

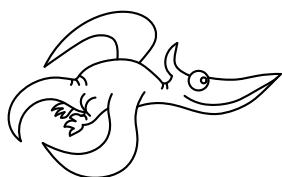
Milí řešitelé!

Konečně dostáváte do rukou autorská řešení první série FYKOSu společně se svými opravenými úlohami. Ve vzorových řešeních se nejen dozvíte, jak mělo vypadat řešení správné, ale i jaké jste dělali nejčastěji chyby apod. S jakýmikoliv dotazy či nesrovnalostmi se můžete obrátit na opravovatele úloh, jejichž e-maily jsou uvedeny pod příslušným vzorovým řešením.

Na konci brožury najdete výsledkovou listinu po jednotlivých ročnících. U Studenta Pilného je napsán plný počet bodů za příslušné úlohy. Pokud jste dostali bodů více než on, znamená to, že se vaše řešení opravovateli líbilo natolik, že vám udělil prémii. Ve sloupci označeném „I“ je uveden součet bodů za první sérii, ve sloupci „%“ procentuální zisk z úloh, které jste letos poslali. A ve sloupci posledním je uveden celkový počet bodů získaný za aktuální ročník.

Dále bychom chtěli požádat ty, kteří nám letos ještě **neposlali řešení žádné úlohy, a přesto chtějí dále dostávat nová zadání a vzorová řešení**, aby nám napsali dopis či mail. Pokud tak neučiní, další poštu již od nás letos dostávat nebudou. Až příští rok jim z propagačního oddělení přijde zadání první série příštího ročníku.

Vaši organizátoři



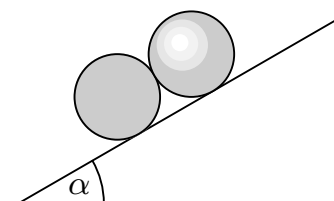
Zadání III. série



Termín odeslání: 9. ledna 2006

Úloha III.1 ... dotyk koule a válce

Koule a válec o stejném poloměru a stejné hmotnosti jsou vyrobené z různých materiálu a leží na nakloněné rovině tak, že se vzájemně dotýkají. Určete, za jakých podmínek zůstanou ležet v klidu.



Obr. 1

Úloha III.2 ... nájezd na čočku

Mějme spojku o ohniskové vzdálenosti f . Zdroj světla je na ose ve vzdálenosti $a > f$ od čočky, za kterou vzniká jeho obraz. Zdrojem začneme pohybovat určitou rychlostí směrem k čočce. Určete, jak rychle se pohybuje obraz. Rozhodněte, zda tato rychlost může být i nadsvětelná. Bylo by to v rozporu s principy speciální teorie relativity?

Úloha III.3 ... odložená koupel

Robin se rozhodl, že se po půl roce vykoupe. Napustil si vanu teplou vodou o teplotě T_1 a objemu V_1 . Ke koupání ale zase nedošlo. Napadlo ho, že je to zbytečné plýtvání energií, teplo z vany totiž lze použít i lépe.

Robin je šikovný a umí si vyrobit libovolný tepelný stroj, proto si už dávno chtěl izotermicky stlačit plyn o teplotě T , objemu V_0 a hustotě ρ . A tady k tomu dostal ideální příležitost. Jako chladič použil okolní vzduch, jehož množství je nevyčerpatelné a jehož teplota je T_2 . Určete, na jaký minimální objem V lze tento plyn stlačit, použije-li k tomu Robin teplou vodu ve vaně a svůj tepelný stroj.

Úloha III.4 ... stoupavý proud

Letadlo letí vodorovně rychlostí o velikosti v a najednou vletne do stoupavého proudu o rychlosti velikosti v' . Jaké bude počáteční vertikální zrychlení letadla těsně po nalétnutí do stoupavého proudu?

Předpokládejte, že součinitel vztlaku C (koeficient v Newtonově vzorci pro vztlak) závisí lineárně na úhlu, který svírá směr proudění vzduchu s rovinou křídla.

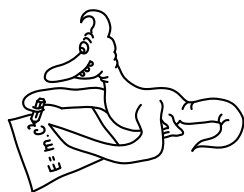
Úloha III.P ... udýchaný běžec na ledě

Jedno pozdní zimní odpoledne se šel Matouš proběhnout na zamrzlý broumovský rybník. Matouš chvíli běžel, ale po pár metrech už nemohl a zastavil se. V zápětí se však pod ním led prolomil a Matouš zahučel pod vodu. Vysvětlete, proč se při běhu pod Matoušem led neprolomil a po zastavení ano?

Úloha III.E ... a jsou tu zase hody!

V Černvíře je veselo, všichni tancují, baví se, ale hlavně pijí alkoholické nápoje. Ne však každý se chce co nejdříve opít. Mezi místními stárky je jeden, kterému jde zejména o vědecký výzkum. Po vypití dvou litrů levného stolního vína ho napadlo, že by mohl zjistit, kolik toho alkoholu do sebe vlastně dostal. Nebyl ovšem v natolik střízlivém stavu, aby experiment zrealizoval. Zkuste to tedy vy!

Změřte, jaký je hmotnostní podíl alkoholu obsažený v levném stolním víně, a výsledek porovnejte s hodnotou na obalu.



Řešení I. série

Úloha I.1 ... opravdu Saturn plave? (4 body; průměr 3,18; řešilo 62 studentů)

Věříte, že průměrná hustota Saturnu je menší než hustota vody?

Sami se můžete na Saturn podívat v dalekohledu. Kromě prstence uvidíte kolem planety několik měsíců, pokud nebudou zrovna v zákrytu. (V takovém případě byste si např. na měsíc Titan museli počkat nejdéle 6 hodin, kolik trvá jeho přechod přes kotouč planety.) Můžete zjistit, že Titan oběhne planetu jednou za 16 dní. Dokážete z pozorování měsíce Titanu určit průměrnou hustotu Saturnu? Pokud ne, zdůvodněte, pokud ano, vypočtete ji a přesvědčíte se o jedné zajímavosti. *Při pozorování Saturnu vymyslel Pavel Brom.*

Cílem této úlohy je vypočítat hustotu Saturnu pouze s pomocí doby oběhu T jeho měsíce Titanu a doby, po kterou je Titan v jeho stínu. Některé možná překvapí, že na to nepotřebujeme určit hmotnost Saturnu ani jeho objem. Hustota je totiž jenom poměr těchto dvou veličin. Hmotnost můžeme vyjádřit pomocí třetího Keplerova zákona jako závislou veličinu podobně jako objem z doby přechodu stínem.

Na začátku se dohodneme, že paprsky určující geometrický stín Saturnu jsou díky velké vzdálenosti Saturnu rovnoběžné. V dalším zjednodušení budeme pokládat dráhu Titanu za kruhovou (čímž rovněž neučiníme větší chybu). Vyjdeme ze vztahu pro rovnost odstředivé a gravitační síly a vyjádříme hmotnost Saturnu M .

$$\frac{GMm}{r^2} = m\omega^2 r \Rightarrow M = \frac{\omega^2 r^3}{G}, \quad (1)$$

kde ω je úhlová oběžná rychlost Titanu, r poloměr jeho oběžné dráhy a G gravitační konstanta. Tím jsme vlastně využili třetí Keplerův zákon. Po dosazení za úhlovou rychlost $\omega = 2\pi/T$ dostáváme

$$M = \frac{4\pi^2}{G} \cdot \frac{r^3}{T^2}.$$

K určení objemu potřebujeme vyjádřit poloměr Saturnu. Využijeme dobu t pohybu Titanu v geometrickém stínu Saturnu. Teď můžeme pokračovat dvěma různě přesnými výpočty.

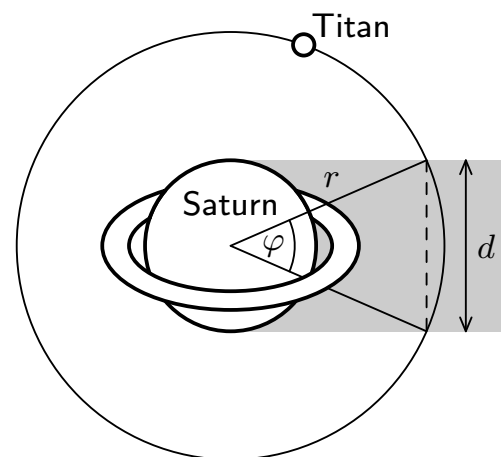
- a) **Aproximace části dráhy Titanu ve stínu přímkou** (neboť díky velké vzdálenosti Titanu od Saturnu je jen málo zakřivená). Průměr Saturnu pak bude $d = vt = \omega r t$, kde t je čas pohybu Titanu ve stínu. Po dosazení do vztahu pro objem koule získáme pro objem Saturnu $V = \pi\omega^3 r^3 t^3 / 6$. Pomocí (1) vyjádříme hustotu Saturnu takto

$$\rho = \frac{6}{G\pi\omega t^3} = \frac{3T}{G\pi^2 t^3}.$$

Číselná hodnota je $625 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

- b) **Aproximace části dráhy Titanu ve stínu kružnicí.** Poloměr Saturnu můžeme získat následovně. Úhlovou dráhu φ , kterou projde Titan ve stínu, určíme ze vztahu

$$\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{t}{T} \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi t}{T}.$$



Obr. 2

Pro průměr Saturnu pak bude platit $d = 2r \sin(\varphi/2) = 2r \sin(\pi t/T)$ a pro objem dostaneme

$$V = \frac{1}{6} \pi \left(2r \sin \frac{\pi t}{T} \right)^3 = \frac{4}{3} \pi r^3 \sin^3 \frac{\pi t}{T}.$$

Hmotnost zůstává stejná jako v předchozím případě a pro hustotu získáváme vztah

$$\rho = \frac{3\pi}{GT^2 \sin^3(\pi t/T)}.$$

Dosažením vypočítáme hustotu Saturnu $626 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

Vidíme, že výsledky se od sebe téměř neliší. Aproximaci jsme tedy zvolili správně. V obou případech jsme pouze z doby oběhu a doby přechodu stínem určili průměrnou hustotu Saturnu.

Otázkou zůstává reálnost takového pozorování. Pokud by Titan obíhal Saturn v neměnné rovině prstenců, pak by takové pozorování bylo možné jenom v době, kdy vidíme prstence Saturnu téměř přesně ze strany, tedy dvakrát za jeden oběh Saturnu kolem Slunce, obecně by to však bylo možné ještě méně často. Zkuste si také vypočítat, do jaké vzdálenosti sahá úplný stín Saturnu za jeho vzdálenost od Slunce a kde začíná polostín.

Z došlých řešení lze usuzovat, že úloha nebyla příliš jednoduchá. Mnohé řešitele zmátlo minimum zadaných hodnot. Nevšimli si možné aproximace dráhy Titanu ve stínu přímkou a se vzniklými vztahy si pak už nevěděli rady. Na druhou stranu přišlo také dost správných řešení bez použití aproximace. Protože se výsledky téměř neliší, pokládali jsme oba typy řešení za správné.

Navíc ve všech řešeních jste automaticky předpokládali, že Titan projde přesně středem stínu, což však nebylo ze zadání vůbec zřejmé. Za tento postřeh děkujeme *Vojtovi Moldovi*.

Roman Fiala, Peter Greškovič & Zdeněk Kučka
rf@atlas.cz, grepe@matfyz.cz, kucka.zdenek@atlas.cz

Úloha I.2 ... Baník, slečno (4 body; průměr 3,02; řešilo 65 studentů)

Fanoušci Baníku jeli do Prahy na Spartu. Policisté však byli po špatných zkušenostech připraveni a do vagónu nainstalovali vodní dělo.

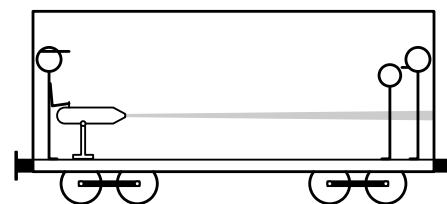
Na půli cesty, když vlak zrovna stál v České Třebové, baníkovci začali demolovat vybavení vagónu (jenž váží 30 t). Policisté nechali dotýčný vagón odpojit a briskně využili své zbraně. Za minutu na fanoušky vystříkali tisícilitrovou nádrž. O jakou vzdálenost proto popojel vagón dlouhý 30 m?

Předpokládejte, že vagón je odbrzděný a že voda z vagónu může vytékat pouze ve svislém směru. Změnu hmotnosti vagónu způsobenou odtokem vody můžete zanedbat.

Zážitek Honzy Prachaře, když se vracel vlakem domů.

Správné, krátké a výstižné řešení nám poslal *Jan Jelínek*. Celková hybnost se zachovává, a proto se vagón bude pohybovat rychlostí rovnou $1/30$ rychlosti vody a za stejný čas urazí $1/30$ vzdálenosti vody. Urazí tedy 1 metr.

Rozeberme si teď podrobněji, co se děje při stříkání vody z děla na druhou stranu vagónu. V první řadě si určíme podmínky, za jakých budeme příklad řešit. Jakékoliv tření zanedbáváme. Rychlost vody je mnohem větší než rychlost vagónu, proto budeme předpokládat, že voda stříká z nehybného děla (i když to se ve skutečnosti pohybuje spolu s pohybujícím



Obr. 3

se vagónem). A také dráhu, kterou urazí voda, než doletí na konec vagónu, budeme pokládat za délku vagónu, ačkoliv se vagón zatím posunul proti směru letu vody a tím zmenšil její skutečnou dráhu.

Vyjdeme z první impulzové věty (v tomto případě konkrétně ze zákona zachování celkové hybnosti soustavy vagón–voda). Celý děj se sestává ze tří částí:

1. Nejprve voda stříká z děla, ale ještě nedorazila na druhý konec vagónu, a tak mu uděluje stejnou hybnost, jakou má ona, jenomže opačného směru.
2. V druhé fázi voda stříká z děla a v tomtéž okamžiku dopadá voda na druhou stranu vagónu stejnou rychlostí, a tedy hybnost vagónu uděluje, ale tutéž mu současně odebírá. V této fázi nenastává změna hybnosti vagónu.
3. Ve třetí fázi voda ještě dopadá na druhou stranu vagónu, ale už nestříká z děla, a tudíž jenom odebírá vagónu hybnost.

Voda stříká z děla rychlostí v . Délku vagónu l tedy proletí za čas $t = l/v$. Je-li objemový průtok vody Q , hmotnost vody, která ještě nedosáhne druhé strany vagónu, je $m = Q\varrho t = Q\varrho l/v$. Ze zákona zachování hybnosti musí být hybnost této vody rovna hybnosti vagónu (o hmotnosti M) na konci první fáze, kdy bude mít rychlost w . Platí

$$mv = Mw \quad \Rightarrow \quad Q\varrho l = Mw.$$

Pro rychlost vagónu na konci první fáze tedy máme

$$w = \frac{Q\varrho l}{M}. \quad (2)$$

Jelikož voda působí na vagón stálou silou, je jeho zrychlení konstantní a v průběhu první fáze urazí vagón dráhu $s_1 = \frac{1}{2}at^2$.

Ve třetí fázi, která je s první symetrická, vagón zpomaluje se zrychlením $-a$ a již má rychlost v_2 (která se mu během druhé fáze nezměnila). Vagón projede dráhu

$$s_3 = wt - \frac{1}{2}at^2.$$

Celý pohyb trval vagónu dobu $T = 1$ min. Druhá fáze trvala dobu $T - 2t$, kdy se hybnost vagónu neměnila a jel rovnoměrnou rychlostí w . Urazil dráhu $s_2 = w(T - 2t)$. Celkovou dráhu dostaneme, když sečteme tyto tři dráhy.

$$s = s_1 + s_2 + s_3 = \frac{1}{2}at^2 + w(T - 2t) + wt - \frac{1}{2}at^2 = w(T - t).$$

Za předpokladu, že doba t je proti celkové době T zanedbatelně malá, a po dosazení za w z (2) dostáváme

$$s = \frac{QT\varrho l}{M},$$

kde $QT = 1 \text{ m}^3$ je celkový objem vystříkané vody. Po dosazení zadaných hodnot dostáváme $s = 1$ m. Vagón popojede o jeden metr.

