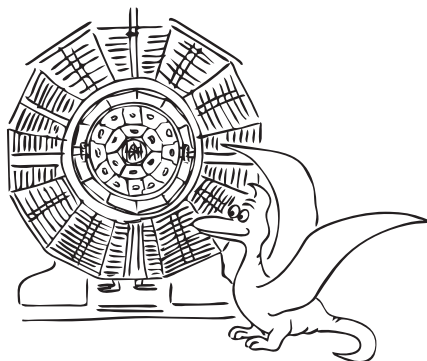


## Milí řešitelé!

Dostáváte do rukou zadání letošní předposlední série. Někteří z vás (ti úspěšnější) již obdrželi pozvánku na jarní soustředění. Ostatní ovšem nemusí házet flintu do žita! Pozvánku do na zájezd do CERNu, který se uskuteční na konci dubna, dostanou nejlepší řešitelé po čtvrté Balónkovské sérii, jejíž řešení jste všichni již jistě odeslali. O účasti na druhém (podzimním) soustředění ještě rozhodnou poslední dvě série, tak se s chutí pusťte do řešení úloh, které jsme pro vás vymysleli.

V úvodu letáku bychom také chtěli vyzvednout a pochválit skvělé výkony našich řešitelů v celostátním kole Fyzikální olympiády<sup>1</sup>. Konkrétně se jedná o *Marka Pechala, Pavla Motlocha, Jakuba Bendu, Ondru Bílku, Tomáše Jirotku, Tomáše Bednárika, Mirka Hrubého, Jakuba Michálka, Lukáše Novotného, Moniku Josiekovou, Lukáše Vítovce, Jana Váňu, Michala Pavelku, Aleše Podolníka, Daniela Šimsu* a v neposlední řadě *Martina Koštejna*. Doufáme, že vám řešení našeho semináře alespoň částečně pomohlo k tomuto úspěchu.

*Honza Prachař*



## Den s experimentální fyzikou

Jako každý rok i letos vás srdečně zveme na tradiční celodenní akci s názvem Den s experimentální fyzikou (DSEF), kterou pořádáme přednostně pro řešitele FYKOSu samozřejmě bez ohledu na výsledky v naší soutěži a případně pro jejich přátele a pedagogický doprovod. Dostanete jedinečnou příležitost prohlédnout si nejrůznější zařízení, se kterými fyzikové pracují, seznámit se s aktuální problematikou a nejnovějšími poznatky v experimentální fyzice a také poznat učitele na Matematicko-fyzikální fakultě. Letošní DSEF se uskuteční **v úterý 25. dubna 2006** a bude spojen s odjezdem vybraných účastníků do CERNu po skončení akce.

Náplň letošního Dne byla inspirována moderními trendy ve fyzice, které můžeme vyjádřit slovy jako „nano“, „femto“ či „nukleární“, a proto vás letos čekají exkurze jednak poprvé do Ústavu jaderného výzkumu a Ústavu jaderné fyziky AV ČR v Řeži u Prahy, kde (pouze pro starší) rovněž proběhne tradiční exkurze k jadernému reaktoru, a potom odpoledne na MFF na Karlově exkurze k nano a femtosekundovému laseru a kromě dalších také k elektronovému mikroskopu, který nám umožňuje studovat detailní strukturu a složení vzorků či poskytne neobvyklý a působivý pohled do očí hmyzu.

Podrobnosti se průběžně budou objevovat na webu <http://fykos.mff.cuni.cz/cz/dsef>, kde naleznete přihlašovací formulář, rozvrh exkurzí, cestu na místo a čas srazu a další užitečné informace a pokyny. Hlavně zde najdete seznam přihlášených účastníků, se kterými si můžete

<sup>1)</sup> viz [http://www.pef.zcu.cz/pef/kof/pom/fo\\_06/vysledky.html](http://www.pef.zcu.cz/pef/kof/pom/fo_06/vysledky.html)

domluvit společnou cestu! Pokud by hrozilo, že byste cestovali sami, můžete v případě volné kapacity přihlásit svého kamaráda se zájmem o fyziku. Rovněž se DSEF bude moci zúčastnit váš pedagogický doprovod.

### Přihlášky

K přihlášení prosíme používejte přednostně *webový formulář*, který bude zprovozněn na FYKOSíh stránkách <http://fykos.mff.cuni.cz>, a před jeho vyplněním se dobře seznámte s pokyny! Ti, kteří nemají přístup na internet alespoň jednou týdně, mohou poprosit svého kamaráda či učitele, aby vás přihlásil, nebo v krajním případě nám mohou zaslat požadované údaje *jméno, příjmení, věk v době konání, zájemci o reaktor číslo OP, preferovanou skupinu č. 15 až 19 podle věku, resp. vašich znalostí a kontakt na sebe* nejlépe formou sms (tel. 723 781 754 – nevolat; diakritiku ve jménu nahraďte vhodnými znaky), popřípadě poštou na adresu FYKOSu. Všem přihlášeným zašleme v týdnu před akcí podrobné informace a omluvenku do školy, což zároveň poslouží jako potvrzení vaší účasti. Sledujte průběžně web a k řešení jakýchkoliv situací používejte e-mail [dsef@fykos.mff.cuni.cz](mailto:dsef@fykos.mff.cuni.cz)!

