

18. ročník, úloha II. 2 ... kolik drátů na sloupech? (4 body; průměr 3,32; řešilo 47 studentů)

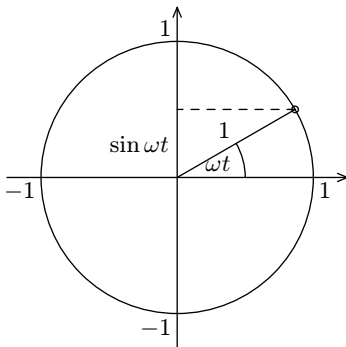
Kolikafázové napětí bychom museli používat, aby efektivní hodnota napětí fáze–zem byla stejná jako efektivní hodnota napětí mezi dvěma sousedními fázemi?

Úlohu navrhl Pavel Augustinský.

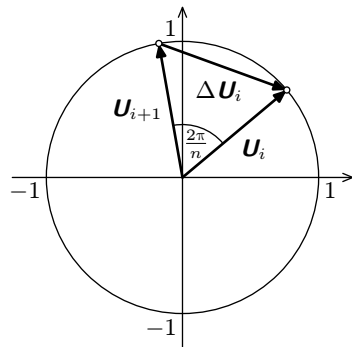
Úloha se dala řešit více způsoby, ukažme si nejprve jeden z těch složitějších. Napětí v síti má sinusový průběh, což můžeme zapsat jako

$$U(t) = U_0 \sin(\varphi + \omega t), \quad \text{kde } \omega = 2\pi f.$$

Funkci sinus však můžeme definovat na jednotkové kružnici (viz obr. 1), proto lze vztahy mezi napětími jednotlivých fází vyjádřit pomocí tzv. fázorového diagramu, což není v podstatě nic jiného než znázornění sinů, které určují časový průběh napětí, na kružnici.



Obr. 1



Obr. 2

Umístíme tedy na kružnici n fázorů tak, aby sousední fázory svíraly úhel $2\pi/n$. Amplituda, popřípadě efektivní hodnota napětí mezi sousedními fázemi je znázorněna fázorem odpovídajícím vektorovému rozdílu $\Delta \mathbf{U} = \mathbf{U}_i - \mathbf{U}_{i+1}$. Z obrázku 2 plyne, že

$$\Delta U = 2U_0 \sin \frac{\pi}{n}.$$

Sdružené napětí (napětí mezi sousedními fázemi) je

$$U_s = 2U_0 \sin \frac{\pi}{n}.$$

Fázové napětí (napětí fáze vzhledem k zemi) je

$$U_f = U_0.$$

(Stále je řeč o amplitudách resp. efektivních hodnotách napětí.)

Chceme, aby se obě tato napětí rovnala $U_f = U_s$.

$$U_0 = 2U_0 \sin \frac{\pi}{n} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Z poslední rovnice dostáváme $n = 6$. Požadavek $n \in \mathbb{N}$ musí být splněn, jinak bychom mohli získat např. něco takového jako 6/5-fázové napětí, které sice splňuje rovnici, ale bohužel (nebo naštěstí) neexistuje.

Úloha se dala řešit i jednodušeji. Stačilo si uvědomit, že aby se příslušná napětí rovnala, musí fázory na obrázku výše tvořit rovnostranný trojúhelník. Z toho ale plyne, že fázový posun mezi \mathbf{U}_i a \mathbf{U}_{i+1} (odpovídající úhlu svíranému fázory) musí být 60° neboli $\pi/3$. Do kružnice se tedy vejde 6 fázorů, a proto musíme mít 6 fází. Drátů musí být samozřejmě o 1 víc, neboť potřebujeme ještě nulák.

Většinou jste dospěli ke správnému výsledku. Někteří z vás však zvolili takový postup, že zkoušeli porovnávat fázové a sdružené napětí pro počet fází dva a více, dokud se nezarazili u šesti. Za to jsem dávala o bod méně, protože takový postup vůbec nedával jistotu, že byla nalezena již všechna řešení, a navíc nebyl příliš elegantní.

Jana Ringelová

jana@fykos.mff.cuni.cz