Většina řešitelů vypočítala tento příklad správně, buď užitím tohoto postupu, nebo úvahou, že hmotný střed soustavy, na který nepůsobí žádná nesvislá vnější síla, se během děje nijak nepohne. Někteří to počítali i bez zanedbání, které jsme provedli na začátku my.

Řešitelé, kteří nedošli ke správnému výsledku, většinou předpokládali, že soustava, na kterou nepůsobí vnější síly, se nehýbe. Jenomže když rybář v loďce, na kterou nepůsobí žádné

(vodorovné) síly, přejde na její druhý konec, hmotný střed soustavy rybáře a loďky se nepohne (neboť na něj nic nepůsobí), a právě proto se loďka vzhledem k vnějšímu pozorovateli pohne, aby vykompenzovala pohyb rybáře uvnitř loďky.

Neboli rybář procházející se s jistou hybností loďkou uděluje loďce hybnost opačného směru (tím, že se nohama odráží od loďky) a loďka se vzhledem k vnějšímu pozorovateli pohne.

Daniel Božík & Ján Lalinský

ksi3CD@gmail.com, jlalinsky@zoznam.sk

Úloha I.3 ... *Armagedon* (4 body; průměr 2,21; řešilo 34 studentů)

Poplach! Rudá světla indikují smrtelnou hrozbu. Směrem k Zemi se řítí meteoroid o známém průřezu S a tepelné kapacitě c . Určete, o kolik se zvýší jeho teplota během průletu atmosférou.

Předpokládejte, že se jeho rychlost stačí před dopadem ustálit a že se zahřívá rovnoměrně. Sami odhadněte, jaká část energie se spotřebuje na ohřátí vzduchu v atmosféře. Zamyslete se, jak je tento model realistický. Nakonec rozhodněte, zda bude mít meteoroid vyšší či nižší teplotu, pokud namísto vzduchem poletí vakuem, jež má nulovou tepelnou kapacitu.

Upravená úloha Karla Tůmy o padajícím kulovém kladívku.

Na úvod prozradím něco o řešení celého příkladu. Zjednodušení, která jsme při zadávání použili, jsou příliš velká. Dokonce podmínky, které jsme zadali, jsou navzájem fyzikálně neslučitelné, nemohou platit všechny zároveň.

Při zadání byly udělány tři podstatné chyby:

1. namísto teplotní kapacity c potřebujeme znát koeficient přestupu tepla λ ,
2. celý jev – průlet tělesa atmosférou – trvá méně než 10 sekund, za tento čas se nestačí ustanovit tepelná rovnováha,
3. teplota tělesa při průletu atmosférou vysoce převyšuje teplotu tání pevných látek a teplotu vypařování kapalin, proto při řešení není možné použít kalorimetrickou rovnici, musíme použít rovnici vypařování.

Nebo pouze jedna – nemělo se psát o meteoroidu a rudé hrozbě z vesmíru, ale o kameni puštěném volným pádem atmosférou.

Původně jsme vám totiž chtěli zadat příklad tak, že necháme těleso padat (volným pádem) atmosférou a pak budeme zkoumat, na jaké rychlosti se ustálí jeho rychlost a o kolik se ohřeje. Bohužel při vymýšlení zadání tak, aby bylo alespoň trochu poutavé, jsme si neuvědomili, že rychlost řekněme kladívka puštěného volným pádem a meteoroidu se liší o několik řádů. Tato malá drobnost vede k podstatně jinému chování obou těles v atmosféře.

Pokusíme se říct vám něco o meteoroidech, abyste si udělali představu o tom, jak vypadá let tělesa atmosférou při velmi vysokých rychlostech.

Energie a teplota

Rychlost, jakou meteoroid vletí do zemské atmosféry, je přinejmenším druhá kosmická rychlost. Dá se říct, že všechny meteoroidy mají rychlost v atmosféře někde mezi 10–70 km/s, čili se pohybují zhruba stokrát rychleji než kulka z pušky. Když vidíme, co dokáže kulka, jakou paseku by asi udělal meteoroid, kdyby ho atmosféra nezastavila? Kinetická energie jednoho kilogramu hmoty o rychlosti 50 km/s je

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = 1,25 \text{ GJ}, \quad (3)$$

což je zhruba 350 kWh. Toto číslo, pro porovnání, zhruba vyjadřuje spotřebu elektrické energie průměrné rodiny za jeden měsíc. Právě velké množství energie je důvodem, proč se u meteoroidu v atmosféře uplatňují efekty, se kterými nemáme v běžném životě zkušenost.

Při průletu atmosférou se meteoroid třením zahřívá.¹ Velikost tohoto zahřívání odhadneme pomocí následující úvahy. Molekuly dopadají na meteoroid rychlostí 10–70 km/s. Považujme tuto rychlost za kinetickou rychlost molekul atmosféry a na základě ekvipartičního teorému odhadneme jeho teplotu.

$$\frac{1}{2}m_0v^2 = \frac{3}{2}kT \quad \Rightarrow \quad \frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{T_1}{T_2}. \quad (4)$$

Při rychlosti 330 m/s je kinetická teplota vzduchu 300 K. Uvedeným rychlostem pak odpovídá teplota 300 000 (rychlost 10 km/s) až 15 milionů kelvinů (rychlost 70 km/s).

Rovnice popisující meteoroid v atmosféře

V dalším výpočtu jsme zanedbali gravitační sílu, v našem případě je dostatečně malá. Vliv odporové a gravitační síly bude ve stejném poměru jako poměr jeho kinetické a rozdílu potenciální energie meteoroidu ve výšce 100 km a na povrchu Země.

$$\frac{F_o}{F_g} \approx \frac{E_{\text{kin.}}}{E_{\text{pot.}}} = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{GmM_Z \left(\frac{1}{R_Z} - \frac{1}{R_Z + h} \right)} = \frac{v^2}{v_{2k}^2} \left(1 + \frac{R_Z}{h} \right) \gg \frac{v^2}{v_{2k}^2} > 1,$$

kde $v_{2k}^2 = 2GM_Z/R_Z$ je druhá kosmická rychlost.

Na meteoroid při průletu atmosférou pak působí jenom odporová síla. Jejím působením se meteoroid zpomaluje.

$$m \frac{dv}{dt} = ma = -\Gamma S \rho v^2. \quad (5)$$

I když tato rovnice vypadá stejně jako rovnice pro odporovou sílu, nejsou to dvě stejné rovnice. Při zkoumání, jakou silou působí prostředí (kterým těleso padá) na pohybující se těleso, bylo zjištěno, že:

1. při malých rychlostech je odporová síla úměrná rychlosti v (tzv. laminární proudění),
2. při větších rychlostech je odporová síla úměrná v^2 (za obtékaným tělesem se začínají vytvářet víry, které způsobují větší brždění tělesa),
3. při rychlostech kolem rychlosti zvuku je odporová síla úměrná v^3 , před tělesem se tvoří rázová vlna, která dále podstatně zpomaluje těleso,
4. při rychlostech, které jsou podstatně větší než rychlost zvuku v prostředí (tj. rychlost, jakou se v něm pohybují molekuly), je odporová síla opět úměrná v^2 .

V případech 2 a 4 je sice odporová síla úměrná v^2 , ale fyzikálně se tyto dva případy liší.

Jak už víme, v okolí meteoroidu panuje vysoká teplota, která vede k vypařování hmoty z povrchu tělesa. Tento fyzikální děj můžeme popsat rovnicí vypařování

$$\xi \frac{dm}{dt} = -\frac{1}{2} \lambda S \rho v^3, \quad (6)$$

¹⁾ Někteří z vás možná namítnou, že přece čím rychleji jedeme na kole, tím nám je větší zima, proto se tělesa pohybem ochlazují. Tomuto se říká *windchill effect*. Vysvětlení spočívá v tom, že ochlazování je způsobeno odpařováním vody z povrchu těla.

kde

- Γ – koeficient odporu tělesa, má stejný význam jako C_k v Newtonově rovnici pohybu tělesa v odporovém prostředí, nejsou si ale rovny.
- m – okamžitá hmotnost tělesa,
- S – efektivní průřez tělesa,
- λ – koeficient přestupu tepla,
- ξ – energie nutná k ablacii² jednotkové hmoty, jednoho kilogramu. Je vyšší než měrné skupenské teplo vypařování.
- ρ, v – okamžitá hustota atmosféry a rychlost tělesa.

V dalších úvahách budeme využívat ablační koeficient σ daný vztahem

$$\sigma = \frac{\lambda}{2\xi\Gamma}. \quad (7)$$

Jednoduchým dosazením rovnic do sebe dostaneme první integrál, závislost hmotnosti tělesa na rychlosti

$$m = m_\infty \exp\left(\frac{1}{2}\sigma(v^2 - v_\infty^2)\right),$$

kde m_∞, v_∞ jsou počáteční hmotnost a rychlost meteoroidu před vstupem do atmosféry.

Rovnice (5) a (6) vedou k plnému popisu pohybu tělesa v atmosféře za předpokladu, že těleso ztrácí hmotu pouze ablací. To ale není pravda ve všech případech.

	v= konst.	rovn. zahřívání	dopadne na Zem
mikrometeoroid	ANO	ANO	NE
meteor	ANO	NE	NE
bolid	NE	NE	NE
„Tunguzka“	NE	NE	ANO/NE ³
planetka (\varnothing 1 km)	ANO	ANO/NE ⁴	ANO

Tabulka popisuje, jak meteoroid, v závislosti na velikosti, splňuje podmínky zadání.

²⁾ *Ablace* je proces, při kterém ztrácí meteoroid svou hmotu vlivem drolení a tavení povrchu. Z povrchu se oddělují úlomky, vznikají z nich roztavené kapky a vypařuje se hmota. Materiál, ze kterého je meteoroid, je většinou velice křehký. Můžete si to představit tak, že vezmete sklenici a prudce ji zahřejete. Sklenice vám popraská. Stejný proces, na efekt ještě lepší, probíhá při ochlazení, protože rychle ochladit sklo je mnohem jednodušší než ho prudce zahřát. Prudce ji ponoříte do vody. Sklo popraská, a když byla původní teplota dostatečně vysoká, tak se rozdrolí na malé kousky. Podobný proces probíhá i na povrchu meteoroidu.

Tento efekt se využívá i v praxi. Např. mise Apollo používala ablační štíty, které díky odpařování kovu na povrchu chránily vlastní kosmickou loď při přistání před roztavením.

³⁾ Křehká tělesa o průměru desítek metrů se dostanou do dolní části atmosféry, kde explodují. Jejich zbytky ve formě malých skleněných kuliček, *sférul*, spadnou na zem.

⁴⁾ Kromě malé části povrchu se nezahřeje vůbec, až při samotném dopadu na povrch Země.

Realita

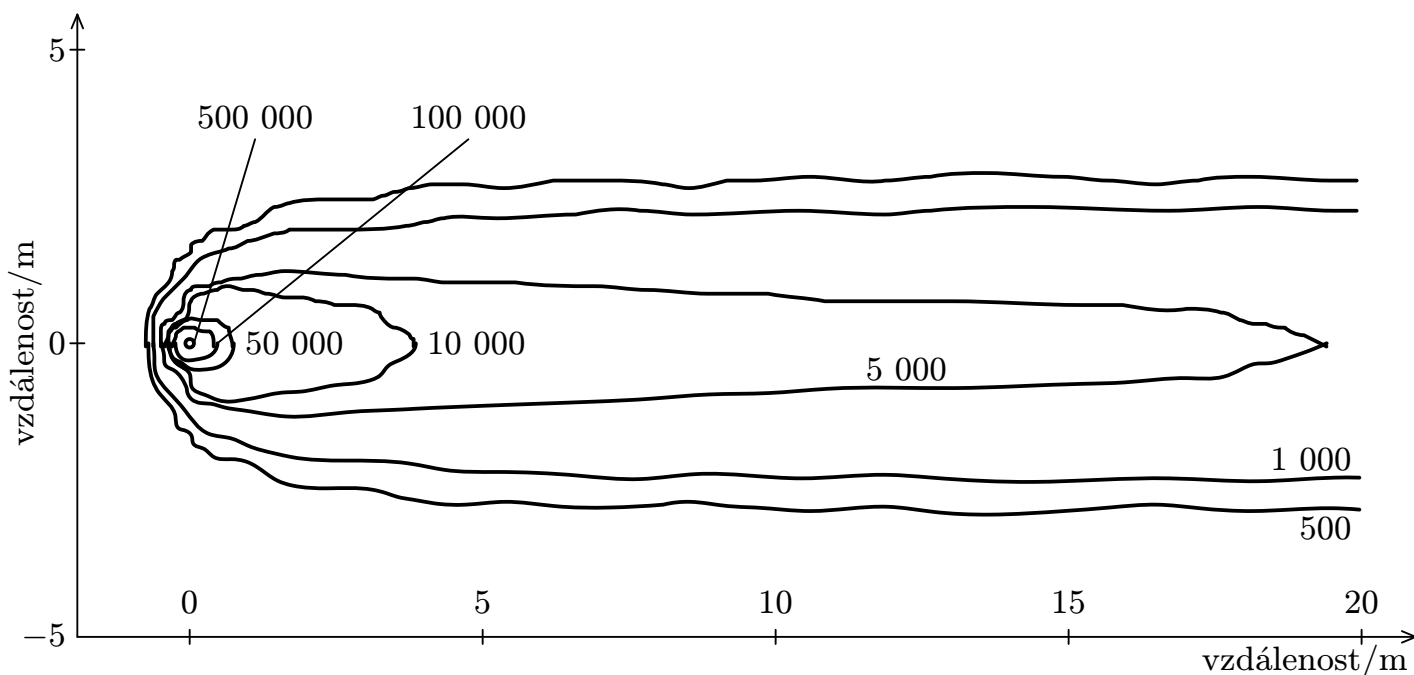
Když mluvíme o pohybu tělesa v atmosféře, rozlišujeme tři pojmy: *meteoroid*, *meteor*, *meteorit*.

- Meteoroid – tělísko nebo těleso meziplanetárního původu, které obíhá kolem Slunce. V našem smyslu je to samotné hmotné těleso, které popisujeme během letu atmosférou.
- Meteor – samotné světlo, které vidí pozorovatel koukající se na oblohu. Velice jasný meteor se jmenuje *bolid*.
- Meteorit – pozůstatek meteoroidu, který dopadl na povrch Země. Na to, aby meteoroid dopadl na povrch jako meteorit, musí mít malou rychlost a velkou hmotnost. Menší tělesa se při letu atmosférou zbrzdí asi na rychlost 3 km/s, přestanou svítit a pak padají atmosférou volným pádem. Jejich dopadová rychlost je v řádu desítek metrů za sekundu. Větší tělesa se nezbrzdí na tuto rychlost a narazí na povrch rychlostí několik kilometrů za sekundu. Těmto se říká *impaktní meteority*.

Pojďme si teď rozebrat jednotlivé případy letu tělesa atmosférou, v závislosti na jejich hmotnosti.

Mikrometeoroid

Mikrometeoroid je tak málo hmotné těleso Sluneční soustavy, že se v atmosféře zabrzdí dříve, než se stačí dostatečně ohřát. Jeho hmotnost je 10^{-18} až 10^{-12} kg a průměr menší než $10\ \mu\text{m}$.



Obr. 4. Rozložení teploty atmosféry v okolí meteoroidu dle modelu Iaina Boyda.