**Uzávěrka** elektronických přihlášek je **středa 12. dubna 2006**, přičemž papírové přihlášky musí být odeslány nejpozději v pátek 7. 4. Neřešitelé FYKOSu – zájemci o fyziku se přihlásí po předchozím souhlasu organizátorů a v případě volných míst. S přihláškami, prosíme, neotálejte, vyjednaná kapacita DSEF, resp. jednotlivých skupin a laboratoří je omezená!

**Pavel Brom**  
[dsef@fykos.mff.cuni.cz](mailto:dsef@fykos.mff.cuni.cz)



## Zadání V. série

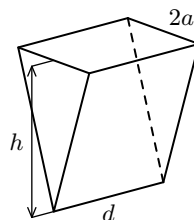


*Termín odeslání: 10. dubna 2006*

### Úloha V.1 ... veď svou bárku dál

Pracovníci NASA objevili, že určité sedimenty rostlinného původu na měsíci Europa mají zajímavou štěpnost na velice pevné desky tvaru obdélníku a rovnoramenného trojúhelníku, takže z nich lze snadno a levně postavit loď výšky  $h$ , délky  $d$  a šířky paluby  $2a$  jako na obrázku 1. Kapitán vám dává za úkol zjistit, pro jaké hustoty tamějších oceánských vod bude plavba bezpečná.

Předpokládejte, že desky mají konstantní tloušťku a hustotu  $\rho_m$ , že loď je dutá a má palubu. (Diskutujte případ, že plavidlo není duté a celé má konstantní hustotu  $\rho_m$ .) Nemusíte kapitánovi předložit jedinou výslednou relaci, spíše prakticky užitečný návod na propočty s uvedením všech potřebných vztahů; snažte se je napsat přehledně a úsporně a odůvodněte užití případné vhodné aproximace.



Obr. 1

### Úloha V.2 ... Pet u okna

U okna ve vytopeném pokojíku stojí uzavřená prázdná PET láhev. Za oknem mrzne, až praští. Ráno maminka otevřela okno, aby místnost důkladně vyvětrala, jenže při vaření oběda na to zcela zapoměla, a v pokojíku tak klesla teplota pod bod mrazu. Určete relativní změnu objemu láhve, která stojí na okně.

**Úloha V.3 ... účinnost elektrárny**

Vypočítejte účinnost stroje, který pracuje mezi dvěma tepelnými láznemi o teplotách  $T_1$  a  $T_2$ ,  $T_1 > T_2$  a který dosahuje maximálního možného výkonu. Do výsledného vztahu potom dosadíte data některé známé elektrárny.

Uvědomte si, že Carnotův stroj má nulový výkon, protože při izotermickém ději je rozdíl teplot mezi strojem a lázní nekonečně malý, což způsobí nekonečně malý tepelný tok a nekonečně malý výkon stroje.

**Úloha V.4 ... přírodní reaktor**

Ve vzorku přirozeného uranu je 0,72 % izotopu  $^{235}\text{U}$  s poločasem rozpadu 704 milionů let a zbytek izotopu  $^{238}\text{U}$ , který má poločas rozpadu 4 468 milionů let.

V sedmdesátých letech minulého století byla při těžbě uranu v oblasti Okla v rovníkovém Gabonu objevena ruda s relativním zastoupením izotopu  $^{235}\text{U}$  0,44 %. Tento nesoulad lze vysvětlit tím, že se v ložisku kdysi samovolně zažehl přírodní jaderný reaktor.

Určete, po jakou dobu jaderná reakce probíhala, bylo-li štěpení  $^{235}\text{U}$  vyvoláno pomalými neutrony. Ke srážce nějakého pomalého neutronu s daným jádrem dojde průměrně jednou za 352 tisíc let.

**Úloha V.P ... o ztracené studně**

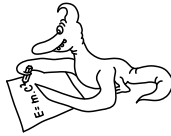
Babička a dědeček obývají už léta svoji starou chalupu, kde mají vlastní studnu se znamenitou vodou. Jednoho dne přestala pumpa jejich vodu čerpat, pravděpodobně se poškodil koš ve studni. Tato drobná závada se však ukázala jako velký problém, neb oni sami ani jejich předkové nevěděli, kde byla studna kdysi vykopána.

Od čerpadla, které je uvnitř chalupy, vede jedenapůlpcová trubka asi metr pod zem, kde zahýbá a pokračuje vodorovně směrem ven z chalupy. Studna je zavezená, avšak není jasné, jestli je na zahradě či dokonce přímo pod domem.

Poradte starouškům, jakým způsobem nalézt studnu. Navrhněte několik co nejsnáze proveditelných postupů.

**Úloha V.E ... babiččiny palačinky**

Rozehřejte pánvičku na plotýnce nebo nad plamenem tak, aby se na ní daly smažit palačinky (asi na 200°C). Pokud na její suchý rozžhavený povrch cáknete kapičku vody, hned se nevypaří, ale bude po něm až minutu rejdít. Proměřte dobu rejdění v závislosti na velikosti kapičky a tento jev se pokuste vysvětlit.

