	–	–	–	–	–	0	21	6
38.–40. <i>Vendula Exnerová</i>	G Nad Štolou, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	45	5
<i>Radek Papoušek</i>	G Lesní čtvrť, Zlín	–	–	–	–	–	–	–	0	45	5
<i>Hana Vítová</i>	G Bystrice n. Pern.	–	–	–	–	–	–	–	0	56	5
41.–44. <i>Radka Bystřická</i>	G Hodonín	–	–	–	–	–	–	–	0	57	4
<i>Tomáš Janda</i>	G Klatovy	–	4	–	–	–	–	–	4	100	4
<i>Jan Matoušek</i>	G Žižkova, Kolín	–	–	–	–	–	–	–	0	25	4
<i>Darja Suchá</i>	G Kladno	–	–	–	–	–	–	–	0	57	4
45. <i>František Matyska</i>	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	20	3
46.–47. <i>Martin Bernátek</i>	SOŠ Krnov	–	–	–	–	–	–	–	0	25	2
<i>Ondřej Lébl</i>	G Nymburk	–	–	–	–	–	–	–	0	29	2

Kategorie druhých ročníků

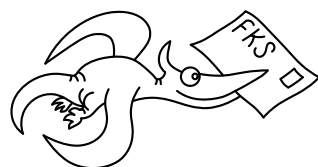
jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	III	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	4	5	8	5	34	100	100
1. <i>Pavel Motloch</i>	G Petra Bezruče	4	4	–	4	4	8	6	30	91	84
2. <i>Jakub Benda</i>	G Jana Nerudy Praha	2	–	–	2	3	–	4	11	84	67
3. <i>Lukáš Malina</i>	G Zborovská, Praha	–	–	–	–	–	7	–	7	74	42
4. <i>Martin Formánek</i>	G Uherské Hradiště	2	3	–	2	1	–	1	9	51	38
5. <i>Jana Lochmanová</i>	G Chodovická Praha	2	3	–	4	2	–	–	11	47	34
6.–8. <i>Ondřej Bogár</i>	G Ludovíta Štúra	4	–	–	–	–	5	–	9	54	33
<i>Radim Pechal</i>	SPŠE Rožnov p. R.	4	–	0	–	1	4	–	9	63	33
<i>Jana Przewczková</i>	G Komenského Havířov	4	1	–	–	1	8	–	14	58	33
9. <i>Jakub Prouza</i>	COP Hronov	2	3	–	2	–	–	–	7	58	25
10. <i>Marek Bukáček</i>	G Havlíčkův Brod	–	–	–	2	–	5	–	7	47	24
11. <i>Juraj Zajac</i>	G Ludovíta Štúra	–	–	–	–	–	4	–	4	51	20
12. <i>Martin Lexa</i>	G Vysoké Mýto	–	–	–	–	–	7	–	7	54	19
13. <i>Vlastimil Peksa</i>	G Zborovská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	67	18
14.–15. <i>Miroslav Kaděra</i>	G Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	0	67	16
<i>Jaroslava Lavková</i>	G Poprad	–	–	–	–	–	–	–	0	40	16
16. <i>Kristýna Krejčová</i>	G Tišnov	–	–	–	–	–	–	–	0	54	15
17. <i>Daniel Šimsa</i>	G Josefa Jungmanna	2	1	–	–	1	1	3	8	38	13
18. <i>Peter Berta</i>	G Velké Kapušany	4	–	–	3	–	–	–	7	69	11
19. <i>Petr Dvořák</i>	G V. Makovského	2	–	–	–	–	–	–	2	63	10
20. <i>Jiří Špale</i>	GOA Sedlčany	–	–	–	–	–	–	–	0	73	8
21. <i>Beáta Garšicová</i>	G Vídeňská, Brno	–	–	–	–	–	–	–	0	47	7
22.–23. <i>Petr Šácha</i>	G Tachov	–	–	–	–	–	–	–	0	32	6
<i>Martin Štys</i>	SOU Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	75	6
24. <i>Miloslava Kučeríková</i>	G Poprad	–	–	–	–	–	–	–	0	36	4
25. <i>Petra Votavová</i>	G Cheb	–	–	–	–	–	–	–	0	11	3
26.–27. <i>Tomáš Ehrlich</i>	G Holešov	–	–	–	–	–	–	–	0	50	2
<i>Přemysl Šrámek</i>	G Dašická, Pardubice	–	–	–	–	–	–	–	0	18	2
28.–29. <i>Martin Berka</i>	G Moravská Třebová	–	–	–	–	–	–	–	0	0	0
<i>Jana Susová</i>	GOA Sedlčany	–	–	–	–	–	–	–	0	0	0

Kategorie prvních ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	P	E	S	III	%	Σ
		4	4	4	4	5	8	5	34	100	100
1. Tereza Fantová	G Benešov	1	1	–	3	–	4	–	9	39	28
2. Katarína Rozvadská	G Ludovíta Štúra	3	–	–	0	2	5	–	10	42	27
3. Katarína Bazová	G Ludovíta Štúra	–	–	–	–	–	4	–	4	48	25
4.–5. Lucie Pospíšilová	G Matyáše Lercha, Brno	–	–	–	–	–	–	–	0	53	21
Jan Valášek	G Zborovská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	58	21
6. Josef Müller	G dr. Josefa Pekaře	–	–	–	–	–	–	–	0	38	18
7. Jan Červenka	G Ostrava - Zábřeh	2	–	–	3	–	–	–	5	38	17
8. Lenka Sabová	G Javorová, S. Nová Ves	–	–	–	–	–	–	–	0	57	16
9. Michaela Kubinová	G Ostrava - Zábřeh	2	–	–	–	–	–	–	2	42	14
10. Michal Berta	G Trebišov	2	2	–	0	1	–	–	5	18	13
11. Zuzana Jungrová	G Blovice	2	–	–	–	–	–	–	2	27	12
12. Zdeněk Vais	G Boskovice	1	–	–	–	–	–	–	1	32	10
13. Petra Navrátilová	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	26	7
14. Jan Macháček	G Jeseník	–	–	–	–	1	–	–	1	18	5
15. Petr Hons	G Ostrava - Zábřeh	–	–	–	–	–	–	–	0	15	4
16. Aleš Růžička	G Tábor	–	–	–	–	–	–	–	0	13	3
17.–18. Vlastimil Daníček	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	4	2
Jan Navrátil	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	18	2
19. Barbora Henzlová	G Matyáše Lercha, Brno	–	–	–	–	–	–	–	0	25	1

Soutěž ve hledání chyb

jméno	III	IV	Σ
1. Jan Matoušek	9	10	19
2.–3. Jana Przeczková	8	6	14
2.–3. Martin Konečný	7	7	14
4. Jakub Benda	6	3	9
5. Petra Malá	3	3	6
6. Tomáš Bednárík	3	1	4
7. Beáta Hergelová	–	1	1

**FYKOS**

UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta

Ústav teoretické fyziky

V Holešovičkách 2

180 00 Praha 8

www: <http://fykos.mff.cuni.cz>e-mail pro řešení: fykos-solutions@mff.cuni.cze-mail: fykos@mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.