18. ročník, úloha III . 3 ... *nabitá krychle* *(4 body; průměr 2,40; řešilo 5 studentů)*

Jaký je poměr hodnot elektrostatického potenciálu ve vrcholu a ve středu nevodivé rovnoměrně nabité krychle? Celkový náboj na krychli je Q a délka strany krychle je a. Předpokládejte, že elektrický potenciál v nekonečnu je nulový. *Vymyslel Pavel Augustinský.*

Je jasné, že spočítat potenciály od tak složitého (rozuměj nikoliv sféricky symetrického) tělesa, jako je krychle, přímým výpočtem není jednoduché. Pokusíme se proto vymyslet nějaký trik, kterým bychom mohli úlohu vyřešit na jeden řádek.

Jak známo, potenciál je aditivní veličina, což znamená, že máme-li nějaké náboje, které nám vytvoří potenciál φ_1, a nějaké jiné náboje, jež vytvoří potenciál φ_2, všecky náboje dohromady vytvoří potenciál $\varphi_1 + \varphi_2$. Klíč k řešení je představit si krychli jakožto objekt složený z osmi menších krychlí. Tyto krychle se dotýkají vrcholy uprostřed „velké“ krychle. Teď je již zřejmé, že stačí vypočítat, kterak závisí potenciál v rohu krychle na velikosti krychle. Doopravdy, potenciál uprostřed velké krychle si představíme jako sumu potenciálů v rozích malých krychlí (těch je osm). Zapsáno rovnicí

$$\varphi_{\text{krychle střed}} = 8 \cdot \varphi_{\text{poloviční krychle vrchol}} \,.$$

Provedeme následující úvahu. Náboje na krychli se v podstatě rozmístí do uzlů krystalové mřížky a potenciál můžeme napsat jako součet potenciálů od jednotlivých nábojů. Potenciál od jednoho náboje je, jak známo, $\varphi \sim 1/r$ (znak $\sim$ značí úměrnost, vystupuje tam totiž ještě nepodstatný faktor $1/4\pi\varepsilon_0$). Sčítat budeme přes uzly mřížky

$$\varphi \sim \sum \frac{q_i}{r_i} \,.$$

Nyní tuto krychli roztáhneme do všech stran, dokud strany nebudou měřit dvakrát tolik. Všechny vzdálenosti se dvakrát zvětší. V rohu nyní bude potenciál dvakrát větší krychle, ovšem s osminovou nábojovou hustotou, neboť celkový náboj na krychli při roztahování zůstal zachován a musel se rozdělit mezi osm malých krychlí. Nedostatek vyřešíme jednoduše tak, že do uzlů nové mřížky posadíme náboj osmkrát větší. Vzorec pro potenciál dvakrát větší krychle jest tudíž

$$\varphi_{2\times} \sim \sum \frac{q_i'}{r_i'} = \sum \frac{8q_i}{2r_i} = 4 \cdot \sum \frac{q_i}{r_i} \sim 4\varphi \,.$$

Potenciál dvakrát větší krychle je čtyřikrát větší. Všimněme si, že celý postup nezávisí na konkrétním tvaru tělesa (pro potenciál uprostřed galaxie a uprostřed dvakrát větší galaxie (obecně pro geometricky podobné situace) by nám vyšlo to samé). Dále si uvědomme, že za relevantnost triku vděčíme malé mřížkové konstantě — pouze při malých vzdálenostech sousedů můžeme nahradit hustou mřížku s náboji q řídkou mřížkou s náboji $8q$. Ti, co umějí integrovat, si jistě dosadí do příslušného integrálu

$$\varphi \sim \int \frac{\varrho}{r} \,\mathrm{d}V$$

a vyjde jim to samé; jejich mřížka je nekonečně hustá, mají tzv. kontinuum.

Nyní již můžeme napsat výsledek

$$\varphi_{\text{krychle střed}} = 8 \cdot \varphi_{\text{poloviční krychle vrchol}} = 2 \cdot \varphi_{\text{krychle vrchol}} \,,$$

což bylo spočítat.

Matouš Ringel
matous@fykos.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.