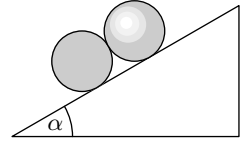


## Řešení III. série

**Úloha III. 1 ... dotyk koule a válce** (4 body; průměr 1,70; řešilo 50 studentů)

Koule a válec o stejném poloměru a stejné hmotnosti jsou vyrobené z různých materiálu a leží na nakloněné rovině tak, že se vzájemně dotýkají. Určete, za jakých podmínek zůstanou ležet v klidu.

Řešil Petr Sýkora při TJUFu.



Obr. 2

Ze všeho nejdříve se musíme omluvit, že při formulování úlohy došlo ke dvěma zjednodušením (tělesa mají stejné hmotnosti a poloměry), které každé zvlášť ještě dovoluje teoretické zaseknutí koule a válce i na jiné než vodorovné podložce, ale dohromady neumožňují zaseknutí se obou těles na nakloněné rovině.

Začneme tím, že si označíme dle obrázku 3 všechny síly, které na soustavu koule a válce působí. Tělesa na sebe vzájemně působí normálovými silami  $\mathbf{N}$  a  $-\mathbf{N}$  a třecími silami  $\mathbf{F}_t$  a  $-\mathbf{F}_t$ . Pro naše řešení zanedbáme valivý odpor, jelikož jeho velikost by byla o několik řádů nižší než velikosti ostatních uvažovaných sil.

Aby náš systém zůstal v klidu, musí být výslednice všech vnějších sil působících na každé těleso nulová. Obdobně musí mít nulovou velikost také součet všech momentů vnějších sil. Díky tomu, že nás zajímá statický případ, musí toto platit pro momenty sil vůči libovolné ose, tudíž i pro osu, která prochází středem koule (válce) a je zároveň kolmá k nákresně.

Jelikož vůči těmto osám mají nenulový moment jen třecí síly, budeme se momenty sil zabývat dříve než výslednicemi sil.

Klidové tření mezi válcem a podložkou i klidové tření mezi válcem a koulí působí se stejným ramenem síly vůči středu tohoto tělesa, proto platí rovnost  $F_t = F_{t1}$ . Obdobně pro druhé těleso zjistíme, že  $F_t = F_{t2}$ .

Nyní se zaměříme na výslednice vnějších sil. Z rovnováhy všech sil působících na válec pro složky sil rovnoběžných s nakloněnou rovinou plyne

$$mg \sin \alpha + N - F_{t1} = 0.$$

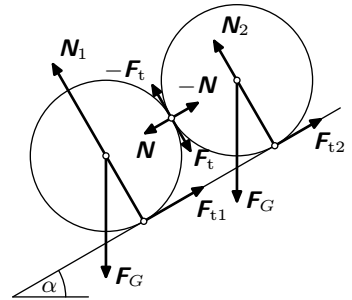
Obdobně pro kouli získáme vztah

$$mg \sin \alpha - N - F_{t2} = 0.$$

Odečtením posledních dvou rovnic dostaneme  $N = 0$ . Tělesa tedy k sobě nejsou přitisknuta, a tudíž nemůžou vzniknout ani třecí síly  $\mathbf{F}_t$  a  $-\mathbf{F}_t$ , což je ve sporu s předpokladem. Soustava nemůže být ve statické rovnováze a nemůže tedy zůstat v klidu. Jiná situace by samozřejmě nastala, pokud by tělesa měla rozdílné hmotnosti, nebo průměry.

Petr Sýkora

petr@fykos.mff.cuni.cz



Obr. 3

**Úloha III. 2 ... nájezd na čočku** (4 body; průměr 2,90; řešilo 49 studentů)

Mějme spojku o ohniskové vzdálenosti  $f$ . Zdroj světla je na ose ve vzdálenosti  $a > f$  od čočky, za kterou vzniká jeho obraz. Zdrojem začneme pohybovat určitou rychlostí směrem k čočce. Určete, jak rychle se pohybuje obraz. Rozhodněte, zda tato rychlost může být i nadsvětelná. Bylo by to v rozporu s principy speciální teorie relativity?

*Vymyslel Jarda Trnka, když psal studijní text z optiky.*

Ačkoliv je úloha velmi nevině zadaná, skrývá mnohé nástrahy. Problém je v tom, že nejsou splněny předpoklady pro použití geometrické optiky.

Zkusme úlohu vyřešit nejdříve zcela naivně použitím zobrazovací rovnice. Pro polohu předmětu platí  $a = a_0 - vt$ , kde  $a_0$  je počáteční poloha předmětu a  $v$  jeho rychlost. Pro polohu obrazu potom dostaneme

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad a' = \frac{(a_0 - vt)f}{a_0 - vt - f}.$$

Rychlost pohybu obrazu vypočítáme jako derivaci polohy podle času

$$v' = \frac{da'}{dt} = \frac{f^2 v}{(a_0 - vt - f)^2} = v \left( \frac{f}{a - f} \right)^2.$$

Vidíme tedy, že rychlost může nabývat libovolné velikosti, tedy i nekonečné (pokud jmenovatel jde k nule). Zde ale narážíme na zásadní problém. Toto řešení je zjevně špatné, neboť zobrazovací rovnice byla odvozena za předpokladu nekonečné rychlosti světla.