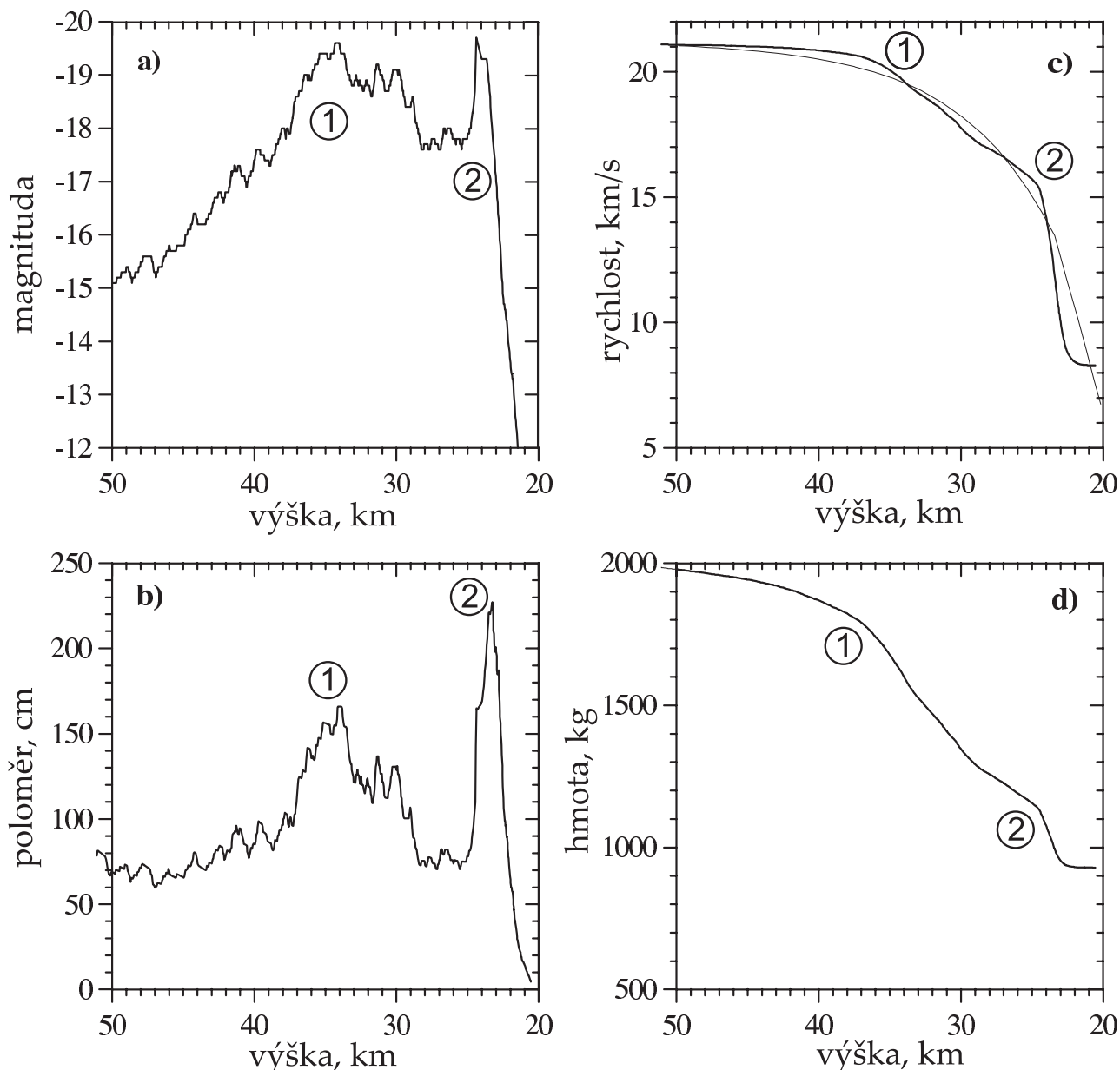
Meteor

Meteor je samotné světlo, které někdy vidíme na noční obloze. Říká se mu též padající hvězda. Tělesa hmotnější než mikrometeoroidy se dostatečně zahřejí, aby začaly zářit. Samotný meteoroid moc nezáří (jeho teplotu udržuje ablace na několika tisících kelvinů), světlo vychází především ze stopy za meteoroidem, z teplé plazmy o teplotě zhruba $4\,000\ \text{K}$. Samotná plazma není v tepelné rovnováze, v jejím spektru lze nalézt i čáry, které odpovídají teplotám kolem $10\,000\ \text{K}$. Rozložení teploty kolem meteoroidu můžeme vidět na obrázku 4.

Velká většina meteoroidů pochází z komet, mají tedy podobné složení. Současný model předpokládá, že meteoroidy jsou takové malé „prachové koule“. Jednotlivá křemičitanová zrna (jejich průměr je kolem $100\ \mu\text{m}$ a teplota tání kolem $3000\ \text{K}$) jsou slepena těkavými látkami s nižší teplotou tání (kolem $1300\ \text{K}$), které se odpaří jako první. Následkem toho po jistém čase pokračuje dále shluk zrn nezávisle na sobě a prochází ablací nezávisle. Do svého úplného vypaření svou rychlost zrna prakticky nezmění. Meteory začínají svítit ve výšce kolem $100\ \text{km}$ a končí ve výšce $80\ \text{kilometrů}$. Začátek a konec dráhy na hmotnosti nezávisí, pouze na vstupní rychlosti.

Bolid

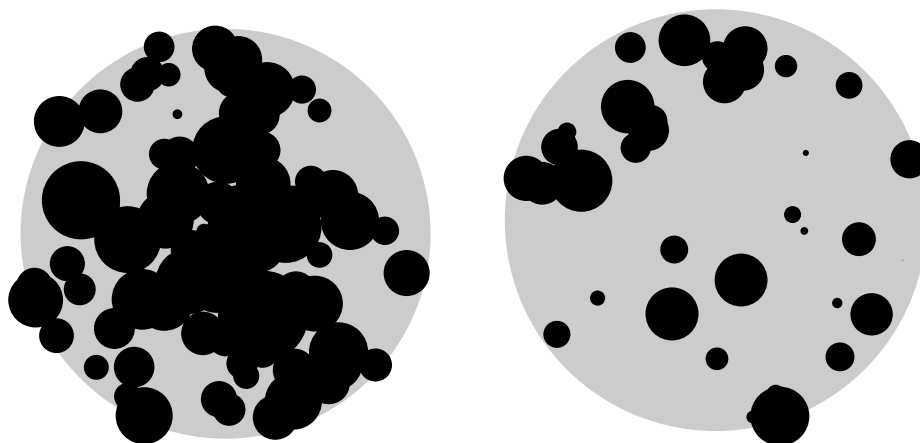
Větší tělesa (o hmotnosti desítek gramů a více, přičemž jas silně závisí na rychlosti: rychlý meteoroid produkuje stejné množství světla při podstatně menší hmotnosti) jsou natolik jasná, že v noci osvětlí okolí tak, že předměty vrhají stíny. Často se stane, že tyto meteory vybuchují, prudce zvyšují svoji jasnost. Je to způsobeno tím, že v jistém okamžiku u nich dochází k roz-



Obr. 5. Bolid Benešov

lomení – fragmentaci – a dále pokračují v letu. Dynamický tlak dosahuje až 10 MPa/m^2 .⁵ Při větších tělesech se už těkavý materiál mezi zrna nestihne vypařit dříve, než začne těleso svítit. Rozpadem meteoroidu dojde k prudkému vypaření tohoto materiálu, zvýšení odporu vzduchu (dle rovnice (5) je zrychlení $a \sim 1/R$) a většímu zrychlení. Při skutečně velkých bolidech zaznamenají okamžik rozlomení i pozemní seismické stanice.

Na obrázku 5 jsou tato místa označena 1 a 2. U tohoto bolidu vidíme, že se rozpadl dokonce dvakrát. Pro velká tělesa s hmotností několika tun je to běžná záležitost. Pro chování bolidů jsou podstatná dvě čísla – jejich hustota a ablační koeficient. Hustota kolísá většinou mezi 600 až 2500 kg/m^3 . Čím je hustota nižší, tím více je meteoroid složen z těkavých látek a tím větší je pravděpodobnost, že se při svém letu rozpadne. S hustotou souvisí i ablační koeficient. Čím je vyšší, tím poréznější a křehčí materiál tvoří meteoroid. Na porovnání si vezměme jako



Obr. 6. Vlevo je zjednodušený model chondritu, vpravo meteoroidu pocházejícího z komety. Šedá hmota není prázdny prostor, ale těkavější složka, u Leonidy částečně smíchaná s ledem.

příklad meteoroid pocházející z komety Tempel-Tuttle (tyto meteoroidy se jmenují Leonidy) a meteoroid pocházející z pásma asteroidů, složením velice podobný kamení (*chondrit*). Leonida má $\sigma = 0,16 \text{ s}^2/\text{km}^2$ a $\rho = 700 \text{ kg/m}^3$, chondrit $\sigma = 0,02 \text{ s}^2/\text{km}^2$ a $\rho = 3000 \text{ kg/m}^3$.

Meteorit

Dále budeme hovořit pouze o chondritech čili o kamení. O tom, proč na Zemi nedopadne těleso o nízké hustotě, si povíme v další části. Maximální rychlost meteoroidu, aby se celý nevypařil v atmosféře, je kolem 30 km/s . Jestliže vstupuje do atmosféry malou rychlostí (druhou kosmickou) a pod malým úhlem, stačí mu jen několik kilogramů k tomu, aby část dopadla jako meteorit.

V případě, že se tělesu podaří snížit svou rychlost na 3 km/s , jeho teplota se sníží natolik, že přestane probíhat ablace. Následně jej okolní vzduch zbrzdí a těleso padá k zemi volným pádem. Trvá mu několik minut, než dopadne. Jelikož se zahříval pouze povrch (do hloubky max. několika milimetrů), vnitřek meteoroidu zůstal netknutý. Na povrchu se, v důsledku přetavení, vytvoří černá krusta. Podle ní poznáme meteority poměrně snadno, i když si je lze někdy mylně zaměnit např. se struskou.

⁵⁾ Zkuste si najít křehký materiál, vezměte ho do dlaně a zkuste ho zmáčknout. Jak budete pomalu zvyšovat svou sílu, najednou se vám celý rozsype na mnoho malých částí. Stejný proces se děje i s meteoroidem.

Skutečně velká tělesa

30. července 1908 vybuchl nad Sibiří blízko řeky Podkamennaja Tunguzka obrovský meteoroid. Jeho průměr se odhaduje zhruba na 100 metrů. Svým výbuchem ve výšce zhruba 8 km nad zemí zničil obrovské území. Jednalo se pravděpodobně o úlomek komety. Kdyby bylo toto těleso chondrit, dopadlo by až na Zemi a vyhloubilo by meteorický kráter. Navíc, pozůstatky komet mají vyšší rychlost než kamenné meteoroidy, pocházející z pásu asteroidů.

Na Zemi můžeme najít stovky kráterů, které tady vytvořila vesmírná tělesa. Soudí se, že jedno takové těleso pomohlo dinosaurům odejít na evoluční odpočinek. Aby se nám nestala stejná nehoda, běží několik projektů, které mají za úkol najít všechna tělesa větší než 1 kilometr, která by v budoucnu mohla zasáhnout Zemi – zmiňme např. projekt LINEAR. Proto nepodceňujme červená světýlka, blikající a varující před srážkou s meteoroidem – pohled na nádherný bolid letící atmosférou by mohl být pro nás tím posledním, co vůbec uvidíme.

Teplota ve vakuu

Co se týče teploty meteoroidu ve vakuu, většina z vás správně podotkla, že jelikož vakuum neobsahuje žádné částice, meteoroid se zpomalovat nebude. Proto bude mít pořád stejnou teplotu.

K malé výměně energie ale docházet bude, a to zářením. Meteoroid obíhá kolem Slunce a jeho vzdálenost se mění – v různých částech své dráhy přijímá více nebo méně slunečního záření. Pak bude i jeho teplota kolísat, ale podstatně pomaleji než při průletu atmosférou.

Komentáře k řešením

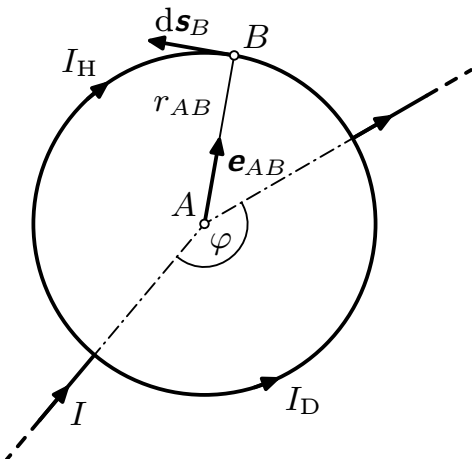
Mnoho z vás zarazily dvě věci: chybějící proměnné a to, že alespoň nějaký výsledek se dá získat více způsoby. Při výpočtu jste dostali více navzájem různých výsledků. Všechno to ale byly odhady, některé lepší, některé horší. Fyzika ale není o tom, vzít množinu písmenek ze zadání a z nich zkombinovat správný vzorec, ale popsat přírodní děj tak, abychom dovedli dopředu říct, jak se bude chovat a vyvíjet v čase.

Pavol Habuda

bzuco@fykos.mff.cuni.cz

Úloha I.4 ... hodte si smyčku (4 body; průměr 3,08; řešilo 51 studentů)

Představte si kruhovou smyčku tvořenou drátem. Radiálními vodiči přivádíme a odvádíme elektrický proud (viz obr. 7). Jaké bude magnetické pole uprostřed smyčky? Poloměr smyčky je R , úhel mezi radiálními přívodními dráty φ a proud v drátu I .

Úlohu navrhl Matouš Ringel.

Obr. 7

Pro odstranění případných nejednoznačností v řešení si smyčku vhodně pootočíme, aby spodní oblouk byl ten kratší. Spodní index D budeme užívat pro veličiny spodního oblouku a H pro veličiny oblouku vrchního. Úhly budeme samozřejmě počítat v obloukové míře, tedy v radiánech.

Nejdříve se vrhneme na rozdělení proudu. Jelikož budeme uvažovat ideální situaci, budeme považovat materiál drátu za homogenní a jeho průřez za konstantní. Pak je zřejmé, že odpor jednotlivých částí je přímo úměrný jejich délce, takže

$$\mathcal{R}_D \sim l_D = \varphi R, \quad \mathcal{R}_H \sim l_H = (2\pi - \varphi)R,$$

kde \mathcal{R} značí odpor jednotlivých oblouků a l jejich délky. Také z Kirchhoffových zákonů plyne, že co do uzlu vteče, to také vyteče, neboli $I = I_H + I_D$. Když použijeme předchozí úměru a Ohmův zákon, získáme vztah mezi velikostmi obou proudů

$$I_D = \frac{(2\pi - \varphi)}{\varphi} I_H. \quad (8)$$

Nyní vypočítáme příspěvky jednotlivých částí obvodu k magnetické indukci ve středu smyčky. Pokud nám (či fyzikálním tabulkám) budete věřit nebo vám integrování nic neříká, můžete přeskocit následující odstavec.

Vyjdeme z Biot-Savartova zákona⁶, který popisuje příspěvek proudu vodičem k magnetické indukci v bodě A .

$$\mathbf{B}(A) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int_{\text{celý vodič}} \frac{I \mathbf{e}_{AB} \times d\mathbf{s}_B}{r_{AB}^2},$$

kde \mathbf{e}_{AB} je jednotkový vektor směřující od A k délkovému elementu vodiče $d\mathbf{s}_B$ a r_{AB} je délka spojnice bodu A a elementu vodiče $d\mathbf{s}_B$. Integrujeme samozřejmě po celém vodiči. Všimneme si, že pro přírodní dráty je vektorový součin nulový, a tak i jejich příspěvek k magnetickému poli je nulový.

