Zadání I. série

Termín odeslání: 17. října 2005

Milí přátelé!

Vítáme vás v XIX. ročníku Fyzikálního korespondenčního semináře Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy. Všechny informace o semináři naleznete v přiloženém letáku. Zde shrneme jen to nejdůležitější.

S první sérií nám prosím pošlete na zvláštním papíru vaše jméno a příjmení, adresu pro korespondenci, e-mail, školu, třídu a rok maturity. Řešení každé úlohy pište na *zvláštní* papír formátu A4 a *všechny* papíry podepište. Není třeba posílat řešení všech úloh, řešitelé, kteří vyřeší vše, jsou výjimkou.

Další informace najdete také na `http://fykos.mff.cuni.cz`. Přejeme vám spoustu příjemných chvil strávených s naším seminářem. Na řešení úloh první série se těší

organizátoři

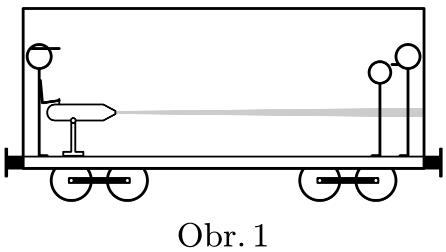
Úloha I . 1 ... *opravdu Saturn plave?*

Věříte, že průměrná hustota Saturnu je menší než hustota vody?

Sami se můžete na Saturn podívat v dalekohledu. Kromě prstence uvidíte kolem planety několik měsíců, pokud nebudou zrovna v zákrytu. (V takovém případě byste si např. na měsíc Titan museli počkat nejdéle 6 hodin, kolik trvá jeho přechod přes kotouč planety.) Můžete zjistit, že Titan oběhne planetu jednou za 16 dní. Dokážete z pozorování měsíce Titanu určit průměrnou hustotu Saturnu? Pokud ne, zdůvodněte, pokud ano, vypočtěte ji a přesvědčíte se o jedné zajímavosti.

Úloha I . 2 ... *Baník, slečno*

Fanoušci Baníku jeli do Prahy na Spartu. Policisté však byli po špatných zkušenostech připraveni a do vagónu nainstalovali vodní dělo.



Obr. 1

Na půli cesty, když vlak zrovna stál v České Třebové, baníkovci začali demolovat vybavení vagónu (jenž váží 30 t). Policisté nechali dotyčný vagón odpojit a briskně využili své zbraně. Za minutu na fanoušky vystříkali tisícilitrovou nádrž. O jakou vzdálenost proto popojel vagón dlouhý 30 m?

Předpokládejte, že vagón je odbržděný a že voda z vagónu může vytékat pouze ve svislém směru. Změnu hmotnosti vagónu způsobenou odtokem vody můžete zanedbat.

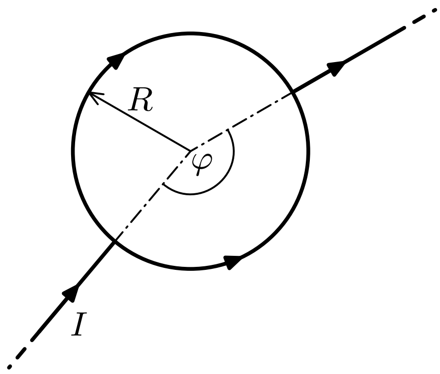
Úloha I . 3 ... *Armagedon*

Poplach! Rudá světla indikují smrtelnou hrozbu. Směrem k Zemi se řítí meteoroid o známém průřezu S a tepelné kapacitě c. Určete, o kolik se zvýší jeho teplota během průletu atmosférou.

Předpokládejte, že se jeho rychlost stačí před dopadem ustálit a že se zahřívá rovnoměrně. Sami odhadněte, jaká část energie se spotřebuje na ohřátí vzduchu v atmosféře. Zamyslete se, jak je tento model realistický. Nakonec rozhodněte, zda bude mít meteoriod vyšší či nižší teplotu, pokud namísto vzduchem poletí vakuem, jež má nulovou tepelnou kapacitu.

Úloha I . 4 ... *hoďte si smyčku*

Představte si kruhovou smyčku tvořenou drátem. Radiálními vodiči přivádíme a odvádíme elektrický proud (viz obr. 2). Jaké bude magnetické pole uprostřed smyčky? Poloměr smyčky je R, úhel mezi radiálními přívodními dráty φ a proud v drátu I.



Obr. 2

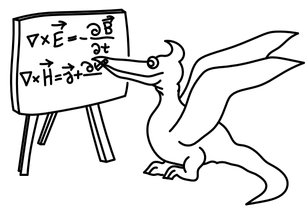
Úloha I . P ... *příliv na Bali*

Když skončila Mezinárodní fyzikální olympiáda na Bali, olympionici odešli na celý den relaxovat k moři na jižní okraj tohoto ostrova v Indonésii. Sledovavše korálový útes, jak mizí v přílivové vlně, uvědomili si po uplynutí úplňkové noci a letního dne, že příliv nastal jen jednou (během 24 h). Domorodci jim tuto skutečnost potvrdili, ale neuměli ji vysvětlit podobně jako účastníci MFO. Dokážete to vy?