Pokud položíme před čočku předmět, bude chvíli trvat, než vznikne za čočkou obraz. Fotony tam musí chvíli letět a jejich rychlost není nekonečná, jak dobře víme. Ve statickém případě by to moc nevadilo, neboť by po nějaké chvíli obraz vznikl a poté už by stále existoval (tedy byl by zachytitelný na stínítku). Pro případ pohybujícího se předmětu to ale nejde. Rychlost obrazu, jak jsme ji vypočítali, totiž neodpovídá ničemu reálnému (jedná se pouze o virtuální bod, kam paprsky doletí někdy v budoucnosti). Pokud nás zajímá obraz, který by šel zachytit na stínítku (tj. který by byl skutečně vidět), musíme konečnou rychlost světla započítat.

Pokud je v čase  $t_1 = 0$  předmět umístěn v poloze  $x = a$ , vytvoří paprsek obraz v čase  $t'_1 = (a + a')/c$ . O chvíli později v čase  $t_2 = dt$  je předmět umístěn v poloze  $x = a - da$  a obraz se utvoří v čase  $t'_2 = (a - da + a' + da')/c + dt$ . Obraz se tedy posune o  $da'$  za čas  $t'_2 - t'_1$ . Pro rychlost obrazu máme

$$v' = \frac{da'}{t'_2 - t'_1} = \frac{da'}{(da' - da)/c + dt}.$$

Po dosazení za  $da = v dt$  a  $da' = v f^2 / (a - f)^2 dt$  dostaneme po úpravách

$$v' = \frac{v f^2}{(a - f)^2 - v a (a - 2f)/c}.$$

Snadno se přesvědčíme, že takto vypočítaná rychlost je omezená rychlostí světla. Takže by se zdálo být vše v pořádku. Problémy však nekončí.

Tento výsledek totiž platí pouze pro bodový zdroj a hlavně pouze pro paprsky, které jdou po ose (taková totální paraxiální aproximace). Paprskům (přesněji fotonům), které nejdu po ose, trvá déle, než se na místo určení dostanou. To znamená, že nemůže vzniknout ostrý

obraz, protože jeho jednotlivé části vzniknou v různých časech (příslušné fotony tam doletí postupně). Výsledkem tedy je, že v případě pohybuujícího se předmětu nevznikne ostrý obraz. Naopak, obraz se bude postupně rozmazávat, a to tím víc, čím bude rychlost pohybu obrazu větší.

Pár slov k došlým řešením. Většina řešitelů správně určila rychlost obrazu v případě nekonečné rychlosti světla. Část řešitelů také odhalila, že konečná rychlost světla bude činit jisté potíže. Ti, kteří provedli korekci i početně, obdrželi bonus bod.

*Jarda Trnka*

jarda@fykos.mff.cuni.cz

### Úloha III. 3 ... odložená koupel (4 body; průměr 1,62; řešilo 29 studentů)

Robin se rozhodl, že se po půl roce vykoupe. Napustil si vanu teplou vodou o teplotě  $T_1$  a objemu  $V_1$ . Ke koupání ale zase nedošlo. Napadlo ho, že je to zbytečné plýtvání energií, teplo z vany totiž lze použít i lépe.

Robin je šikovný a umí si vyrobit libovolný tepelný stroj, proto si už dávno chtěl izotermicky stlačit plyn o teplotě  $T$ , objemu  $V_0$  a hustotě  $\rho$ . A tady k tomu dostal ideální příležitost. Jako chladič použil okolní vzduch, jehož množství je nevyčerpatelné a jehož teplota je  $T_2$ . Určete, na jaký minimální objem  $V_{\min}$  lze tento plyn stlačit, použije-li k tomu Robin teplou vodu ve vaně a svůj tepelný stroj. *Matouš se nechal inspirovat na přednášce z termodynamiky.*

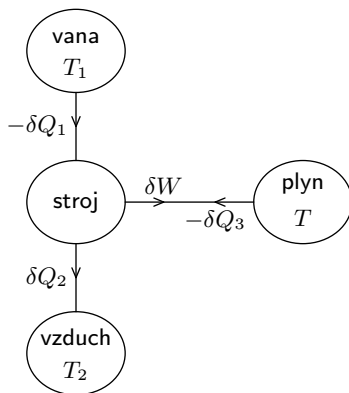
K lepšímu znázornění problému nám pomůže obrázek 4. Veličiny odpovídající vaně označme indexem 1, vzduchu indexem 2 a zahřívávanému plynu indexem 3. Kladným znaménkem označujeme teplo, které dané těleso přijalo, záporným znaménkem teplo odevzdané. Obdobně je práce vykonaná na plynu kladná. Klíčové bylo uvědomit si, že můžeme využít teplo  $\delta Q_3$  uvolněné při izotermickém stlačování plynu.