Budeme uvažovat stálý proud I obloukem kružnice s počátečním úhlem φ_0 a konečným φ_1 o poloměru R . Když nyní budeme řešit příspěvek k magnetické indukci ve středu oblouku, uvědomíme si, že vektory $d\mathbf{s}_B$ a \mathbf{e}_{AB} jsou na sebe kolmé a oba leží v rovině, ve které leží oblouk. Zavedeme jednotkový vektor $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{e}_{AB} \times d\mathbf{s}_B / |d\mathbf{s}_B|$ (kolmý k rovině oblouku) a substituci $|d\mathbf{s}_B| = R d\varphi$. Předchozí integrál můžeme přepsat jako

$$\mathbf{B}(A) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{\boldsymbol{\nu} I d\varphi}{R} = -\frac{\boldsymbol{\nu} I}{4\pi\epsilon_0 c^2 R} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} d\varphi = -\frac{\boldsymbol{\nu} I}{4\pi\epsilon_0 c^2 R} (\varphi_1 - \varphi_0).$$

Nyní již víme, v jakém poměru se rozdělí proud a jaký je příspěvek k magnetické indukci proudu procházejícího tenkým vodičem ve tvaru oblouku. Dosadíme do vztahu pro příspěvek k magnetické indukci ve středu smyčky od spodního oblouku

$$\mathbf{B}_D = -\frac{\boldsymbol{\nu} I_D}{4\pi\epsilon_0 c^2 R} (\varphi - 0) = -\frac{\boldsymbol{\nu} I_D \varphi}{4\pi\epsilon_0 c^2 R}.$$

Obdobně dosadíme pro horní oblouk, musíme jen dát pozor na to, abychom zachovali stejný směr vektoru $\boldsymbol{\nu}$, neboli musíme zachovat stejný smysl obíhání oblouku. Tím ale získáme oblouk, kterým neteče proud I_H , nýbrž $-I_H$.

$$\mathbf{B}_H = -\frac{\boldsymbol{\nu} (-I_H)}{4\pi\epsilon_0 c^2 R} (2\pi - \varphi) = \frac{\boldsymbol{\nu} I_H}{4\pi\epsilon_0 c^2 R} (2\pi - \varphi).$$

Když tyto příspěvky sečteme a využijeme vztah (8), získáme nulový vektor

$$\mathbf{B}_H + \mathbf{B}_D = \mathbf{0}.$$

Takže jsme došli k závěru, že magnetická indukce ve středu smyčky bude nulová.

Petr Sýkora

petr@fykos.mff.cuni.cz

⁶⁾ viz například Feynmanovy přednášky z fyziky

Úloha I. P ... příliv na Bali (5 bodů; průměr 2,34; řešilo 35 studentů)

Když skončila Mezinárodní fyzikální olympiáda na Bali, olympionici odešli na celý den relaxovat k moři na jižní okraj tohoto ostrova v Indonésii. Sledovavše korálový útes, jak mizí v přílivové vlně, uvědomili si po uplynutí úplňkové noci a letního dne, že příliv nastal jen jednou (během 24 h 50 min). Domorodci jim tuto skutečnost potvrdili, ale neuměli ji vysvětlit podobně jako účastníci MFO. Dokážete to vy? *Zažil Honza Prachař na Mezinárodní FO na Bali.*

V tomto řešení nesvedeme vysvětlit tu pravou příčinu toho, že t. č. byl na Bali příliv jen jednou denně. Zmíníme však některé jevy, které by to mohly mít na svědomí.

Nejdříve se zamyslíme, zda bychom to dokázali vysvětlit jako statický jev, tj. zanedbáme tření vody v oceánech a mořích a budeme předpokládat, že hladina vody v každém okamžiku zaujímá tvar ekvipotenciální plochy.

Uvažujme jedno slapotvorné těleso (v našem případě Měsíc), jehož přítomnost způsobí změnu gravitačního potenciálu na povrchu Země. Jeho nekonstantní část má tvar⁷

$$\phi_m = -\frac{Gma^2}{R^3} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \psi - \frac{1}{2} \right),$$

kde m je hmotnost Měsíce, a je poloměr Země, R je vzdálenost středu Měsíce a Země a ψ je úhel měřený od spojnice Země a Měsíce (osy x , viz obr. 8). Potenciál je rotačně symetrický vzhledem k ose x .

Potenciál se slapy ve výšce h_2 bude stejný jako potenciál bez slapů ve výšce h_1

$$\phi(h_1) = \phi(h_2) + \phi_m(h_2).$$

Vzednutí hladiny bude zanedbatelné vzhledem k poloměru Země, potenciál ϕ_m je v blízkosti povrchu Země přibližně konstantní, proto dostáváme

$$gh_1 = gh_2 + \phi_m \quad \Rightarrow \quad h = h_2 - h_1 = -\frac{\phi_m}{g}.$$

Pro gravitační zrychlení na povrchu Země platí $g = GM/a^2$, a tak pro výšku dmutí hladiny platí vztah

$$h = \frac{ma^4}{MR^3} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \psi - \frac{1}{2} \right) \doteq 36 \text{ cm} \cdot \left(\frac{3}{2} \cos^2 \psi - \frac{1}{2} \right). \quad (9)$$

Dmutí hladiny je znázorněno (ovšem zveličeně) na obrázku 8. Tento obrázek odpovídá tomu, co nás učili na hodinách zeměpisu. Na rovníku na straně přivrácené a odvrácené od Měsíce je příliv, jehož výška dosahuje maximálně 36 centimetrů. Na pólech je trvalý odliv 18 centimetrů. Teoretické hodnoty přílivu jsou skutečně tak malé, protože se však Země díky slapům sama deformuje, je skutečný posuv ekvipotenciální plochy celkového gravitačního potenciálu asi o 30 % větší.

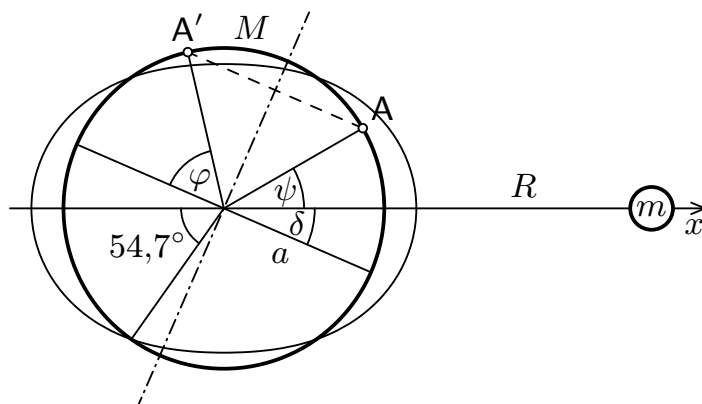
Dále je samozřejmě také nutné započítat vliv Slunce, který není zanedbatelný. Vzednutí hladiny způsobené Sluncem má stejný tvar jako (9) (při jeho odvozování se jen předpokládá $a \ll R$). Podle polohy Slunce se vlivy různým způsobem sčítají. T. č. byl na Bali úplňk, to znamená, že Slunce, Země a Měsíc byly na jedné přímce. Dmutí bylo tedy ve skutečnosti ještě větší. Nás zajímá kvalitativní výsledek, zda může jeden příliv zcela vymizet, proto není třeba dále vliv Slunce uvažovat.

⁷⁾ Vztah pro slapotvorný potenciál zde nebudeme odvozovat, protože ho můžete najít v literatuře, příp. v tomto článku <http://scienceworld.wolfram.com/physics/Tide.html>.

Co může způsobit jinou než dvanáctihodinovou periodu přílivu a odlivu? Je to deklinace Měsíce δ , která může dosahovat hodnot až $\pm 28,5^\circ$. Situace je názorná na obrázku 8, na něm je označena noční A a denní A' poloha jednoho místa na povrchu Země. Vidíme, že výška vody není po 12 hodinách stejná.

Pojďme vypočítat, jak se během dne mění výška hladiny pro různé zeměpisné šířky φ . Vztah (9) si přepíšeme pomocí souřadnice x místa na povrchu Země, platí totiž $x = a \cos \psi$.

$$h = \frac{ma^2}{MR^3} \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}a^2 \right).$$



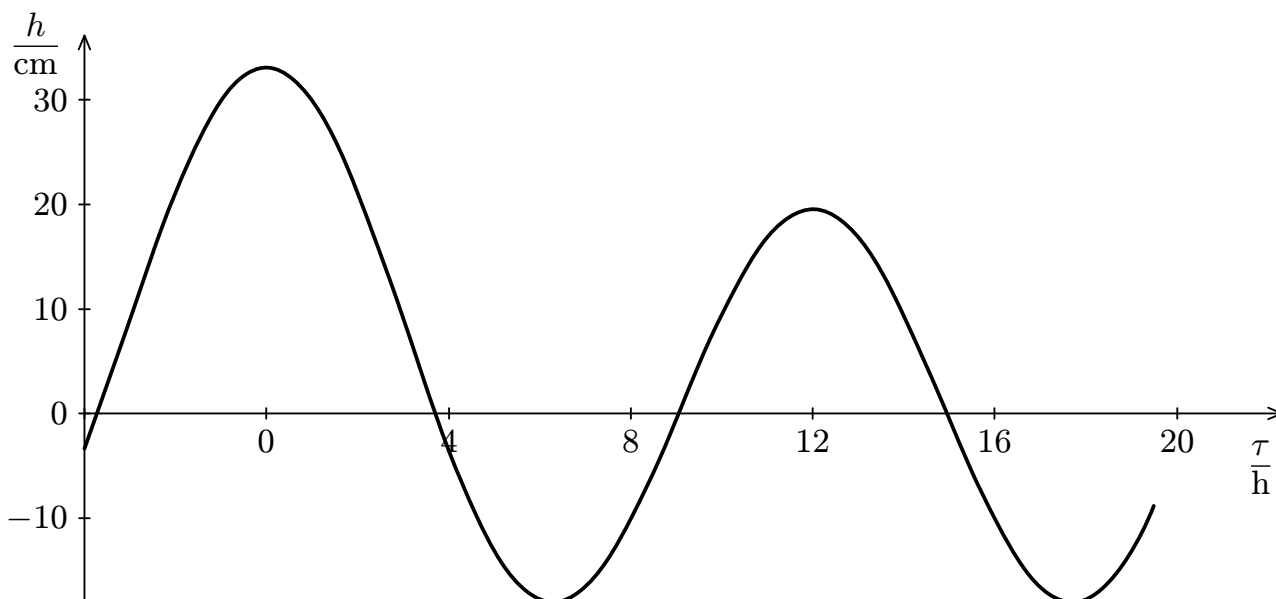
Obr. 8

Budeme sledovat pohyb bodu A na zeměpisné šířce φ během dne (přerušovaná čára na obr. 8). Označme τ zeměpisnou délku (resp. čas během dne) sledovaného bodu, přičemž bod A má zeměpisnou délku $\tau(A) = 0^\circ$ a bod A' $\tau(A') = 180^\circ$. Podle obrázku 8 se souřadnice x bodu A mění od hodnoty $a \cos(\varphi - \delta) = a \cos \varphi \cos \delta + a \sin \varphi \sin \delta$ (v noci) po hodnotu $-a \cos(\varphi + \delta) = -a \cos \varphi \cos \delta + a \sin \varphi \sin \delta$ (ve dne). Jelikož se bod pohybuje po kružnici, musí souřadnice x záviset na zeměpisné délce prostřednictvím $\cos \tau$, a tudíž platí

$$x = a(\cos \tau \cos \varphi \cos \delta + \sin \varphi \sin \delta)$$

a tím máme výšku dmutí vyjádřenou jako funkci $h(\varphi, \tau)$.

Výška hladiny moře při deklinaci Měsíce $\delta = -23^\circ$ (tj. v létě při úplňku) na Bali (10° j. š.) v průběhu dne je vynesena v grafu 9.

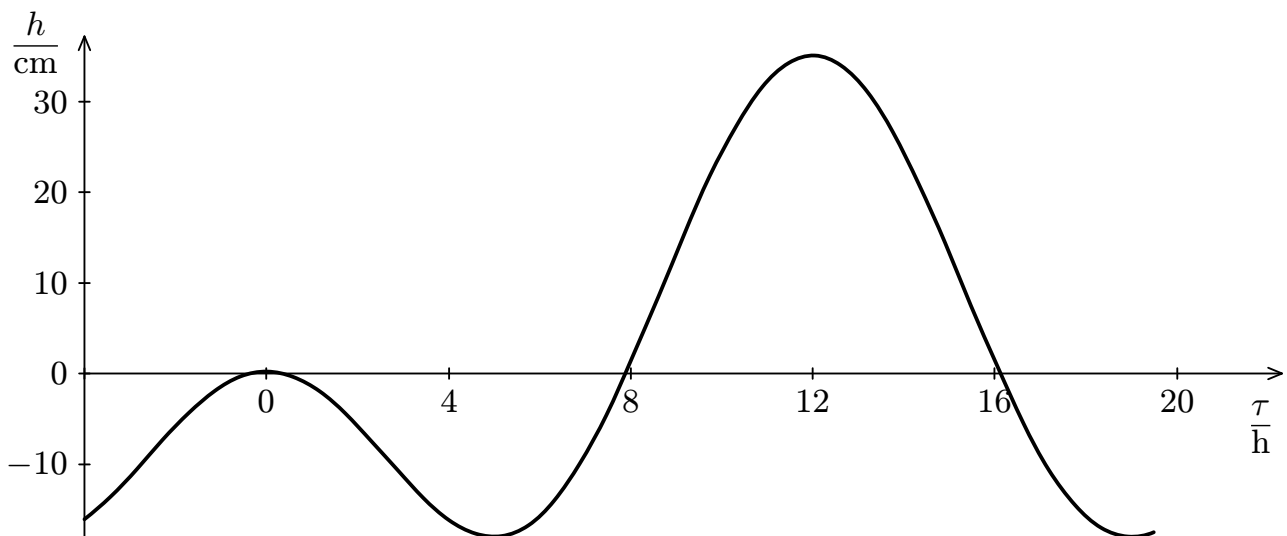
Obr. 9. Výška hladiny moře na 10° j. š.

Noční příliv je tedy asi o 50 % vyšší než denní. Spolu s dalšími jevy to může být původní příčina toho, že byl t. č. na Bali pozorován jen jeden příliv denně. Příliv a odliv jsou dynamické procesy a na jejich výšce a času nástupu se výrazně podílí geologické podmínky – tvar pobřeží, tvar dna, blízkost jiné pevniny a vůbec poloha na mapě světa. T. č. na Bali byl příliv pozorován

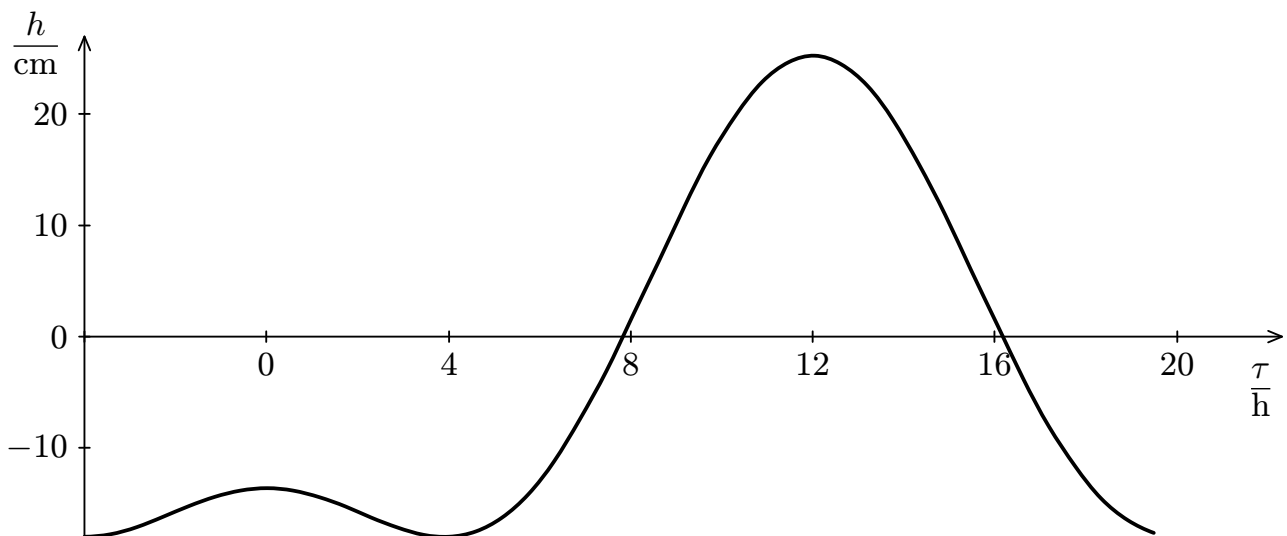
až v 6 h ráno, nikoli o půlnoci, přílivová vlna tedy přichází o dost později než potenciálové maximum.