Úloha I . E ... *tvrdost kuliček*

Až budete jedno podzimní odpoledne hrát s kamarády kuličky, uzměte svým přátelům jednu z nich a mrštěte s ní o tvrdý povrch. Posléze si udělejte značku ve výšce, do které kulička vyskočí, a změřte ji. Z naměřených hodnot určete koeficient odrazivosti kuličky (poměr energie kuličky před odrazem a po něm).

Podobná metoda se používá pro třídění tvrdosti ložiskových kuliček; málo tvrdé kuličky nepřeskočí bariéru a odstraní se.



Seriál na pokračování

Úvod

V letošním seriálu se pokusíme vyložit některé partie fyziky, ve kterých nějakým způsobem figuruje pojem pravděpodobnosti. Nebude se ovšem jednat o kvantovou mechaniku; v té je pravděpodobnost zanesena již od samého začátku. Namísto toho se budeme soustředit na situace, kdy se snažíme středovat veličiny, které neumíme přesně vypočítat. Abychom ilustrovali druh problémů, jimiž se budeme zabývat, podívejme se na každému známý příklad obyčejného plynu.

Cílem fyziky je vyložit pozorované jevy pomocí co nejméně a co možná nejjednodušších základních zákonů. Takovými zákony jsou v dobrém přiblížení Newtonovy zákony. Chtěli bychom tedy objasnit chování plynu pomocí Newtonových zákonů. Je nám ale jistě jasné, že to nebude jednoduchá záležitost. Vždyť v jednom litru běžného plynu se nachází řádově 10^{22} částic, které spolu ve všeobecnosti interagují netriviálním způsobem. Snaha o výklad vlastností takového plynu pomocí řešení pohybových rovnic jednotlivých molekul jistě povede k nezdaru. Nejenže nejsme schopni je řešit (vzpomeňte si, s jakými problémy se potýkáme už při řešení jednoduchých mechanických úloh typu obíhání planety kolem Slunce). I kdybychom je byli schopni řešit, neznali bychom počáteční podmínky, to jest polohy a rychlosti všech částic. Ty bychom museli změřit, ale tím bychom jednak narušili stav systému a jednak by nám měření zabralo nějaký čas (takže by se nejednalo o počáteční podmínky). Nicméně my musíme vědět, jak vypadá soustava teď, když chceme činit závěry, kterak bude vypadat za minutu. Nakonec to nejdůležitější. Informace o trajektoriích všech částic by pro nás byla naprosto nepoužitelná – je to příliš mnoho informace, zajímá-li nás například otázka, kolik plynu máme nahustit do pneumatik, aby unesly náklaďák.

Proto k řešení přistoupíme tak, že budeme uvažovat střední hodnoty pro nás zajímavých makroskopických veličin (například tlaku, teploty, objemu apod.) a zkoumat, jaké vztahy pro ně můžeme dostat z mikroskopických rovnic. Zjistíme, že některé výsledky na konkrétním tvaru pohybových rovnic závisí, zatímco jiná důležitá tvrzení mají obecný charakter, určený pouze statistickou povahou soustavy. K řešení pohybových rovnic se takto vůbec nedostaneme. Tento přístup je ovšem podmíněn dostatečně velkým počtem částic ve studovaném systému; s rostoucím počtem částic do pozadí ustupují původní zákony pohybu a vynořují se zákonitosti nové, statistické.

V tomto seriálu máme málo místa na podrobný a úplný výklad *statistické fyziky*, navíc předpokládáme pouze nevelké předběžné znalosti čtenářů. Pokud někoho látka zaujme, může se zkusit podívat do některé z učebnic. Témata, o kterých budou pojednávat příští díly seriálu, můžete ovlivňovat i vy. Svá přání (a stížnosti) posílejte na adresu serial@fykos.mff.cuni.cz.

Kapitola 1: Pravděpodobnost

Především si hned na začátku připomeneme pojem pravděpodobnost. Mějme nějaký děj, který může vyústit do několika různých situací. A priori předpokládejme, že všechny situace mají stejné šance být výsledkem děje. Potom pravděpodobností nějakého jevu se rozumí podíl počtu situací, kdy jev nastane, ku počtu všech situací. Příkladem může být házecí kostka. Děj je v tomto případě házení, koncovým stavem je padnutí $1, 2, \ldots, 5$ nebo 6, přičemž šance padnutí každého čísla je díky pravidelnosti kostky evidentně stejná. Jevem může být například padnutí sudého čísla. Je vidět, že pravděpodobnost sudého výsledku je stejná jako lichého výsledku. Pravděpodobnost existence výsledku je $100\,\% = 1$. Proto pravděpodobnost sudého je $50\,\% = 1/2$.