Pokud je vnitřní energie plynu jenom funkcí teploty (což např. pro ideální plyn platí), nebude se při izotermickém ději měnit. Z prvního termodynamického zákona  $dU = \delta Q + \delta W$  dostáváme pro element práce  $\delta W = -\delta Q_3$ . Soustava jako celek je uzavřená, její celková vnitřní energie se tedy nemění. Protože na vaně ani vzduchu se práce nekoná, budou přírůstky jejich vnitřní energie rovny přírůstkům tepel. Při použití výše uvedené znaménkové konvence dostáváme

$$\delta Q_1 + \delta Q_2 + \delta Q_3 + \delta W = \delta Q_1 + \delta Q_2 = 0.$$

Zavedme veličinu zvanou entropie následujícím vztahem pro její malý přírůstek  $dS = \delta Q/T$ .<sup>2</sup> Celková entropie izolované soustavy nikdy neklesá, což si můžeme ilustrovat na příkladu dvou těles o teplotách  $T_s$  a  $T_t$  ( $T_s < T_t$ ). Vyjádříme si

<sup>2)</sup> Pro přírůstek entropie (obdobně jako u vnitřní energie) používáme symbolu totálního diferenciálu  $d$ , protože jde o stavovou veličinu (při pevném látkovém množství je pevně určena hodnotami  $U$  a  $V$ ). Oproti tomu se práce a teplo vztahují k určité trajektorii ve stavovém prostoru, nejsou určeny jedním bodem stavového prostoru, totální diferenciál nemají.



Obr. 4

změnu celkové entropie za předpokladu, že si obě tělesa vyměňují teplo pouze mezi sebou (tj.  $Q_s = -Q_t$ )

$$dS = dS_s + dS_t = \frac{\delta Q_s}{T_s} + \frac{\delta Q_t}{T_t} = \delta Q_s \left( \frac{1}{T_s} - \frac{1}{T_t} \right) \geq 0.$$

Uvědomme si, že výraz v závorce je kladný a záporné  $\delta Q_s$  by odpovídalo předávání tepla ze studenějšího tělesa teplejšímu, což odporuje druhému termodynamickému zákonu.

Pro uvažovaný systém tedy dostáváme

$$\begin{aligned} dS_1 + dS_2 + dS_3 &\geq 0, \\ \frac{\delta Q_1}{T_1} + \frac{\delta Q_2}{T_2} + \frac{\delta Q_3}{T} &\geq 0. \end{aligned}$$

Uvažujme, že tepelná kapacita  $C$  vody ve vaně je nezávislá na teplotě, potom  $\delta Q_1 = -\delta Q_2 = C dT_1$ . Pro změnu entropie systému během celého děje, kde se vana ochladí z teploty  $T_1$  na teplotu  $T_2$ , dostáváme

$$C \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT_1}{T_1} - \frac{C}{T_2} \int_{T_1}^{T_2} dT_1 - \frac{W}{T} \geq 0.$$

Vidíme, že práce vykonaná na plynu bude maximální, pokud bude zachována rovnost (děj je tedy vratný, opačný děj by neporušoval podmínku neklesání celkové entropie). Maximální práce je tedy

$$W_{\max} = CT \left( \ln \frac{T_2}{T_1} - \left( 1 - \frac{T_1}{T_2} \right) \right). \quad (1)$$

Abychom určili minimální objem  $V$ , musíme znát závislost tlaku plynu na teplotě a objemu, tedy jeho stavovou rovnici. Pro zjednodušení uvažujme ideální plyn se stavovou rovnicí  $pV = nRT$ , kde  $n$  je látkové množství a  $R$  univerzální plynová konstanta. Při vyjádření práce si dáme pozor na to, že změna objemu je záporná, před integrálem bude tedy znaménko mínus.

$$W_{\max} = - \int_{V_0}^{V_{\min}} p dV = -nRT \int_{V_0}^{V_{\min}} \frac{1}{V} dV = -nRT \ln \frac{V_{\min}}{V_0}. \quad (2)$$

Porovnáním vztahů (1) a (2) dostáváme

$$V_{\min} = V_0 \exp \left[ \frac{C}{nR} \left( 1 - \frac{T_1}{T_2} - \ln \frac{T_2}{T_1} \right) \right].$$

Ukažme si, že uvedené maximální práce lze skutečně dosáhnout. Vytvoříme Carnotův cyklus s vanou jako ohřívacem a vzduchem jako chladičem. Vana dodává teplo  $-\delta Q_1$ , tímto cyklem můžeme tedy získat práci  $(-\delta Q_1)(1 - T_2/T_1)$ . (Dokažte sami obdobnou úvahou jako na začátku řešení, že účinnost Carnotova cyklu je nejlepší možná.) Teplo  $(-\delta Q_3)$ , které se uvolní při stlačování plynu, můžeme využít v dalším Carnotově cyklu, probíhající mezi plynem a vzduchem. Pro element práce vykonané na plynu dostáváme

$$\delta W = (-\delta Q_1) \left( 1 - \frac{T_2}{T_1} \right) + (-\delta Q_3) \left( 1 - \frac{T_2}{T} \right).$$

Pokud si uvědomíme, že  $(-\delta Q_3) = \delta W$  a pro element tepla platí  $\delta Q_1 = C dT_1$ , obdržíme rovnici

$$\delta W = -C \left( 1 - \frac{T_2}{T_1} \right) dT_1 + \delta W \left( 1 - \frac{T_2}{T} \right),$$

z níž snadno osamostatníme element práce

$$\delta W = -C \frac{T}{T_2} \left( 1 - \frac{T_2}{T_1} \right) dT_1.$$

Integrací opět dospějeme k výsledku (1).