Řešení doplníme konkrétními údaji. Pobřeží, na kterém bylo pozorování slapů prováděno, tvořily korálové útesy. Hluboké moře bylo až mnohem dále od pobřeží. Korálové útesy čněly nad hladinu moře a jen jednou denně byly schovány pod přílivovou vlnou. Druhá přílivová vlna mohla být, jak víme, nižší, a tudíž nezaplavila korálové útesy, a proto nemusela být vůbec zpozorována.

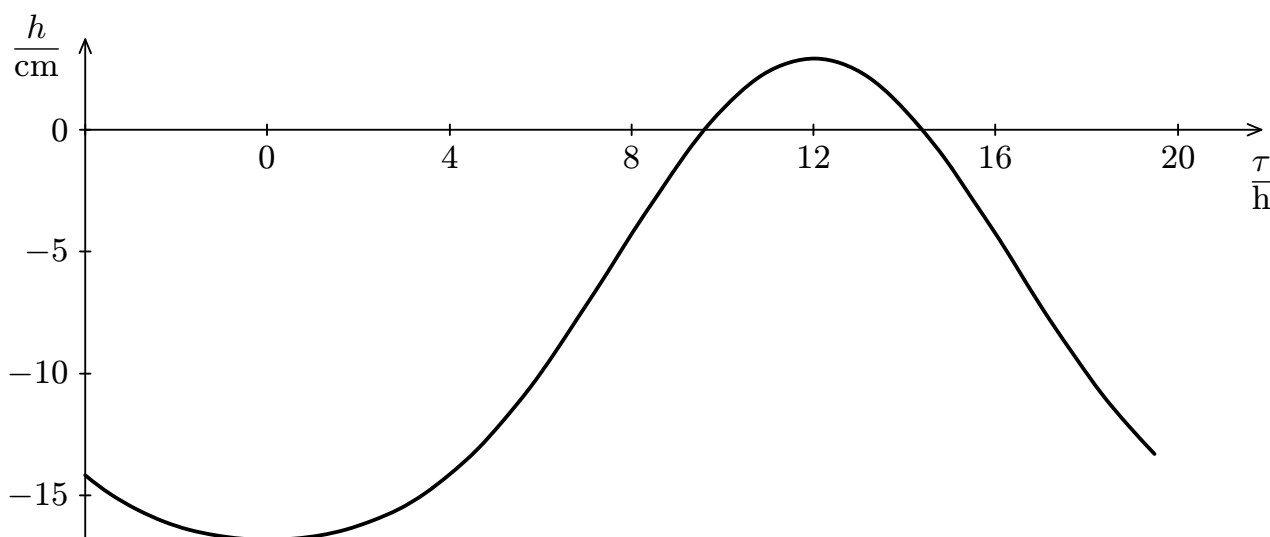
Na závěr si na grafech na obrázcích 10 až 12 prohlédněte, jak teoreticky vypadají slapové jevy v různých zeměpisných šířkách, při deklinaci Měsíce $\delta = -23^\circ$. Na třicáté rovnoběžce má nižší příliv nulovou výšku, za polárním kruhem dokonce (jak si snadno rozmyslíte) může nastávat jen jeden příliv denně.



Obr. 10. Výška hladiny moře na 30° s. š.



Obr. 11. Výška hladiny moře na 50° s. š.

Obr. 12. Výška hladiny moře na 75° s. š.

Musím přiznat, že jsme tuto úlohu při zadání podcenili, doufaje, že jev půjde vysvětlit na základě sklonu zemské osy vůči rovině obíhání Měsíce. Leč se ukázalo, že slapové jevy jsou natolik komplikovaný děj, že žádné jednoduché vysvětlení jednodenního přílivu neexistuje. Uvedené řešení jsme konzultovali s *docentem Ctiradem Matyskou* z katedry geofyziky, za to mu na tomto místě děkujeme.

V řešeních jsem bodoval všechny rozumné myšlenky (tj. ty, které nebyly lživé). Potěšil mě *Marek Pechal*, který se jako jediný pokusil vypočítat průběh dmutí během dne – tj. naši funkci $h(\varphi, \tau)$.

Honza Prachař

honzik@fykos.mff.cuni.cz

Úloha I. E ... tvrdost kuliček (8 bodů; průměr 4,79; řešilo 56 studentů)

Až budete jedno podzimní odpoledne hrát s kamarády kuličky, uzměte svým přátelům jednu z nich a mrštěte s ní o tvrdý povrch. Posléze si udělejte značku ve výšce, do které kulička vyskočí, a změřte ji. Z naměřených hodnot určete koeficient odrazivosti kuličky (poměr energie kuličky před odrazem a po něm).

Podobná metoda se používá pro třídění tvrdosti ložiskových kuliček; málo tvrdé kuličky nepřeskočí bariéru a odstraní se.

Námět na úlohu našla Lenka Zdeborová v Rozhledech z roku 1965–66.

Padalo a létalo téměř všechno kulaté: ložiskové kuličky, ping-pongové, tenisové, dokonce i golfové míčky či případně také ty míčky, co skáčou velmi vysoko („hopíky“). Samozřejmě i chudák pejsánek se musel dívat, jak skáče jeho míček. Někteří házeli kuličku z myšky (té počítačové).

Nejprve si uvědomíme, co jste měli změřit. V zadání bylo napsané, že máte určit koeficient odrazivosti kuličky a že je to poměr energie před odrazem a po něm. Tento název není příliš vhodný, je to spíš koeficient tlumení, protože čím vyšší má hodnotu, tím méně se kulička odrazí. Jeho převrácená hodnota udává potom koeficient odrazivosti. V zadání stálo: „Hodte kuličku a změřte, do jaké výšky se odrazí“. A proč takto? Protože víme, že energie se zachovává! Proto kinetická část energie odpovídající rychlosti kuličky po odrazu se přemění na potenciální energii v maximální výšce odskoku. Na kuličku působí ještě vzduch, ale budeme předpokládat, že ztráty energie třením jsou nepodstatné (aspoň pro naše účely).

Zůstává problém určit rychlost kuličky těsně před dopadem. Jen tak hodit kuličku asi nemá smysl, ale stačí ji pustit z nějaké výšky. Potom stejně tvrdíme, že energie se zachovává, a tak energie před dopadem se rovná potenciální energii ve výšce, ze které jsme kuličku pustili. No a zjišťujeme, že stačí měřit maximální výšku po odrazu a výšku upuštění. Kdo nevěří, nechť si napíše vzorce pro koeficient odrazivosti

$$p = \frac{\text{energie po odraze}}{\text{energie před odrazem}} = \frac{mgh_2}{mgh_1} = \frac{h_2}{h_1}. \quad (10)$$

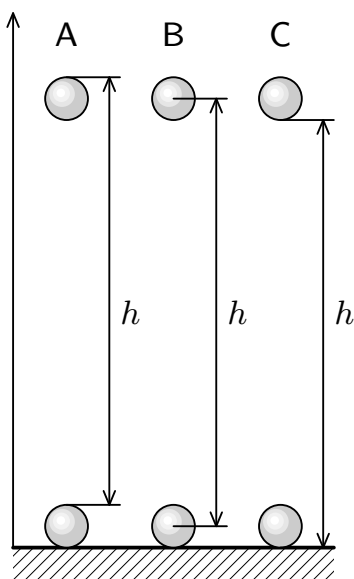
A nyní bylo třeba trochu uvažovat. Co jsou přesně ty výšky? Musíme brát rozdíl výšek mezi polohami těžiště (anebo jiného bodu kuličky na její svislé ose). Položme si například nulovou výšku tak jako na obrázku 13A nebo to učiníme podle jedné ze zbylých dvou variant. Při malých rozměrech kuličky to můžeme ale vcelku úspěšně zanedbat a měřit jakoukoli výšku. Jenže jak měřit tyto výšky?

Najdeme si nějakou svislou stěnu a připevníme na ni metr a jen tak pozorujeme. Je to dost nepřesné, chyba je odhadem ± 1 cm, protože určit „od oka“, kdy a kde dosáhla kulička

maximální výšku, asi bude problém. Případně použijeme nějaké ty technické vymoženosti, například kameru nebo fotoaparát s nastavitelnou dobou expozice (délka musí odpovídat době pádu). Tak budeme mít zaznamenaný pád kuličky po celý čas. Ale i tu vznikají nějaké chyby.

Existují však i jiné metody. Rozebereme trochu ty, které jste použili. V první řadě se často objevoval nápad jednoduše poslouchat, kdy kulička dopadne. A z času dopadu vypočítat, jakou rychlost má kulička při dopadu a odrazu. Ono stačí využít předpoklad, že kulička zrychluje rovnoměrně. Nejlepší je opět použít nějakou techniku. Z časů t_1 a t_2 dvou po sobě následujících dopadů určíme rychlost dopadu $v = \frac{1}{2}g(t_2 - t_1)$. Tedy

$$p = \frac{\text{energie po odraze}}{\text{energie před odrazem}} = \frac{\frac{1}{2}mv_2^2}{\frac{1}{2}mv_1^2} = \frac{(t_3 - t_2)^2}{(t_2 - t_1)^2}. \quad (11)$$



Obr. 13

Přesnost měření času je se správnou technikou velmi vysoká, avšak je nutné provést více měření a na závěr odhadnout, jak velký vliv může mít odpor vzduchu na měření, a udat nepřesnost způsobenou technikou. Tolik k této metodě.

Další metoda je technicky náročná, ale realizovatelná. Inspirace pochází z měření *Radima Pechala*. Měření budeme provádět v trubici nejlépe natřené na černo. Těsně nad místem dopadu kuličky nainstalujeme optický člen, skládající se ze dvou LED-diod umístěných blízko sebe, a pustíme kuličku. Ta při svém pohybu proletí skrz optočlen, který zaznamená oba časy průchodu. Následně se odrazí a máme to samé po odrazu. Je zřejmé, že vyhodnocovat budeme muset pomocí počítače, protože LED-diody jsme umístili blízko sebe. O pohybu kuličky mezi diodami předpokládáme, že je rovnoměrně zrychlený s konstantním tíhovým zrychlením. Takto dostaneme jak rychlost odrazu, tak rychlost dopadu. Koeficient odrazivosti vypočítáme podle (11). Přičemž optočlen umístujeme k podložce co nejbližší, abychom mohli zanedbat nenulovou potenciální energii v této výšce.

Nyní si povíme, jak vyhodnocovat měření. Protože jste každý měřil svoji vlastní kuličku, nemá význam uvádět tu něco jako vzorové hodnoty. První metodou jsme naměřili hodnoty pro

nezávislá měření v následující tabulce. Chyba měření h_1 je $\Delta h_1 = 0,5$ cm, chyba měření h_2 je $\Delta h_2 = 1$ cm.

h_1 [cm]	80	80	80	80	80	80	80	80	80	80	80
h_2 [cm]	42	45	46	48	45	43	41	42	43	46	45
p	0,53	0,56	0,58	0,60	0,56	0,54	0,51	0,53	0,54	0,58	0,56
Δp	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01

Jak jsme vypočítali jednotlivé hodnoty? Údaje v prvních dvou řádcích tabulky jsou naměřené hodnoty, p jsme vypočítali podle vztahu (10), Δp je chyba měření p , jedná se o takzvanou střední chybu. O té si něco povíme.

Hodnotu koeficientu p neměříme přímo (narozdíl od délky, kdy používáme nějaký etalón v podobě pravítka) ale pomocí nějaké funkční závislosti $f(a, b, \dots)$, která závisí na veličinách a, b, \dots . Chyby jejich měření označíme pomocí symbolu Δ . Potom pro střední chybu platí vztah⁸

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2 \cdot (\Delta a)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)^2 \cdot (\Delta b)^2 + \dots}$$

V tomto vztahu parciálně derivujeme, což znamená, že při derivování podle jedné z proměnných ostatní proměnné představují konstanty. V našem případě je $p = f(h_1, h_2) = h_2/h_1$.

$$\Delta p = \sqrt{\left(\frac{h_2}{h_1^2}\right)^2 \cdot (\Delta h_1)^2 + \left(\frac{1}{h_2}\right)^2 \cdot (\Delta h_2)^2} = p \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta h_1}{h_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h_2}{h_2}\right)^2}$$

Dále z naměřených hodnot vypočítáme průměr a směrodatnou odchylku; celkovou chybu měření vyjádříme jako odmocninu ze součtu kvadrátů směrodatné odchylky a průměru jednotlivých chyb měření. Tak se dostaneme k výsledku

$$p = 0,55 \pm 0,02.$$

Uvědomte si, že měření bez jakéhokoliv udání chyby je nesmyslné, protože nikdy nenaměříte nic přesně. Proto je třeba chyby alespoň nějak odhadnout. Na konci tohoto řešení najdete krátký text, který o chybách měření pojednává.

Na konec je ještě dobré diskutovat systematické chyby. Kulička měla nějakou rotaci při dopadu, a tak jsme neměřili odrazivost, protože část rotační energie se přeměnila na kinetickou energii (resp. naopak). To závisí na směru rotace při dopadu, který nikdy nebude dokonale kolmý na podložku. A pro jednotlivé metody je třeba uvážit tyto chyby:

- 1. metoda** – nesvislost měřidla, počáteční rychlost ve směru kolmém na podložku,
- 2. metoda** – odečtení času, kdy přesně kulička dopadne; předpoklad, že se kulička pohybuje celou dobu rovnoměrně zrychleně, avšak jistou dobu trvá odraz,
- 3. metoda** – zanedbání potenciální energie ve výšce přechodu kuličky přes optický člen.

A téměř na závěr několik obecných rad:

- Při psaní myslete na to, že píšete pro někoho, kdo vaše měření určitě neviděl.

⁸⁾ viz např. Bohumil Vybíral: *Zpracování dat fyzikálních měření*. MaFy, Hradec Králové 2002. Ke stažení na stránkách Fyzikální olympiády <http://fo.cuni.cz>.

- Chybu měření výsledku alespoň odhadněte.
- Chybu výsledku zaokrouhľujte na jednu nebo dvě platné cifry, na stejný řád zaokrouhľete i hodnotu výsledku.
- Napište základní myšlenku, jak jste postupovali a jaké teoretické vztahy jste používali.
- Pište, na základě čeho jste chyby určili a jak jste je počítali.
- Popřemýšľejte nad možnostmi zpřesnění měření.
- Grafy prokládejte co nejhladší křivkou (někdy to neplatí).
- V tabulkách udávejte jednotky.

Ještě prozradím, jak jsem bodoval. Za ideu experimentu jsem dával dva body, za měření dva body (to zahrnuje například popis toho, jak a čím jste měřili, a možná vylepšení), za aspoň odhadnuté chyby měření dva body, za promyšlení různých vlivů na měření další dva body a snažil jsem se rozdat i nějaké ty bonusy za práci navíc.

Pochvala patří všem, kteří si úlohu udělali trošku těžší a nedrželi se návodu v zadání a vymysleli vlastní metody.

Peter Zalom
peter@fykos.mff.cuni.cz

Chyby měření

Z praktických důvodů zde uvádíme základní poznatky z teorie chyb.