V kontextu fyzikálního systému je situace složitější. Problém spočívá v tom, že existují dvě rozumné definice pravděpodobnosti. Podstatu si objasníme na příkladu plynu v nádobě. Bude nás zajímat pravděpodobnost jevu, kdy v pravé půlce nádoby bude dvakrát více částic než v levé půlce. Jedna definice říká: Vezmi nádobu a nějakou dlouhou dobu sleduj počty částic v obou polovinách nádoby. Zjisti, po jaký čas z této doby byla splněna podmínka. Pravděpodobnost jevu je potom poměr tohoto času ku celkové době pozorování. Tato definice je zřejmě úplně přirozená; její chybou je její značně problematický výpočet – musíme totiž znát časový vývoj plynu v krabici, tedy vlastně řešit pohybovou rovnici, od čehož jsme výše upustili. Pro účely výpočtů se hodí následující definice. Mějme veliké množství stejných nádob, které jsou i jinak makroskopicky stejné (tzn. mají stejnou teplotu, tlak atd.). Podívej se, v kolika z nich je právě teď splněna podmínka. Pravděpodobnost jevu vypočítej jako poměr tohoto čísla ku celkovému počtu nádob. Předpoklad (učiněný Maxwellem), že jsou tyto definice ekvivalentní (tzv. ergodická hypotéza), se ukázal jako nesprávný. V našich úvahách bude nadále vystupovat sice „méně správná“, zato však užitečnější definice druhá.

Dále si uvědomme několik vlastností zavedeného pojmu. Je-li pravděpodobnost jevu A rovna p, pak pravděpodobnost nenastání jevu A je $1 - p$. Mějme dva jevy A a B, které se navzájem vylučují (například jevy „vpravo je stejně částic jako vlevo“ a „vpravo je třetina počtu částic vlevo“). Potom pravděpodobnost, že nastane jev A nebo B je dána součtem pravděpodobností jevu A a B (neboť výsledek příznivý pro A je zároveň nepříznivý pro B a naopak). Nechť nyní jevy A a B jsou jevy, které na sobě nijak nezávisí (např. A jest „částice č. 1 je vlevo" a B „částice č. 10 je vpravo"). Potom pravděpodobnost výsledku příznivého jak pro A, tak i pro B, je rovna součinu pravděpodobností jevů A a B.

Nakonec ještě zavedeme několik užitečných matematických pojmů, které se nám v dalších pokračováních budou hodit. Jednak je to pojem faktoriálu. Faktoriálem z n, jejž značíme $n!$, rozumíme součin přirozených čísel od 1 do n. Je to počet všech možných uspořádání n různých předmětů. To lze nahlédnout takto. První předmět můžeme vybrat (z n předmětů) n způsoby, druhé místo lze pak zaplnit libovolným ze zbývajících $n-1$ předmětů, třetí nějakým ze zbývajících $n-2$ předmětů atd. Celkem to dává $n\cdot(n-1)\cdot\dots\cdot 1 = n!$ možných výběrů. Zajímá-li nás počet možností, kterak vybrat m předmětů z $n > m$ předmětů, přičemž nám záleží na pořadí, můžeme postupovat úplně stejně jako u faktoriálu. První předmět můžeme vybrat n způsoby, druhý $n-1$ způsoby, …, až m-tý můžeme vybrat $n-m+1$ způsoby, celkem tedy máme k dispozici

$$n\cdot(n-1)\cdot\dots\cdot(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

možností. Je-li nyní potřeba vybrat m-tice předmětů nezávisle na pořadí předmětů v m-ticích, získáme počet možností tak, že si uvědomíme, že každý takový výběr je započítán $m!$ krát v počtu výběrů, kde záleží na uspořádání. Skutečně, počet uspořádání m předmětů je $m!$ a každé uspořádání dané m-tice je právě jednou započítáno ve vzorci výše. K určení hledaného počtu pak stačí vzorec výše vydělit $m!$. Počet různých m-tic z n předmětů se nazývá kombinační číslo a rovná se

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot\dots\cdot(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \stackrel{\text{def}}{=} \binom{n}{m}.$$

Úloha I . S ... *pravděpodobnost*

a) Z 36 karet se náhodně vyberou tři karty. Zjistěte pravděpodobnosti jevů, že mezi vybranými kartami bude právě jedno eso, alespoň jedno eso, ani jedno eso.
b) V nádobě se nachází N stejných částic. Určete pravděpodobnost, že v levé půlce bude o m částic více než v pravé půlce. Nakreslete graf závislosti pro $N = 10^{10}$. Rozsah m volte tak, aby pravděpodobnost na krajích intervalu byla desetinová oproti středu intervalu. Jak závisí šířka křivky (tj. rozdíl $m_2 - m_1$, kde $m_2 > 0$ a $m_1 < 0$ jsou hodnoty m, pro které je pravděpodobnost poloviční oproti maximu) na N?
c) Odhadněte velikost $\ln(n!)$ (bez použití Stirlingova vzorce).

FYKOS
UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: http://fykos.mff.cuni.cz
e-mail pro řešení: fykos-solutions@mff.cuni.cz
e-mail: fykos@mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.