Abychom mohli splnit podmínku izotermického stlačování, musí být  $T \geq T_2$ , v opačném případě by plyn nemohl odevzdávat teplo žádnému okolnímu objektu.

Většina z vás bohužel zapoměla na teplo, které se uvolní při stlačování plynu. Jediné správné (a vyčerpávající) řešení poslal *Marek Pechal*, čímž si zasloužil prémii.

*Jirka Lipovský*

jirka@fykos.mff.cuni.cz

### Úloha III.4 ... stoupavý proud (3 body; průměr 2,16; řešilo 31 studentů)

Letadlo letí vodorovně rychlostí o velikosti  $v$  a najednou vletne do stoupavého proudu o rychlosti velikosti  $v'$ . Jaké bude počáteční vertikální zrychlení letadla těsně po nalétnutí do stoupavého proudu?

Předpokládejte, že součinitel vzlaku  $C$  (koeficient v Newtonově vzorci pro vzlak) závisí lineárně na úhlu, který svírá směr proudění vzduchu s rovinou křídla.

*Navrhl Matouš Ringel, když mu úlohu odmítl prof. Volf do FO.*

Svislá vzlaková síla působící na letadlo je dle Newtonova vzorce rovna

$$F_v = \frac{1}{2} C \rho S v^2,$$

kde  $S$  je celková nosná plocha křídla,  $\rho$  hustota vzduchu a  $v$  velikost rychlosti vzduchu vůči křídlu. Koeficient vzlaku  $C$  charakterizuje křídlo včetně jeho náklonu vůči vzduchu.

Sledujme problém ze soustavy spojené s letadlem. Na počátku letadlo letí vodorovně, křídlo je skloněno vůči horizontální rovině, ve které fouká vítr, o úhel  $\alpha_0$ , jak vidíme na obr. 5. Po nalétnutí do stoupavého proudu začne na křídlo proudit vzduch pod úhlem  $\alpha$  jako na obr. 6.

Podle zadání víme, že součinitel  $C$  je lineárně závislý na úhlu náklonu, pro koeficient odpovídající úhlu náklonu  $\alpha_0$  platí  $C_0 = \tilde{C} + k\alpha_0$ . Koeficient odpovídající úhlu náklonu  $\alpha + \alpha_0$  můžeme vyjádřit ve tvaru  $C = \tilde{C} + k(\alpha_0 + \alpha) = C_0 + k\alpha$ .

Úhel  $\alpha$  můžeme určit z obr. 6,  $v'/v = \tan \alpha \approx \alpha$ . Aproximaci provádíme za předpokladu, že rychlost stoupavého proudu je mnohem menší než horizontální rychlost letadla. Přímou dosazením do Newtonova vzorce vypočítáme sílu působící na letadlo.

$$F_{\text{před}} = \frac{1}{2} C_0 \rho S v^2,$$

$$F_{\text{po}} = \frac{1}{2} C \rho S (v^2 + v'^2) = \frac{1}{2} (C_0 + k\alpha) \rho S (v^2 + v'^2) = \frac{1}{2} (C_0 + k v'/v) \rho S (v^2 + v'^2).$$

Síla  $F_{\text{před}}$  kompenzuje gravitaci, proto počáteční vertikální zrychlení je rovno

$$a = \frac{F_{\text{po}} - F_{\text{před}}}{m} = \frac{C_0 v'^2 + k v' (v'^2 + v^2)/v}{2m} \rho S,$$

kde  $m$  je hmotnost letadla.



Obr. 5. Před náletem



Obr. 6. Po náletem

*Petra Suková & Karel Tůma*

pet@fykos.mff.cuni.cz, kajinek@fykos.mff.cuni.cz



**Úloha III. P ... udýchaný běžec na ledě** (4 body; průměr 1,51; řešilo 49 studentů)

Jedno pozdní zimní odpoledne se šel Matouš proběhnout na zamrzlý broumovský rybník. Matouš chvilku běžel, ale po pár metrech už nemohl a zastavil se. V zápětí se však pod ním led prolomil a Matouš zahučel pod vodu. Vysvětlete, proč se při běhu pod Matoušem led neprolomil a po zastavení ano?

Úloha ze sbírky Dr. Kapicy.

Nejdříve si vyslechněme rozmluvu našich starých známých.

*Pták Fykosák:* Slyšel jsi, že je nejlepší po ledě běžet a ne na něm jen tak stát?

*Student Pilný:* A to proč?

*P:* Mně to neprozradili. Mám ale takovouto teorii. Když na ledě stojíš, uděluješ danému místu ledu větší impuls síly, než když po něm jen tak proběhneš. A to i přesto, že při běhu na led určitě působíš větší silou než při běhu. A když ledu udělíš větší impuls síly, než je mezní impuls síly, pak se led prolomí.

*S:* Počkej, to je ale divné. Představ si to takto. Na led položíš také závaží, aby zdaleka nedosahovalo hodnotu síly, při které se led běžně prolomí, a čekáš. A za dostatečně dlouhý čas, když závaží udělí ledu potřebný impuls, se led prolomí.

