

**18. ročník, úloha II. 3 ... vrtulník** (4 body; průměr 1,32; řešilo 66 studentů)

Aby se helikoptéra mohla vznášet, musí mít její motor výkon  $P$ . Jaký výkon  $P'$  musí mít helikoptéra, která je přesnou poloviční kopií původní helikoptéry, aby se také vznášela? Předpokládejte, že rotor má 100% účinnost. Úloha byla převzata z MFO v Kanadě.

Jelikož menší vrtulník je poloviční kopií původního vrtulníku, zmenší se všechny jeho rozměry na polovinu. To znamená, že plocha rotoru bude čtvrtinová a objem osminový. Protože je kopie vyrobena ze stejného materiálu, je její hustota stejná jako hustota originálu a pro hmotnost platí

$$m' = \rho V' = \rho \frac{V}{8} = \frac{m}{8}.$$

Aby se vrtulník vznášel, musí motor vynakládat sílu, jejíž svislá složka vykompenzuje gravitační sílu. Menšímu vrtulníku tedy stačí vynaložit osminovou sílu ve srovnání s větším.

Otáčející se listy rotoru vrtulníku překonávají odpor vzduchu a mají takový tvar, aby vzduch odtlačovaly pod sebe. Tím mění hybnost vzduchu – působí tedy na vzduch silou. Vzduch bude podle zákona akce a reakce působit stejně velkou silou opačného směru na listy rotoru. Na úzký proužek listu  $dS$ , který má vzdálenost  $r$  od středu vrtule, šířku  $dr$  a výšku  $a$ , tedy vzduch působí silou o velikosti

$$dF = \frac{1}{2} C dS \rho v^2 = \frac{1}{2} C \rho \omega^2 r^2 a dr, \quad (1)$$

kde  $\rho$  je hustota vzduchu a  $\omega$  úhlová rychlost otáčení vrtule. Celková síla působící na vrtuli je pak integrál z (1)

$$F = \frac{1}{6} C \rho a \omega^2 R^3 \sim a \omega^2 R^3, \quad (2)$$

kde  $R$  je poloměr vrtule.

Jak jsme si řekli výše, svislá složka této síly působící na malý vrtulník, musí být osminová vzhledem k síle působící na velký vrtulník. Protože je úhel naklonění listů u obou rotorů stejný, znamená to, že i velikost této síly musí být osminová. Bohužel rovnost

$$F' = \frac{1}{8} F \quad (3)$$

neplatí. Jelikož jsou všechny parametry až na  $\omega$  určeny poměrem zmenšení, vidíme, že menší vrtulník bude muset mít jinou úhlovou rychlost otáčení vrtule. Tu nyní vypočteme dosazením (2) do (3) (za čárkované veličiny rovnou dosadíme jejich vyjádření nečárkovanými)

$$\frac{a}{2} \omega'^2 \left(\frac{R}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} a \omega^2 R^3 \Rightarrow \omega' = \omega \sqrt{2}.$$

Menší vrtulník se udrží ve vzduchu, pouze když bude  $\sqrt{2}$ krát rychleji otáčet vrtulí. Nyní, když známe potřebnou rychlost otáčení rotoru, můžeme spočítat výkon rotorů obou vrtulníků a porovnat je.

$$dP = dFv = \frac{1}{2} C dS \rho v^3 \sim \omega^3 r^3 a dr \Rightarrow P \sim a \omega^3 R^4,$$

pro poměr dostáváme

$$\frac{P'}{P} = \frac{a/2 \cdot 2\sqrt{2}\omega^3 \cdot (R/2)^4}{a\omega^3 R^4} = \frac{\sqrt{2}}{16} = 2^{-7/2}.$$

Vidíme, že menšímu vrtulníku stačí ke vznášení výkon, který je  $2^{-7/2}$ krát menší než výkon většího vrtulníku.

Velmi častou chybou řešitelů bylo, že u poloviční kopie předpokládali poloviční hmotnost, objem i plochu vrtule. Často také porovnávali jen tíhovou sílu působící na vrtulníky, ale zapomněli uvážit závislost vztlaku na ploše či rychlosti rotoru. Někteří dokonce zanedbávali odpor vzduchu, který je jedním z nejdůležitějších faktorů.

*Petra Suková*  
pet@fykos.mff.cuni.cz