

18. ročník, úloha V. 1 ... dáreček od Buffala (4 body; průměr 3,28; řešilo 32 studentů)

Buffalo Bill se už roky snaží polapit Jessieho Jamese, známého banditu. V městečku Clay County mu konečně přišel na stopu. Strhla se přestřelka. Buffalo si všiml sudu plného petroleje na vozíku mezi sebou a Jessiem. „Jak dostat sud k Jessiemu, abych ho mohl zapálit?“ rozmýšlí Bill.

Jessie prostřelil sud v $9/10$ výšky a ze sudu začal stříkat petrolej. Buffalo se trefil přesně do poloviny sudu a střílí znovu. Vyřešte, s jakým počátečním zrychlením se bude pohybovat vozíček v závislosti na tom, kam se Bill trefí podruhé. Předpokládejte, že hybnost kulky je nulová, a tření zanedbejte. Zamyslete se nad dalšími zajímavými okolnostmi tohoto souboje.

Úloha se slovenské Fyzikální olympiády.

Než se začneme zabývat samotným soubojem, vypočítáme, jaký důsledek bude mít zásah jediné střely do sudu. Po výstřelu začne ze sudu vytékat petrolej o hustotě ρ . Dle první impulzové věty je celková hybnost soustavy sud–vytékající petrolej konstantní (neb jediná působící vnější síla je tíhová síla). Vypočítejme hybnost petroleje Δp , který vyteče ze sudu za časový interval Δt . Jeho hmotnost je

$$\Delta m = \rho \Delta V = \rho S v \Delta t,$$

kde S je průřez díry, kterou vytvoří střela v sudu, a v je rychlost výtoku petroleje. Hybnost je pak rovna (za předpokladu, že rychlost výtoku je v intervalu Δt konstantní)

$$\Delta p = \Delta m v = \rho S v^2 \Delta t.$$

Z první impulzové věty plyne, že změna hybnosti sudu bude rovna hybnosti vyteklého petroleje, pro sílu působící na sud tedy platí

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \rho S v^2.$$

Teď už nám stačí jen zjistit, jak velká je výtoková rychlost petroleje. Tu určíme například ze zákona zachování energie (je třeba předpokládat, že proudění vody k výtoku je ustálené)

$$v = \sqrt{2gh},$$

kde h je výška kapaliny nad otvorem a g velikost tíhového zrychlení. Celkově pak pro jeden otvor dostáváme

$$F = 2\rho Sgh.$$

Tím jsme vypočítali velikost síly. Směr vektoru síly je zřejmě opačný, než v jakém vytéká petrolej.

Jessie i Buffalo Bill střílejí do sudu tak rychle po sobě, že zasáhnou sud téměř ve stejném okamžiku. Předpokládejme, že vektor výsledné síly působící na sud míří k Jessiemu. Pak souřadnice výsledné síly bude dle zadání rovna

$$F = -2\rho Sg \frac{h}{10} + \rho Sg \frac{h}{2} + 2\rho Sgx = 2\rho Sg \left(\frac{2h}{5} + x \right),$$

kde x je vzdálenost druhého Billova zásahu od hladiny petroleje v sudu. Počáteční souřadnici zrychlení sudu a pak určíme

$$a = \frac{F}{M} = \frac{2\rho Sg (2h/5 + x)}{M}.$$

Vidíme, že v každém případě bude sud zrychlovat směrem k Jessiemu, neboť $a > 0$. Ve skutečnosti by se však sud určitě nepohnul, protože působící síla by nepřekonala statické tření.

Nemalá část z vás chybně určila působící sílu. Tvrdili jste, že velikost síly urychlující sud je rovna hydrostatické síle v místě otvoru. Tato síla ale vychází poloviční oproti vzorovému řešení. Rozdíl lze vysvětlit následovně.

Rozeberme, jak působí petrolej na sud. Na sud jednak působí hydrostatická síla a jednak reakce od vystřikujícího petroleje. Jelikož je v nádobě otvor, je výslednice hydrostatické síly nulová, její vektor míří opačným směrem, než vytéká voda. Podle zákona akce a reakce působí vystřikující petrolej na sud opačnou silou, než jakou je petrolej urychlován. Vystřikující petrolej ovšem urychluje hydrostatická síla, celková síly urychlující sud je tedy rovna dvojnásobku hydrostatické síly.

Karel Tůma

kajinek@fykos.mff.cuni.cz