*P:* Přesně to jsem říkal.

*S:* Ale přesně to je na tom divné. To by znamenalo, že je jedno, jak velkou silou působíš, že led reaguje na zatížení různou silou stále stejně, v podstatě lineárně a to není reálné.

*P:* A čím bys to vysvětlil ty?

*S:* No, je to něco podobného. Ukazuje se, že většina látek dokáže krátce odolat mnohem většímu zatížení, než je to při dlouhodobém zatížení. Říkáme, že dynamické mezní zatížení je větší než statické zatížení. A ještě bys neměl zapomenout, že se pod ledem nachází voda. Je například určitě velký rozdíl, když položíš ledovou desku na zem a když ji jen upevníš v nějakých bodech a potom ji namáháš. V prvním případě (to víš ze zkušenosti) vydrží větší zatížení.

*P:* To mám tedy podle tebe skákat na ledě, když se nechci utopit?

*S:* Určitě bych to nenazval skákáním. A kdybys skákal stále na stejném místě, tak se určitě proboříš, protože led sice můžeš jednorázově zatížit větší silou, ale ne víckrát. Takže nejlepší je skákat vždy na nové místo, tedy běžet. Ale i to určitě s mírou. Led také vydrží jen určité namáhání. Proto by bylo nejideálnější běžet co neopatrněji. No, a co se týká tebe, nejlepší je lézat.

Teď se na věc podíváme trochu blíže. Při běhu se od ledu odrážíme a následně na něj dopadáme, přičemž naše těžiště určitě nezůstane ve stejné výšce nad ledem. To ale znamená, že led je namáhaný znatelně víc, a přece to vydrží. Čím to tedy může být?

Co víme o ledě? V první řadě je ideální led<sup>3</sup> krystalická a takzvaná křehká látka. Z toho zjišťujeme, že se může v různých směrech chovat při zatížení velmi odlišně. Pro křehké látky je charakteristické, že se v porovnání s kovy deformují méně a prakticky výlučně plasticky. Znamená to tedy, že se led na rybníku deformuje zanedbatelně? Je si třeba uvědomit, že struktura ledu na rybníku bude mít asi daleko do ideálního ledového bloku. Led bude mít spíše vrstevnitou strukturu. To samozřejmě způsobuje, že takovýto led je „ohebnější“ než ideální led.

Dále i samotný ideální led má jistou zvláštnost. Pokud bychom chtěli určit mezní napětí, mohli bychom použít stejné postupy jako u železu podobných látek. Jenže porovnání se skuteč-

<sup>3)</sup> ideální led ve smyslu krystalické mřížky s různými poruchami, tedy v makroskopickém měřítku homogenní

ností ukazuje, že se takového úvahy od skutečnosti odlišují i více než stonásobně. Kde je tedy skrytý problém? Problém spočívá v tom, že v každé látce se vyskytují různé defekty a ty hrají pro křehké látky podstatnou roli. Pro mikrorys (vzpomínaný defekt) určité délky  $c$  v objemu, kde se nachází jen on a na který působí napětí způsobené zatížením (těchto zjednodušení se asi ve fyzice už nezbavíme), je možné odvodit následující vztah

$$\sigma > \sqrt{\frac{8E\gamma}{\pi c}}.$$

Ten mluví o tom, že při napětí  $\sigma$  větším, než je výraz napravo, dojde k náhlému prolomení materiálu (do té doby dochází k malým, ale plastickým deformacím), přičemž  $E$  a  $\gamma$  jsou materiálové konstanty (samozřejmě v určitém přiblížení). Že nevěříte? Zkuste to ověřit experimentem. Ukazuje se totiž, že tento vztah odpovídá realitě velmi dobře. Při dynamickém zatížení se začnou na ledě zvětšovat rysy a v podstatě klesá maximální možné zatížení. Když přestaneme zatěžovat materiál ve správném momentě, nepraskne. Proto musíme jednoduše ve správný moment odskočit.

Druhým podstatným faktorem je voda pod ledem. Představme si, že stojíme na nějakém kousku ledu. Protože jsme těžcí, led se potápí a my za chvíli získáme nepříjemnou zkušenost s ledovou vodou. Když však na takovýto kousek ledu doskočíme a okamžitě odskočíme, nemusíme se potopit. Čím to je? Led si pokojně plave na hladině. Doskočíme na něj, působíme na něj naší tíhou a okamžitá rychlost, se kterou se led potápí, je velká (kousek ledu je malý), proto i odporová síla bude velká. Proto pokud nebudeme příliš těžcí, můžeme stihnout odskočit. V případě ledu na rybníku se jedná o něco velmi podobného. Rozdíl je v tom, že tentokrát se nejedná jen o nějaký kus ledu, ale o součást ledu na rybníce. Odsud plyne, že celková síla (resp. napětí v daném bodě) je o něco menší než síla plynoucí jen z toho, jak běžíme (hlavně jak se pohybuje těžiště). Odsud dokonce plyne, že za určitých okolností může být dokonce celkové zatížení ledu po dobu dopadu menší, než při obyčejném stání! Takže se oba vlivy velmi vhodně doplňují. Pokud se chcete dozvědět více, mám pro vás zajímavý odkaz <http://www.tf.uni-kiel.de/matwis/amat>.

