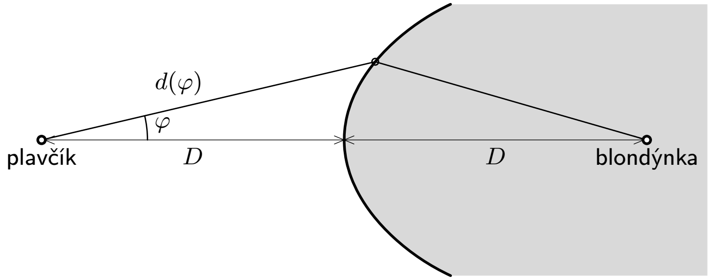
18. ročník, úloha III . 2 ... pobřežní hlídka *(4 body; průměr 2,50; řešilo 32 studentů)*

Plavčík stojící ve vzdálenosti D od břehu moře náhle spatří topící se bujnou blondýnku, která doplavala do vzdálenosti D od břehu (viz obr. 1). Poraďte mu, jak se k ní má co nejrychleji dostat, pokud rychlost jeho běhu je v a rychlost plavání $v/2$. Vzdálenost okraje moře od plavčíka závisí na úhlu φ následujícím předpisem

$$d(\varphi) = \frac{D}{3}\left(8\cos\varphi - 2\sqrt{16\cos^2\varphi - 12\cos\varphi - 3} - 3\right).$$



Obr. 1. Na pláži

Ujasněme si nejdříve, pro jaké úhly má daný tvar pobřeží smysl. Zaveďme substituci $x = 8\cos\varphi - 3$, vztah ze zadání se zjednoduší na

$$d = \frac{D}{3}\left(x - \sqrt{x^2 - 21}\right). \tag{1}$$

Řešení můžeme tedy hledat pro $x \geq \sqrt{21}$, což odpovídá podmínce $\cos\varphi \geq (3+\sqrt{21})/8$. Úhel φ se tedy může pohybovat v intervalu $(-18°35'; +18°35')$.

Je zřejmé, že se ideální dráha plavčíka bude skládat ze dvou úseček – nejdříve uběhne dráhu d po souši a poté uplave dráhu l k blondýnce. Vzdálenost l si můžeme vyjádřit z kosinové věty

$$l = \sqrt{d^2 + 4D^2 - 4Dd\cos\varphi}\,.$$

Vytkneme d a za $\cos\varphi$ dosadíme z uvedené substituce

$$l = d\sqrt{1 + \frac{4D^2}{d^2} - \frac{D(x+3)}{2d}}\,.$$

Vztah (1) upravíme

$$\left(x - \frac{3d}{D}\right)^2 = x^2 - 21 \quad\Rightarrow\quad x = \frac{3d}{2D} + \frac{7D}{2d}$$

a dosadíme do předchozí rovnice

$$l = d\sqrt{1 + \frac{4D^2}{d^2} - \frac{3}{4} - \frac{7D^2}{4d^2} - \frac{3D}{2d}} \quad\Rightarrow\quad 2l = d\sqrt{\left(\frac{3D}{d}\right)^2 - 2\left(\frac{3D}{d}\right) + 1}\,.$$

V posledním výrazu uvidíme dobře známý trojčlen $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$, a protože $3D/d > 1$, můžeme jej odmocnit.

$$2l = 3D - d\,.$$

Běží-li plavčík rychlostí v a plave-li rychlostí $v/2$, bude celková doba nutná k záchraně blondýnky

$$t = \frac{d}{v} + \frac{2l}{v} = \frac{d + 3D - d}{v} = \frac{3D}{v}.$$

Dokázali jsme tedy, že výsledná doba na úhlu φ vůbec nezávisí, plavčík může vystartovat pod libovolným úhlem ze zmíněného intervalu.

Jirka Lipovský
jirka@fykos.mff.cuni.cz