18. ročník, úloha I . S ... *kinematika hmotného bodu* *(5 bodů; průměr 3,84; řešilo 31 studentů)*

a) *Poloha hmotného bodu v závislosti na čase v kartézské souřadnicové soustavě je popsána polohovým vektorem*

$$\boldsymbol{r}(t) = (R\cos\omega t, R\sin\omega t, d)\,.$$

Určete, jak závisí na čase vektory $\boldsymbol{v}(t)$ a $\boldsymbol{a}(t)$. Vypočítejte také tečnou, normálovou a binormálovou složku zrychlení.

b) *Kolo poloměru R se valí bez prokluzování po přímé dráze rychlostí v. S kolem je pevně spojen bod ve vzdálenosti r od středu. Určete jeho pohyb a rychlost jako funkce času v soustavě spojené se Zemí. Může být jeho rychlost v určitém okamžiku nulová?*

Zadali autoři seriálu Honza Prachař a Jarda Trnka.

a) Vektor rychlosti $\boldsymbol{v}$ je roven první časové derivaci polohového vektoru $\boldsymbol{r}$

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(R\cos\omega t, R\sin\omega t, d)}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}R\cos\omega t}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}R\sin\omega t}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}d}{\mathrm{d}t}\right) =$$
$$= (-R\omega\sin\omega t, R\omega\cos\omega t, 0)\,.$$

Vektor zrychlení $\boldsymbol{a}$ je definován jako první časová derivace vektoru rychlosti, platí tedy

$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}(t)}{\mathrm{d}t} = (-R\omega^2\cos\omega t, -R\omega^2\sin\omega t, 0)\,.$$

K určení tečné, normálové a binormálové složky zrychlení použijeme vztahy ze seriálu. Nejprve vypočítáme velikost rychlosti

$$v = |\boldsymbol{v}| = \sqrt{R^2\omega^2\sin^2\omega t + R^2\omega^2\cos^2\omega t} = \sqrt{R^2\omega^2} = R\omega\,,$$

kde jsme využili $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Všimněte si, že velikost rychlosti nezávisí na čase. Hmotný bod koná rovnoměrný pohyb po kružnici o poloměru R úhlovou rychlostí ω. Pro tečnou složku zrychlení vychází

$$a_\mathrm{t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\,(R\omega)}{\mathrm{d}t} = 0$$

a pro normálovou (poloměr oskulační kružnice je roven R)

$$a_\mathrm{n} = \frac{v^2}{R} = \frac{R^2\omega^2}{R} = R\omega^2.$$

Binormálová složka zrychlení a_b je vždy nulová.

Jediná nenulová složka zrychlení je tedy normálová, zrychlení má směr normály a jeho velikost je a_n.

b) Zaveďme si kartézskou souřadnicovou soustavu S následovně. Osa x je vodorovná a míří ve směru pohybu středu kola, osa y míří svisle vzhůru (viz obr. 1). Pohyb kola je rovinný, osu z není třeba uvažovat. Počátek souřadnicové soustavy umístíme na úroveň země. Polohu středu kola, které se pohybuje rychlostí v, popisuje polohový vektor

$$\boldsymbol{r}_{S'} = (vt, R)\,.$$

Nyní přejděme do soustavy spojené se středem kola, která je rovněž inerciální. V ní si zavedeme souřadnicovou soustavu S' s počátkem ve středu kola a se stejně orientovanými osami x a y. V této soustavě koná hmotný bod, který je upevněn ve vzdálenosti r od středu, pohyb po kružnici. Z analogie s částí a) dostáváme pro polohový vektor

$$\boldsymbol{r}' = (r\cos\omega t, -r\sin\omega t)\,,$$

jen je třeba uvážit, jakým směrem se bude kolo otáčet.

Opět se vraťme do soustavy S spojené se Zemí a vyjádřeme si polohový vektor hmotného bodu. Ten je dán vektorovým součtem $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_{S'} + \boldsymbol{r}'$, dostáváme tedy

$$\boldsymbol{r}(t) = (vt + r\cos\omega t, R - r\sin\omega t)\,.$$

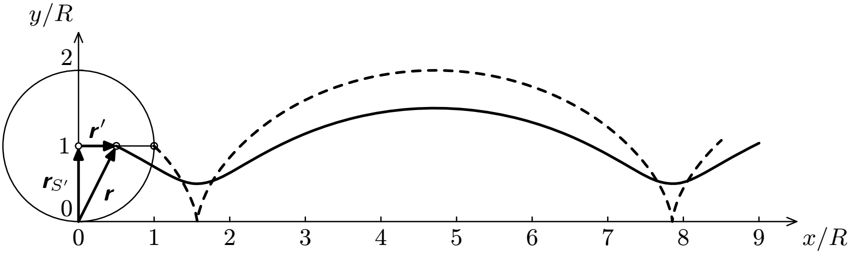
Úhlovou rychlost určíme z podmínky, že valící se kolo neprokluzuje. Platí tedy $v = \omega R$, odtud

$$\boldsymbol{r}(t) = \left(vt + r\cos\frac{vt}{R}, R - r\sin\frac{vt}{R}\right).$$

Hmotný bod se bude pohybovat po cykloidě (viz graf na obrázku 1).

Vektor rychlosti určíme derivováním podle času

$$\boldsymbol{v}(t) = \left(v - \frac{vr}{R}\sin\frac{vt}{R}, -\frac{vr}{R}\cos\frac{vt}{R}\right) = v\left(1 - \frac{r}{R}\sin\frac{vt}{R}, -\frac{r}{R}\cos\frac{vt}{R}\right).$$



Obr. 1

Má-li být rychlost v určitém okamžiku nulová, musí být obě složky rychlosti nulové. Svislá složka rychlosti bude nulová, pokud argument kosinu bude lichý násobek $\pi/2$, což nastane v časech

$$\frac{vt}{R} = (2k+1)\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad t_k = (2k+1)\frac{\pi R}{2v}\,.$$

Rychlost hmotného bodu v těchto časech bude

$$\boldsymbol{v}(t_k) = v\left(1 - \frac{r}{R}\sin\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}\right], 0\right) = v\left(1 \pm \frac{r}{R}, 0\right).$$

Rychlost bude nulová jestliže $r = R$, tedy pokud se hmotný bod nachází na obvodu kola, a k je sudé ($k = 2l$). Vypočítejme ještě polohu hmotného bodu v tomto okamžiku

$$\boldsymbol{r}(t_{2l}) = \left((4l+1)\frac{\pi R}{2}, 0\right),$$

hmotný bod se při nulové rychlosti dotýká země.

Honza Prachař
honzik@fykos.mff.cuni.cz