Chyby systematické

Jde o chyby způsobené použitou metodou, měřicími přístroji a některé chyby experimentátora. Systematické chyby obvykle zkreslí výsledek, buď k trvale vyšším nebo trvale nižším hodnotám.

- 1) Chyby metody — např. považujeme odpor spirály za konstantní a on se s teplotou mění.
- 2) Chyba měřidla — nedokonalost a nepřesnost stupnic (např. vzdálenost mezi jednotlivými dílky teploměru odpovídá 0,99 K namísto 1 K).
- 3) Některé chyby osobní — jsou dány nedokonalostí našich smyslů apod.

Systematické chyby nelze zmírnit velkým počtem měření!

Chyby náhodné

Při opakování měření za týchž podmínek zjistíte, že jednotlivé výsledky se navzájem poněkud liší. Měření je ovlivněno malými změnami teploty či tlaku, změnou polohy oka, prouděním vzduchu, . . . Takových navzájem nezávislých jevů bývá mnoho a těžko bychom hledali přesnou příčinu odchylky, proto náhodné chyby připisujeme skutečně náhodě. Několikerým opakováním měření je můžeme potlačit.

Chyby hrubé

Jsou to velké chyby, které vznikají nedostatečným soustředěním experimentátora. Objevíme je, jestliže měření opakujeme vícekrát (viz níže). Měření zatížené hrubou chybou vyřadíme ze souboru hodnot.

Zpracování výsledku dostatečné k řešení experimentální úlohy

Uvádíme zde jednoduchý algoritmus, který vám doporučujeme použít na zpracování dostatečného počtu měření (alespoň deseti). Body 1) až 5) se týkají jen statistické chyby.

- 1) Určíme z naměřených hodnot aritmetický průměr.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Dá se dokázat, že za jistých předpokladů je pro nekonečně mnoho měření aritmetický průměr shodný se střední hodnotou měřené veličiny (viz literatura).

- 2) Stanovíme pro každou hodnotu odchylku od průměru Δx_i .
- 3) Vypočteme standardní odchylku

$$s_{st} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2}.$$

- 4) Vyloučíme hrubé chyby. K tomu se používá takzvané 3-s kritérium. Vyloučíme všechny hodnoty, které se od aritmetického průměru liší o více jak $3s_{st}$ a opakujeme předchozí body.

Určíme směrodatnou odchylku aritmetického průměru (statistickou odchylku)

$$s_{sm} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2}.$$

- 5) Určíme systematickou chybu. Za chybu přístrojů můžeme považovat např. půlku nejmenšího dílku stupnice. Chybu metody, kterou neumíme vypočítat, musíme alespoň fundovaně odhadnout.
- 6) Určíme celkovou chybu dle vzorce

$$s_{\text{celk}} = \sqrt{(3s_{\text{sm}})^2 + s_{\text{sys}}^2},$$

pro malý počet měření dle přibližného vzorce $s_{\text{celk}} = 3s_{\text{sm}} + s_{\text{sys}}$.

- 7) Chybu zaokrouhlíme na jednu platnou číslici, jen je-li jí jednička, na dvě. Aritmetický průměr zaokrouhlíme na řád poslední platné cifry chyby.
- 8) Výslednou hodnotu uvádíme jako $x = (\bar{x} \pm s_{\text{celk}})$.

Ještě byste měli vědět, k čemu se vůbec chyby počítají. Odchylka nám udává, jak přesně jsme danou veličinu změřili. Dá se odvodit, že přesná hodnota leží v uváděném intervalu s pravděpodobností 99,7 %.

Literatura

- [1] J. Brož a kol.: *Základy fyzikálních měření (I)*. SPN, Praha 1967.
- [2] Bohumil Vybíral: *Zpracování dat fyzikálních měření*. Knihovnička Fyzikální olympiády č. 52. MaFy, Hradec Králové 2002. Ke stažení na stránkách Fyzikální olympiády <http://fo.cuni.cz>.

Úloha I. S ... pravděpodobnost (5 bodů; průměr 3,46; řešilo 50 studentů)

- a) Z 32 karet se náhodně vyberou tři karty. Zjistěte pravděpodobnosti jevů, že mezi vybranými kartami bude právě jedno eso, alespoň jedno eso, ani jedno eso.
- b) V nádobě se nachází N stejných částic. Určete pravděpodobnost, že v levé půlce bude o m částic více než v pravé půlce. Nakreslete graf závislosti pro $N = 10^{10}$. Rozsah m volte tak, aby pravděpodobnost na krajích intervalu byla desetinná oproti středu intervalu. Jak závisí šířka křivky (tj. rozdíl $m_2 - m_1$, kde $m_2 > 0$ a $m_1 < 0$ jsou hodnoty m , pro které je pravděpodobnost poloviční oproti maximu) na N ?
- c) Odhadněte velikost $\ln(n!)$ (bez použití Stirlingova vzorce).

Zadal autor seriálu Matouš Ringel.

První díl seriálu byl jednoduchý a spíše matematický, takže jej řešilo hodně řešitelů, kteří se s úlohami většinou dobře vypořádali. Museli překonávat i další obtíže; při výrobě první série u nás totiž řádl tiskařský šotek, který do seriálu zanesl hned dvě chyby, které vzápětí uvedeme na pravou míru.

- a) V této podúloze nějaký záškodník změnil počet karet v balíčku na 36 místo správného počtu 32. Zde úlohu vyřešíme se správným počtem karet 32, kde jsou čtyři esa (samozřejmě uznáváme i řešení s 36 kartami).

Nejjednodušší je určit pravděpodobnost, že nevytáhneme ani jedno eso. Potom všechny vytažené karty musí být z množiny 28 „nees“. Počet příznivých případů (výběrů) je $\binom{28}{3}$, celkový počet výběrů je $\binom{32}{3}$, takže pravděpodobnost vychází

$$p_0 = \frac{\binom{28}{3}}{\binom{32}{3}} = \frac{26 \cdot 27 \cdot 28}{30 \cdot 31 \cdot 32} \doteq 0,660.$$

Má-li být mezi kartami právě jedno eso, musíme jednu kartu vybrat z množiny es a zbylé dvě karty z množiny nees. Eso lze z es vybrat $4 = \binom{4}{1}$ způsoby, dvě karty z nees pak $\binom{28}{2}$ způsoby. Tyto dva výběry lze libovolně kombinovat, takže počet příznivých případů je $4 \cdot \binom{28}{2}$. Počet všech výběrů je stejný jako výše, čili pravděpodobnost, že mezi třemi kartami bude právě jedno eso, je

$$p_1 = \frac{\binom{4}{1} \binom{28}{2}}{\binom{32}{3}} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 27 \cdot 28}{30 \cdot 31 \cdot 32} \doteq 0,304.$$

Jestliže požadujeme, aby ve výběru bylo alespoň jedno eso, můžeme postupovat oklikou. Je totiž zřejmé, že vždy nastává právě jeden z jevů „alespoň jedno eso“ a „žádné eso“. Pravděpodobnost jevu „alespoň jedno eso“ pak bude doplňkem do jedničky pravděpodobnosti jevu „žádné eso“, kterou již známe. Proto

$$p_{\geq 1} = 1 - p_0 = 1 - \frac{\binom{28}{3}}{\binom{32}{3}} \doteq 0,340.$$

- b) Tato podúloha byla chybou zasažena na nejcitlivějším místě; z textu seriálu se při krácení omylem vytratil vzorec, pomocí kterého se měla vyřešit tato úloha, tzv. Stirlingův vzorec. Většina z řešitelů však Stirlingův vzorec buď znala, nebo si pomohla bodem c) úlohy, takže chyba neměla katastrofální důsledky.

Chceme určit pravděpodobnost, že z celkového počtu N částic bude $(N + m)/2$ v levé půlce a $(N - m)/2$ v pravé půlce (potom bude vlevo o m více částic než vpravo). Celkový

počet možných uspořádání je 2^N (u každé částice můžeme říct, má-li být vpravo, nebo vlevo), počet příznivých případů je $\binom{N}{(N+m)/2}$ (ze všech částic vybíráme ty, které mají být vlevo). Počítaná pravděpodobnost tedy vychází

$$p = \frac{1}{2^N} \cdot \binom{N}{\frac{1}{2}(N+m)}.$$

Dále bylo úkolem namalovat graf této závislosti pro $N = 10^{10}$. Umocníme-li naň dvojku nebo počítáme-li z něj faktoriál, dostaneme obrovské číslo, které se do žádné kalkulačky ani PC nevejde. Navíc není na první pohled zřejmé, jak závisí kombinační číslo na svých argumentech. Budeme se jej proto snažit odhadnout, a to pomocí Stirlingova vzorce, který omylem nebyl uveden v seriálu (lze použít i odhad z bodu c). Stirlingův vzorec dává pro faktoriál čísla odhad

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

platný pro dostatečně velká n (s chybou menší než 1% se dá používat již od čísla $n = 9$).

Pravděpodobnost si rozepíšeme pomocí faktoriálů a odhadneme Stirlingovým vzorcem

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2^N} \frac{N!}{\left(\frac{N+m}{2}\right)! \left(\frac{N-m}{2}\right)!} \approx \\ &\approx \frac{1}{2^N} \frac{\sqrt{2\pi N} \left(\frac{N}{e}\right)^N}{\sqrt{\pi(N+m)} \left(\frac{N+m}{2e}\right)^{(N+m)/2} \cdot \sqrt{\pi(N-m)} \left(\frac{N-m}{2e}\right)^{(N-m)/2}}. \end{aligned}$$

Tento výraz se po provedení elementárních operací (např. typu $N^N = \exp(N \ln N)$) dostane do tvaru

$$p \approx \sqrt{\frac{2}{N\pi}} \frac{1}{2^N} \frac{\exp\left(N \ln N - \frac{N+m}{2} \ln\left(\frac{N+m}{2}\right) - \frac{N-m}{2} \ln\left(\frac{N-m}{2}\right)\right)}{\sqrt{1 - \frac{m^2}{N^2}}},$$

který nám však stále mnoho neříká. My však očekáváme, že při růstu m bude pravděpodobnost rychle klesat; důležité budou tudíž jen oblasti s $m \ll N$. Můžeme tedy zanedbat odmocninu ve jmenovateli, která je téměř rovna jedné, a rozvinout logaritmy v exponenciále do Taylorovy řady (stačí do druhého řádu, tj. použijeme vztah $\ln(1+x) \approx x + x^2/2$). Tímto způsobem nakonec získáme vzorec

$$p \approx \sqrt{\frac{2}{\pi N}} \exp\left(-\frac{m^2}{2N}\right),$$

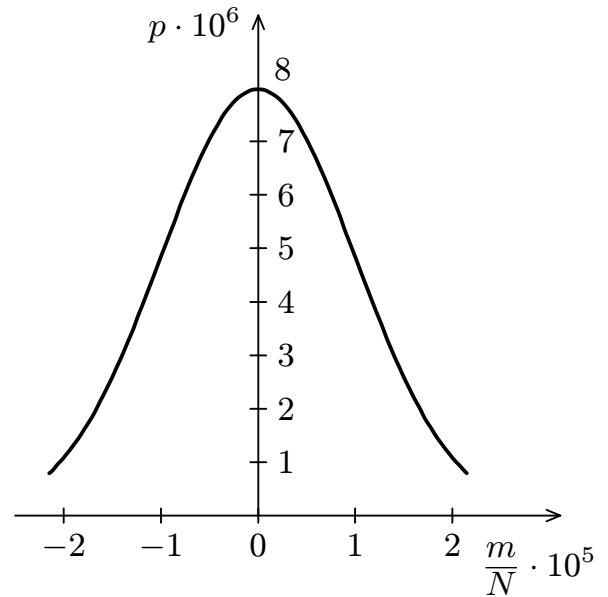
který nám odůvodněně připomíná známou Gaussovu křivku (viz teorie pravděpodobnosti, Gaussovo rozdělení je totiž limitním případem tzv. binomického rozdělení). Všimněme si, že je normovaná (neb m běží pouze přes sudá čísla).

Nyní máme nakreslit graf v takovém měřítku, aby na krajích byla desetinná pravděpodobnost proti středu, tj.

$$\exp\left(\frac{m^2}{2N}\right) = \frac{p(0)}{p(m)} = 10,$$

pročež $m^2/N = 2 \ln 10 \approx 4,61$ a $m/N \approx 2,15 \cdot 10^{-5}$, takže naše přiblížení bylo jistě v pořádku. Vidíme, že šířka křivky Δ (definovaná v zadání úlohy) je dána vzorcem $\Delta = \sqrt{N} \sqrt{2 \ln 2}$. Pokud by nás ale zajímala relativní šířka, tj. $\delta = \Delta/N$, dostali bychom $\delta = \sqrt{2 \ln 2} / \sqrt{N}$. Pravděpodobnost určité relativní fluktuační počtu částic v obou polovinách klesá s celkovým počtem částic N , což je dosti všeobecná vlastnost a důvod, proč funguje statistická fyzika. V systému obsahujícím řekněme 1000 částic se bude například tlak molekul na stěnu pohybovat řádově v 1% okolí své průměrné (rovnovážné) hodnoty. Pokud však místo tisíce vezmeme částic 10^{23} , tlak bude mít odchylku od průměrné hodnoty typicky $3 \cdot 10^{-12}$ %, což je naprosto zanedbatelné oproti jiným vlivům.

c) Nakonec poněkud ospravedlníme Stirlingův vzorec. Odhadneme totiž $\ln(n!)$. Celý odhad je založen na následujícím povšimnutí



Obr. 14

$$\ln(n!) = \ln(1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n) = \ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln n = \sum_{k=1}^n \ln k.$$

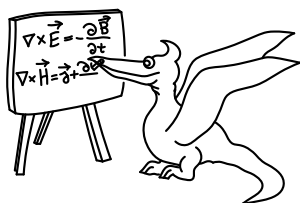
Pro velká n se logaritmus mění velice pozvolně, a je proto možné nahradit sumu integrálem. Takto dostáváme odhad

$$\ln(n!) = \sum_{k=1}^n \ln k \approx \int_1^n \ln x \, dx \approx n \ln n - n,$$

čili

$$n! \approx e^{n \ln n - n} = \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Matouš Ringel
matous@fykos.mff.cuni.cz



Seriál na pokračování

Kapitola 3: Aplikace statistické fyziky

V minulém díle seriálu jsme si odvodili základní vztah statistické fyziky, totiž Boltzmannův vzorec. Nyní se jej pokusíme aplikovat na jednoduché konkrétní příklady.

Paramagnetismus

Coby první aplikaci popíšeme problém *paramagnetismu*. Ze školy víme, že látky se v magnetickém poli chovají různě. Některé ze sebe magnetické pole jakoby vytlačují (tzv. *diamagnetika*), jiné naopak magnetické pole silně zesilují (tzv. *ferromagnetika*), další sice pole také zesilují, nicméně pouze slabě – *paramagnetika*. Těmi se právě budeme zabývat.

Je všeobecně známé, že elektron i jiné částice se chovají jako malinkaté magnetky; ve svém okolí budí podobné (ale pochopitelně mnohem slabší) magnetické pole jako magnetky na ledniče. Mají tedy určitý vlastní magnetický moment, tzv. spin. Magnetek umístěný do vnějšího magnetického pole se snaží natočit tak, aby jeho magnetický moment (čili v podstatě směr namagnetování) mířil ve směru vnějšího magnetického pole. Elektron je poněkud zvláštní magnetek. Jeho magnetický moment (spin) totiž nemůže mířit libovolným směrem, nýbrž jenom směrem nahoru (+) nebo dolů (–)⁹. Jestliže spin elektronu míří ve směru vnějšího pole, je energie takového elektronu rovna $-\mu B$, kde B je velikost vnějšího pole a μ je magnetický moment (pro elektron platí přibližně $\mu \approx q/m$ s nábojem elektronu q a hmotností m). Míří-li spin v opačném směru, tedy proti vnějšímu poli, pak má energii μB .

Představme si nyní krystal, v němž má každý atom kovu (kromě jiných) jeden elektron schopný volně měnit orientaci svého spinu. Jestliže zanedbáme interakci mezi jednotlivými spiny, bude energie krystalu rovna součtu energií interakce spinů s vnějším magnetickým polem; tato energie je rovna $E = N_+ \cdot \mu B + N_- \cdot \mu B$. N_+ je zde počet spinů (z celkového počtu N) mířících ve směru pole a N_- je počet spinů mířících proti směru pole; zřejmě musí být splněna podmínka $N = N_+ + N_-$. Teď můžeme použít Boltzmannův vztah, který předpovídá následující rovnovážný poměr počtu spinů mířících vzhůru ku počtu spinů mířících dolů

$$\frac{N_+}{N_-} = \exp\left(-\frac{E_+ - E_-}{kT}\right) = \exp\left(-\frac{2\mu B}{kT}\right).$$

Použitím podmínky zachování celkového počtu částic můžeme dostat průměrné počty spinů s danou orientací

$$N_+ = \frac{\exp\left(\frac{\mu B}{kT}\right)}{\exp\left(\frac{+\mu B}{kT}\right) + \exp\left(\frac{-\mu B}{kT}\right)}, \quad N_- = \frac{\exp\left(-\frac{\mu B}{kT}\right)}{\exp\left(\frac{+\mu B}{kT}\right) + \exp\left(\frac{-\mu B}{kT}\right)}.$$

⁹⁾ Toto tvrzení není přesné. Ve skutečnosti může spin mířit libovolným směrem, ale každý takový stav se dá složit ze stavu „elektron má spin mířící nahoru“ a ze stavu „spin elektronu míří dolů“. Více se dozvíte v nějaké knize o kvantové mechanice. Pro naše účely si stačí představit, že spin míří nahoru, nebo dolů podél osy dané směrem vnějšího magnetického pole.

Tyto vztahy¹⁰ předpovídají, že při velmi malé teplotě budou prakticky všechny spiny mířit ve směru pole, a budou tudíž pole zesilovat – krystal se bude chovat paramagneticky. Při růstu teploty se objeví spiny orientované proti poli; při nekonečně vysoké teplotě nakonec budou obě orientace zastoupeny stejně. Elementárně to můžeme vysvětlit, uvědomující si, že preferovaný je stav s co nejmenší energií. Tepelné fluktuační (kmity mřížky, srážky s volnými elektrony atd.) ovšem mnohé spiny otočí do energeticky méně výhodné pozice; otočí jich tím více, čím větší je teplota.

Můžeme snadno vypočítat celkový magnetický moment kusu krystalu (pro určitost jednotkového objemu) — tento je prostě součtem magnetických momentů jednotlivých elektronů (s příslušnými znaménky). Pro střední magnetický moment proto dostáváme (N je počet atomů v jednotkovém objemu)

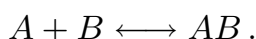
$$M = \mu N_+ - \mu N_- = \mu N \frac{\exp\left(\frac{+\mu B}{kT}\right) - \exp\left(\frac{-\mu B}{kT}\right)}{\exp\left(\frac{+\mu B}{kT}\right) + \exp\left(\frac{-\mu B}{kT}\right)}.$$

V tomto jednoduchém modelu navíc můžeme vypočítat i tepelnou kapacitu¹¹, to jest kolik energie (tepla) je potřeba k ohřátí soustavy spinů o 1 K. Platí zřejmě $C = dE/dT$; energie souvisí s magnetickým momentem krystalu jako $E = M \cdot B$. Stačí tedy zderivovat vztah výše podle teploty a vynásobit jej velikostí magnetického pole. Nakreslíme-li si závislost tepelné kapacity na teplotě, zjistíme obecně platný zákon, totiž že tepelná kapacita klesá s klesající teplotou k nule. V tomto případě klesá tepelná kapacita k nule i s rostoucí teplotou – závislost má lokální maximum někde v oblasti „prostředních“ teplot.

Gultbergův-Waageův zákon

Ze školní chemie jistě znáte poučku (tzv. *Gultbergův-Waageův zákon*) o rovnováze chemických reakcí, která tvrdí, že pro danou reakci v rovnováze je součin jistých mocnin koncentrací výchozích látek dělený součinem jistých mocnin koncentrací produktů reakce konstantní; exponenty jsou číselně rovny stechiometrickým koeficientům, se kterými příslušné molekuly vystupují v zápisu chemické reakce. Vzápětí se ale dodává, že tato konstanta je závislá na teplotě. Zde si zkonstruujeme jednoduchý model jedné speciální chemické reakce (jíž odpovídají exponenty 1) a určíme onu závislost.

Uvažujme reakci, ve které se slučují dvě jednoduché molekuly A a B do jedné výsledné molekuly AB



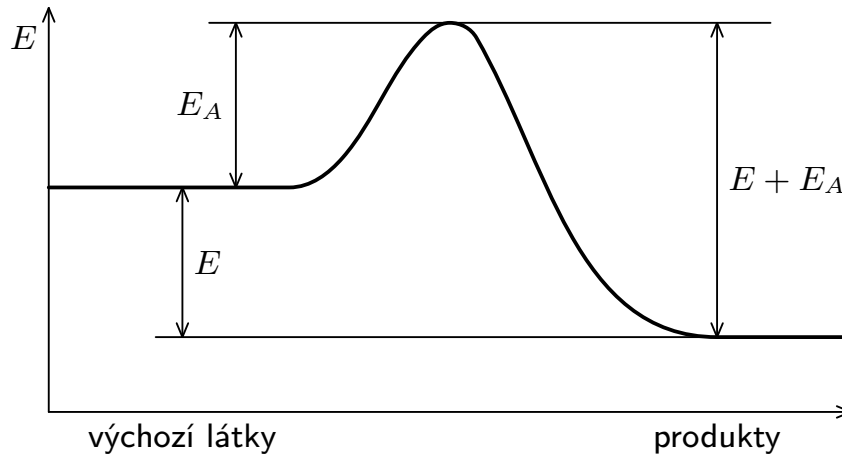
Jak známo, chemická reakce probíhá neustále — molekuly se nepřetržitě slučují a jiné zase rozpadají. V rovnováze, tedy ve stavu, kdy se koncentrace účastníků reakce v roztoku nemění, je rychlost procesu slučování rovna rychlosti procesu rozpadání; za daný čas se stejný počet párů molekul A a B sloučí, jako molekul AB rozpadne. Je potřeba najít rychlosti reakcí přímé V a zpětné W a pak je položit rovny. Nemůžeme ale jít do detailů, poněvadž se ve skutečnosti jedná o velmi složitý problém. Nicméně pokusíme se alespoň odhadnout charakter těchto funkcí. Jako první najdeme rychlost W . Tato je jistě úměrná počtu molekul AB

¹⁰⁾ Jmenovatel obou výrazů je stejný a zajišťuje normování počtů tak, aby platilo $N_+ + N_- = N$; jedná se o partiční sumu Z , definovanou v minulém díle.

¹¹⁾ Máme na mysli tepelnou kapacitu příslušející soustavě spinů. Krystal má pochopitelně také (dříve diskutovanou) tepelnou kapacitu, způsobenou kmity atomů krystalu, a jiné.

n_{AB} (je-li pravděpodobnost rozpadnutí molekuly rovna p , potom přímo z definice pravděpodobnosti plyne, že za stejný čas se z akrát více molekul rozpadne z akrát více molekul). Dále je tento proces závislý na výšce energetické bariéry (aktivační energie), která se musí překonat.

Je-li aktivační energie přímé reakce rovna E_A , pak je bariéra pro zpětnou reakci vysoká $E_A + E$, kde E je výsledná energie uvolněná při vzniku jedné molekuly AB . Jaká část molekul získá dostatečnou energii – tj. o $E_A + E$ a více, než odpovídá základnímu stavu? Tento počet



Obr. 15. Aktivační energie

je úměrný výrazu $\int_{E_A+E}^{\infty} \exp(-x/kT) dx \sim T \cdot \exp(-(E_A + E)/kT)$, v podstatě je to tedy exponenciální závislost. Výsledek¹² je

$$W \approx cn_{AB}T \exp(-(E_A + E)/kT)$$

s nějakou konstantou c . Rychlost přímé reakce je zase úměrná počtu molekul A n_A , ale i počtu molekul B n_B (pravděpodobnost srážky dané molekulou B s nějakou molekulou A bude dvakrát větší, jestliže bude dvakrát více molekul A a naopak), čili dohromady je rychlost úměrná součinu $n_A \cdot n_B$. V přímém směru se musí překonávat energetická bariéra o výšce pouze E_A , pročez rychlost bude úměrná (analogicky případu výše, ovšem výška bariéry je nyní pouze E_A) $T \exp(-E_A/kT)$. Celkově máme

$$V \approx c' n_A \cdot n_B T \exp(-E_A/kT),$$

s další konstantou c' .

V rovnováze požadujeme $V = W$, což rozepsáno pomocí odvozených vzorců dává závislost

$$\frac{n_A n_B}{n_{AB}} = g \exp(-E/kT),$$

kde g je přibližně konstanta. Obdrželi jsme Gultbergův-Waageův zákon (zde pouze pro speciální případ reakce); nalevo stojí koncentrace reaktantů ve správné kombinaci a napravo je funkce pouze teploty – rovnovážná konstanta. Rovnovážná konstanta exponenciálně (a tedy silně)

¹²⁾ Náš postup slouží jenom ke kvalitativnímu pochopení a je jistě nepřesný. Proto bychom faktor T před exponenciálou mohli klidně vynechat, neboť exponenciála se mění se změnou argumentu daleko rychleji než T a my nevíme, jsou-li veličiny E a E_A doopravdy nezávislé na teplotě — i slabá závislost může způsobit velikou výslednou změnu rychlosti W .

závisí na teplotě, s rostoucí teplotou se koncentrace mění v neprospěch produktů. Všimněme si, že aktivační energie E_A se v tomto rovnovážném vztahu nevyskytuje. A musí to tak být; Boltzmannův vztah předpovídá zastoupení různých energií nezávisle na tom, jakými procesy se mezi nimi přechází. Veliká aktivační energie může způsobit, že bude velmi dlouho trvat, než výchozí látka zreaguje (jelikož se jedná o exponenciální závislost, může to „dlouho“ znamenat prakticky cokoliv), ale jakmile se dosáhne rovnováhy, nehraje již roli.

Ideální plyny

V následujících příkladech provedeme jistý myšlenkový skok, přejdeme od diskrétních kvantových systémů ke spojitým klasickým. Ve skutečnosti v tom ale není žádná věda. Kvantový mikrostav byl popsán přirozeným číslem m . Klasický mikrostav jedné částice jednoduše popíšeme šesticí (x, y, z, v_x, v_y, v_z) (pro N částic $6N$ -ticí $(x_1, y_1, z_1, v_{x1}, v_{y2}, v_{z3}, \dots)$), tedy polohami a rychlostmi částic, které mikrostav jednoznačně určují. O množině $6N$ -tic pak mluvíme jako o fázovém prostoru. Pravděpodobnost, že se systém bude nacházet v nějakém mikrostavu, je dána Boltzmannovým vzorcem, ve kterém za E vezmeme pravděpodobnost mikrostavu.¹³

Ještě potřebujeme určit spojitou analogii počtu mikrostavů s energií E , což je v kvantovém případě přirozené číslo, nicméně klasických $6N$ -tic s určitou energií je jistě nekonečně a nespočetně mnoho (tvoří nějakou nadplochu v $6N$ -rozměrném prostoru). Obvykle nás ale zajímá jen poměr počtů mikrostavů s určitými energiemi. V klasickém případě můžeme tento poměr nahradit poměrem mnoharozměrných objemů příslušných nadploch. Obsah těchto tvrzení vyjasníme na příkladech.

Barometrická rovnice

Naši anabázi začneme (jak jinak) odvozením barometrické rovnice, tj. určíme závislost tlaku vzduchu na výšce. Předpokládejme, že atmosféra se nachází v rovnováze, a teplota tedy nezávisí na výšce. Ve skutečnosti to samozřejmě není pravda, atmosféra Země je cokoliv, jen ne příklad rovnovážného systému. Nicméně abychom byli schopni určit alespoň charakter závislosti, budeme počítat výšce uvedenou idealizovanou situaci.

Budeme uvažovat pouze potenciální energii částic, neboť rozdělení kinetické energie se s výškou při konstantní teplotě měnit nemůže, a tedy neovlivní koncentraci. Celý přechod od kvantového případu ke klasickému pak spočívá v tom, že místo energie mikrostavu E_m vezmeme potenciální energii U atomu nacházejícího se v určité výšce. Nechť tlaku na úrovni moře odpovídá koncentrace (tj. počet molekul na jednotku objemu) molekul n_0 . Z Boltzmannova vzorce víme, že zastoupení molekul s energií o U větší, než mají molekuly u země, se řídí vztahem

$$n = n_0 \cdot \exp\left(-\frac{U}{kT}\right).$$

¹³⁾ Ve skutečnosti je pravděpodobnost nacházet se v nějakém určitém klasickém mikrostavu nulová, neboť mikrostavy tvoří tzv. kontinuum. Vždy když dále budeme hovořit o pravděpodobnosti nacházet se v mikrostavu, budeme tím mít na mysli šanci vyskytovat se v určitém (pro určitost jednotkovém) okolí tohoto mikrostavu. Pro malá okolí je pravděpodobnost přímo úměrná velikosti tohoto okolí. Pokud u všech pravděpodobností používáme stejné okolí, velikost okolí se nebude v poměrech pravděpodobností vůbec vyskytovat a nemusíme o něm explicitně mluvit. Pro erudovanější čtenáře zavedeme pojem hustoty pravděpodobnosti. Pravděpodobnost dP , že se veličina h nachází v intervalu $(h, h + dh)$, je pro infinitezimální dh dána vzorcem $dP = \rho(h) dh$. Funkce $\rho(h)$ se nazývá hustota pravděpodobnosti.

Potenciální energie jedné molekuly o hmotnosti m ve výšce h nad úrovní moře (kterou bereme jako hladinu nulové potenciální energie) je dána vzorcem $U = mgh$. Proto koncentrace molekul souvisí s výškou vztahem

$$n(h) = n_0 \cdot \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right).$$

Pokles koncentrací je různý pro různé plyny, neboť molekuly různých plynů mají různou hmotnost. Například relativní zastoupení kyslíku vůči lehčímu dusíku s výškou klesá. Proto je potřeba mít nadále na mysli buď pouze jednu složku vzduchu, nebo za m dosadit nějakou „střední“ hmotnost molekuly; otázka jakou přesně nás nemusí příliš trápit, hmotnosti molekul kyslíku a dusíku, tedy hlavních složek vzduchu, se totiž liší jenom málo a navíc ve skutečnosti odvozená rovnice neplatí moc dobře, neboť atmosféra není v rovnováze. Exponenciální závislost se však přeci jen pozoruje.

Nyní použijeme stavovou rovnici ideálního plynu $PV = nkT$, kterou vztáhneme na jednotkový objem plynu (položíme $V = 1$), čímž dostaneme závislost tlaku na výšce

$$P = nkT = kTn_0 \cdot \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right) = P_0 \cdot \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right).$$

Tlak tedy klesá stejně exponenciálně jako koncentrace molekul.

Maxwellovo-Boltzmannovo rozdělení

V tomto okamžiku by byl hřích neodvodit i známé Maxwellovo-Boltzmannovo rozdělení rychlostí molekul v ideálním plynu. Ideálnost plynu spočívá v zanedbání interakcí mezi molekulami. Energie molekul pak nezávisí na poloze, a stačí tudíž uvažovat jen rozdělení rychlostí.

Nejprve vypočítáme, jaké je rozdělení rychlostí ve směru některé souřadnicové osy, třeba x . Z výrazu pro energii částice $E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$ je vidět, že rozdělení rychlostí ve směru x je nezávislé na směrech y i z . Přejít od kvantového k spojitému systému nečiní potíže. Mikrostav s daným příspěvkem k energii je právě jeden, takže jsme v situaci příkladu výše. Pravděpodobnost, že částice bude mít rychlost v_x ve směru osy x , je pak úměrná (ve smyslu poznámky pod čarou 13)

$$P(v_x) \sim \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right).$$

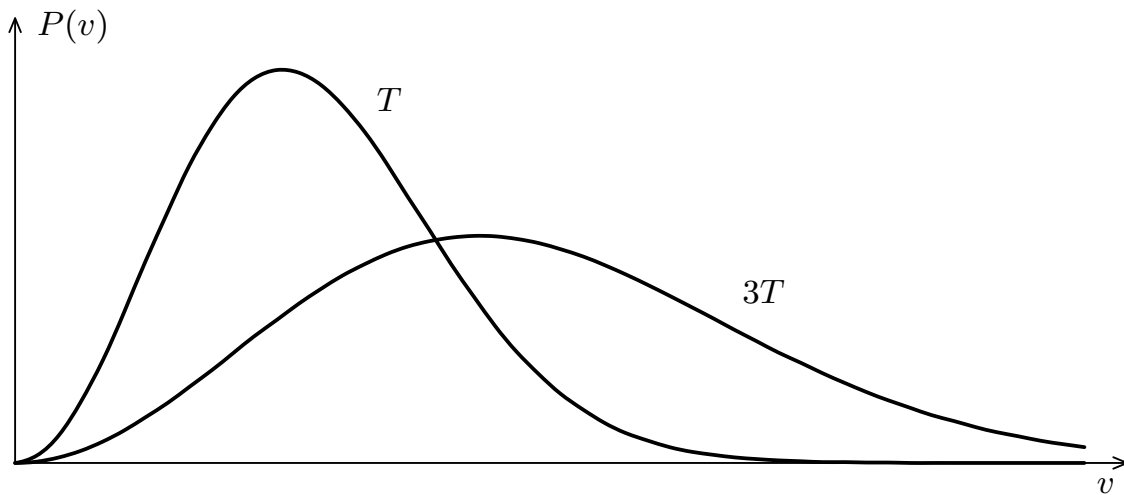
Dále odvodíme rozdělení velikostí rychlostí. Zde je situace malinko složitější. Poměr počtu mikrostavů s danou energií zde totiž není stálý. Kinetická energie částice je dána vztahem $mv^2/2$. K této energii vedou všechny vektory rychlosti \mathbf{v} , jejichž velikost je v , což jsou vlastně vektory, jejichž koncový bod leží na kouli o poloměru v . Ta má však povrch úměrný v^2 , takže poměr počtu mikrostavů s velikostmi rychlostí v_1 a v_2 je v_1/v_2 . Proto poměr pravděpodobností mít rychlost o velikosti v_1 a v_2 je (z Boltzmannova vzorce)

$$\frac{P(v_1)}{P(v_2)} = \frac{v_1^2 \cdot \exp(-mv_1^2/2kT)}{v_2^2 \cdot \exp(-mv_2^2/2kT)},$$

čili relativní počet částic (pravděpodobnost), které budou mít rychlost v okolí v , je

$$P(v) \sim v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right),$$

což je právě ono slavné Maxwellovo-Boltzmannovo rozdělení, znázorněné na obrázku 16 pro různé teploty T a $3T$.



Obr. 16. Maxwell-Boltzmannovo rozdělení pro teploty T a $3T$.

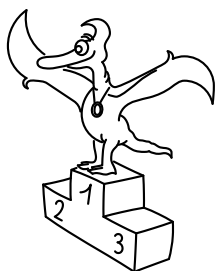
Všimněme si, že rozdělení rychlostí ve směru x má maximum pro $v_x = 0$; podstatný díl částic se tedy v tomto (a každém jiném) směru skoro nepohybuje. To by se mohlo zdát paradoxní. Nicméně rozdělení velikosti rychlostí jasně předpovídá, že podíl částic s rychlostí okolo $v = 0$ bude nulový (díky faktoru v^2 před exponenciálou) a maximum bude nastávat pro jistou hodnotu v_m , která roste s teplotou.

Na tomto místě výklad ukončíme a budeme se těšit na další díl seriálu.

Úloha III. S ... aplikace statistické fyziky

- Pomocí podobné úvahy jako v příkladu v textu určete, jaký tvar má Gultbergův-Waageův zákon pro složitější reakce (např. $2A + B \rightarrow A_2B$). Zkuste zjistit, jestli (a jak dobře) tento zákon odpovídá skutečnosti.
- Z Maxwellova-Boltzmannova rozdělení odvoďte, jaké mocnině teploty je úměrná střední kinetická energie částic plynu. Ověřte si, že jste schopni stejnou metodou zjistit, jak závisí na teplotě střední hodnota *libovolné* mocniny rychlosti.
- Mějme systém nezávislých spinů, diskutovaný v textu, o teplotě T_1 , který se nachází v magnetickém poli o velikosti B_1 . Následně systém adiabaticky zaizolujeme (tj. zavřeme jej do termosky, aby z něj nemohlo odcházet žádné teplo) a budeme pomalu zmenšovat magnetické pole až na hodnotu B_2 . Kvalitativně vysvětlete, proč se bude snižovat teplota systému. Pokud možno vypočítejte, jaká bude výsledná teplota T_2 .

Nápověda. Práce vykonaná na systému s magnetickým momentem M při malé změně magnetického pole B o dB je dána vztahem $dW = -M dB$.



Pořadí řešitelů po I. sérii



Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	I	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	4	5	8	5	34	<i>100</i>	34
1. <i>Marek Pechal</i>	G Lesní čtvrť, Zlín	4	4	3	5	6	6	7	35	<i>103</i>	35
2.–3. <i>Tomáš Bednárik</i>	Masarykovo G Vsetín	4	1	3	4	3	7	6	28	<i>82</i>	28
<i>Martin Konečný</i>	G Boskovice	4	4	4	4	1	7	4	28	<i>82</i>	28
4. <i>Jan Váňa</i>	G Lesní čtvrť, Zlín	4	4	–	4	–	7	6	25	<i>100</i>	25
5.–6. <i>Roman Derco</i>	G dukl. hrdinův, Svidník	4	4	3	3	–	6	4	24	<i>83</i>	24
<i>Libor Šachl</i>	G Terezy Novákové Brno	4	4	–	4	1	6	5	24	<i>80</i>	24
7. <i>Petra Malá</i>	G Moravský Krumlov	3	4	–	3	–	7	4	21	<i>84</i>	21
8.–13. <i>Miroslav Hrubý</i>	Biskupské G, Brno	4	4	2	4	–	4	2	20	<i>69</i>	20
<i>Martin Koštejn</i>	G a SPgŠ Liberec	4	4	1	4	–	5	2	20	<i>69</i>	20
<i>Ján Mikuláš</i>	G B. S. Timravy, Lučenec	4	4	–	4	–	3	5	20	<i>80</i>	20
<i>Vojtěch Molda</i>	Masarykovo G Vsetín	5	1	3	2	–	7	2	20	<i>69</i>	20
<i>Zuzana Pôbišová</i>	G Tajovského, B. Bystrica	4	1	2	2	–	7	4	20	<i>69</i>	20
<i>Marek Scholz</i>	G F. Palackého, Neratovice	4	4	–	3	5	–	4	20	<i>91</i>	20
14. <i>Jan Jelínek</i>	G Konstantinova Praha	4	5	–	4	1	0	4	18	<i>60</i>	18
15.–16. <i>Petr Bezmozek Dvořák</i>	SPŠ Jihlava	4	–	–	2	–	6	4	16	<i>76</i>	16
<i>Rushil Goel</i>		3	4	2	4	–	–	3	16	<i>76</i>	16
17. <i>Adam Přenosil</i>	G Sladkovského n. Praha	4	4	–	2	–	–	4	14	<i>82</i>	14
18. <i>Tomáš Jirotko</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	4	4	–	–	–	5	–	13	<i>81</i>	13
19. <i>Jenda Valášek</i>	G Broumov	4	4	–	–	–	4	–	12	<i>75</i>	12
20.–22. <i>Jan Bednář</i>	COP Hronov	4	–	–	4	–	–	2	10	<i>77</i>	10
<i>Jiří Šperka</i>	GOA Blansko	4	–	–	–	–	6	–	10	<i>83</i>	10
<i>Peter Vampa</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	0	4	1	–	0	5	–	10	<i>40</i>	10
23. <i>Miroslav Janáček</i>	G a SPgŠ Liberec	3	2	1	–	–	–	–	6	<i>50</i>	6
24. <i>Martin Slezák</i>	G Vlašim	3	–	–	2	–	–	–	5	<i>63</i>	5
25. <i>Matěj Bitnar</i>	COP Hronov	–	1	1	–	1	–	–	3	<i>23</i>	3

Kategorie třetích ročníků

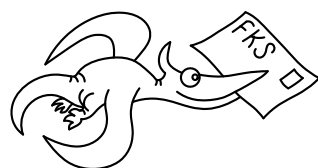
jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	I	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	4	5	8	5	34	100	34
1. <i>Pavel Motloch</i>	G Petra Bezruče, Frýdek-Místek	4	4	4	4	2	7	6	31	91	31
2. <i>Tomáš Bzdušek</i>	G Piešťany	4	4	5	4	5	5	3	30	88	30
3. <i>Martin Formánek</i>	G Uherské Hradiště	4	4	2	4	4	7	3	28	82	28
4. <i>Peter Berta</i>	G Velké Kapušany	4	4	2	4	5	6	2	27	79	27
5. <i>Jakub Benda</i>	G Jana Nerudy, Praha	4	4	3	3	–	6	6	26	90	26
6. <i>Daniel Šimsa</i>	G J. Jungmanna, Litoměřice	4	4	2	4	–	6	2	22	76	22
7. <i>Pavol Pšeno</i>	G Ružomberok	4	3	–	2	5	4	3	21	70	21
8. <i>Lukáš Malina</i>	G Ch. Dopplera, Praha	1	4	–	4	–	6	5	20	80	20
9.–10. <i>Hana Jirků</i>	G Terezy Novákové Brno	4	4	–	4	–	4	3	19	76	19
<i>Kryštof Touška</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	–	1	4	–	4	7	3	19	73	19
11.–13. <i>František Batysta</i>	G J. V. Jirsíka, Č. Budějovice	4	4	–	4	5	–	–	17	100	17
<i>Ondrej Bogár</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	4	4	–	4	–	5	–	17	85	17
<i>Jaroslava Lavková</i>	G Poprad	3	4	–	2	–	5	3	17	68	17
14. <i>Marek Kaleta</i>	G Terezy Novákové Brno	4	4	–	4	1	3	–	16	64	16
15. <i>Lukáš Novotný</i>	G J. K. Tyla, Hradec Králové	4	4	–	2	–	–	4	14	82	14
16.–17. <i>Radim Pechal</i>	SPŠE Rožnov p. R.	–	4	–	4	–	5	–	13	81	13
<i>Jana Przewczková</i>	G Komenského Havířov	1	1	–	2	2	4	3	13	43	13
18.–21. <i>Marek Bukáček</i>	G Havlíčkův Brod	–	3	–	–	–	5	2	10	59	10
<i>Matěj Korvas</i>	G Jaroslava Seiferta, Praha	–	2	–	–	–	5	3	10	59	10
<i>Jan Stránský</i>	G Dobruška	4	1	2	–	1	–	2	10	45	10
<i>Martin Štys</i>	COP Hronov	0	2	–	2	–	6	–	10	50	10
22. <i>Jana Lochmanová</i>	G Chodovická, Praha	4	1	1	–	1	–	2	9	41	9
23.–24. <i>Jakub Prouza</i>	COP Hronov	–	1	–	2	–	5	–	8	50	8
<i>Přemysl Šrámek</i>	G Dašická, Pardubice	4	–	–	–	4	–	–	8	89	8
25. <i>Ján Hreha</i>	G Liptovský Hrádok	–	1	–	4	–	–	1	6	46	6
26.–27. <i>Martin Berka</i>	G Moravská Třebová	2	2	–	–	–	–	–	4	50	4
<i>Jakub Loucký</i>	G Písek	2	1	1	–	0	–	–	4	24	4

Kategorie druhých ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	P	E	S	I	%	Σ
		4	4	4	4	5	8	5	34	100	34
1. <i>Jakub Michálek</i>	G Jana Keplera, Praha	4	4	4	4	4	6	7	33	97	33
2. <i>Zdeněk Vais</i>	G Boskovice	3	4	4	3	2	5	4	25	74	25
3. <i>Lukáš Vítovec</i>	PČG Karlovy Vary	4	5	–	4	1	5	2	21	70	21
4. <i>Vladimír Boža</i>	G D. Tatarku, Poprad	4	4	3	2	–	4	3	20	69	20
5. <i>Jan Hermann</i>	G Český Krumlov	4	4	–	–	–	5	6	19	90	19
6. <i>Lukáš Drápal</i>	G Ch. Dopplera, Praha	4	–	–	2	1	6	5	18	69	18
7. <i>Marek Nečada</i>	ZŠ Otakara Březiny	–	4	–	4	4	–	4	16	89	16
8. <i>Iva Kocourková</i>	G nám. TGM Zlín	2	–	–	2	3	4	3	14	54	14
9. <i>Katarína Rozvadská</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	4	–	–	4	5	–	13	76	13
10. <i>Helena Svobodová</i>	G Ch. Dopplera, Praha	3	2	1	–	–	3	3	12	48	12
11. <i>Petr Šedivý</i>	G Dašická, Pardubice	2	1	2	3	0	2	–	10	34	10
12.–13. <i>Lucie Kadrmanová</i>	G Jeseník	–	–	–	2	–	–	1	3	33	3
<i>Vojtěch Špulák</i>	COP Hronov	–	1	1	–	–	–	1	3	23	3
14.–16. <i>Vlastimil Daníček</i>	COP Hronov	–	2	–	–	–	–	–	2	50	2
<i>Zuzana Jungrová</i>	G Blovice	–	–	–	–	2	–	–	2	40	2
<i>Petra Navrátilová</i>	COP Hronov	0	1	–	1	–	–	–	2	17	2
17. <i>Lucie Pospíšilová</i>	G Matyáše Lercha, Brno	–	–	–	–	1	–	–	1	20	1
18. <i>Martin Flíger</i>	COP Hronov	0	–	–	–	–	–	–	0	0	0

Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	I	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	4	5	8	5	34	100	34
1.–3. <i>Lukáš Cimpl</i>	G Frenštát pod Radhoštěm	1	1	1	1	2	3	3	12	35	12
<i>Alžběta Černeková</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	4	2	–	1	5	–	12	57	12
<i>Richard Polma</i>	G Mladá Boleslav	3	–	2	–	0	4	3	12	46	12
4.–5. <i>Jana Figulová</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	4	–	–	–	4	–	8	67	8
<i>Dana Suchomelová</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	4	–	–	–	4	–	8	67	8
6. <i>Katarína Bazová</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	1	–	2	–	–	4	–	7	44	7
7. <i>Jan Šedek</i>	COP Hronov	4	–	–	–	–	0	–	4	33	4
8. <i>Jiří Novák</i>	COP Hronov	0	1	0	2	–	0	0	3	10	3
9. <i>Lukáš Vrablic</i>	SPŠ Hradec Králové	–	0	1	0	0	–	–	1	6	1
10. <i>Jan Mertlík</i>	COP Hronov	0	–	–	–	–	0	–	0	0	0

**FYKOS**

UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta

Ústav teoretické fyziky

V Holešovičkách 2

180 00 Praha 8

www: <http://fykos.mff.cuni.cz>e-mail pro řešení: fykos-solutions@mff.cuni.cze-mail: fykos@mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.