Bodování bylo čistě subjektivní, snažil jsem se ale obodovat každou rozumnou fyzikální úvahu. Ale pokud se i přesto někomu zdá, že jsem ho obral o bodíky, ať se ozve.

*Peter Zalom*

[peter@fykos.mff.cuni.cz](mailto:peter@fykos.mff.cuni.cz)

### Úloha III. E ... a jsou tu zase hody! (8 bodů; průměr 5,90; řešilo 41 studentů)

V Černvíře je veselo, všichni tancují, baví se, ale hlavně pijí alkoholické nápoje. Ne však každý se chce co nejdříve opít. Mezi místními stárky je jeden, kterému jde zejména o vědecký výzkum. Po vypití dvou litrů levného stolního vína ho napadlo, že by mohl zjistit, kolik toho alkoholu do sebe vlastně dostal. Nebyl ovšem v natolik strážlivém stavu, aby experiment zrealizoval. Zkuste to tedy vy!

Změřte, jaký je hmotnostní podíl alkoholu obsažený v levném stolním víně, a výsledek porovnejte s hodnotou na obalu.

*Našel Jaroslav Trnka na internetu a vzpomněl si při tom na jednoho z organizátorů.*

### Zamyšlení nad zaslánými protokoly

Tato úloha byla mezi řešiteli zjevně oblíbená, a proto se objevila i celá řada postupů vypracování. Snad nejčastějším byla destilace, tj. ohřát víno na teplotu přibližně 78°C, nechat

odpařit ethanol, následně ho zachytit na nějakém chladiči a zvážit. Tato metoda naráží na nedokonalost destilace (spolu s ethanolem se odpařuje i voda, naopak ne všechny ethanol z kondenzuje apod.). Jen několik řešitelů napadlo nezabývat se destilátem, ale naopak zvážit to, co po destilaci z vína zůstane. Zde už je problém jen množství odpařené vody a to se dá poměrně jednoduše zjistit (viz náš postup). Tato metoda dávala výsledky s chybou v řádu procent, u některých řešitelů s nedokonalou aparaturou i desítky procent.

Druhou nejpoužívanější metodou bylo měření hustoty vína. Pokud předpokládáme, že víno je jen směs vody a ethanolu, můžeme z hustoty určit množství ethanolu. Zřejmým omezením této metody je zanedbání ostatních složek ve víně, což v závislosti na druhu použitého vína může vést k větším nebo menším nepřesnostem (někteří řešitelé zjistili, že jejich víno má větší hustotu než voda, nelze se pak divit, že výsledek byl chybný). Pro tuto metodu je asi ideální testovat bílé suché mladé víno, které má nejmenší podíl cukru. *Lukáš Drápal* zjistil, že podíl cukru ve víně je asi 1/9 podílu ethanolu, tento údaj se dal použít pro přibližnou korekci. *Marek Pechal* zkombinoval tuto metodu s destilací a zjistil tak množství přísad poměrně přesně. Celkově byla metoda měření hustoty nejjednodušší a nejpřesnější, i když byla zatížena systematickou chybou.

Několik řešitelů se pokoušelo o složité titrační postupy, které vesměs vedly k naprosto chybným množstvím ethanolu. Důvody jsou asi komplikované. I když budeme předpokládat, že titrační postup byl proveden precizně, pořád nelze vyloučit reakce titrační směsi s ostatními složkami vína. Objevily se ovšem i kurióznější postupy měření. Někteří řešitelé se pokoušeli víno zapálit (bohužel nebo právě možná naštěstí neúspěšně). Bylo by možné určit podíl ethanolu tak, že by se experimentálně zjistilo, při jakém podílu ethanolu směs voda-alkohol ještě hoří, a poté přidáváním čistého lihu obohatit víno natolik, že by vzplálo. *Lukáš Drápal* měřil podíl ethanolu na základě ohřívání vína v kalorimetru, což při použití dobrého zdroje tepla vede k poměrně vysoké přesnosti. Na závěr bychom rádi upozornili na některé bludy, které se v řešeních objevily. Gymnazisté z Boskovic se domnívají, že ve víně dochází k disociaci složek podle hustoty, a tudíž ve svrchních vrstvách vína je více alkoholu než ve spodních. Kdyby tomu tak skutečně bylo, nebylo by možné např. skladovat víno v sudech, protože posledních pár skleniček ze sudu by bylo smrtelných.

Několik řešitelů projevilo obavy o vliv obsahu methanolu ve víně. Jak známo methanol je prudký jed a i v malých dávkách může způsobit oslepnutí a smrt. Komerčně vyráběné lihoviny obvykle obsahují okolo 0,015 % obsahu methanolu, takže jeho vliv je možné s klidem zanedbat. Posledním často zmiňovaným efektem je fakt, že při mísení kapalin neplatí přesně zákon sčítání objemů. To je sice pravda, ale opět jde o velmi okrajový efekt. Zmíněné bludy zde neuvádíme proto, aby se všichni mohli od srdce zasmát některým řešitelům. Jednou z nejdůležitějších schopností v experimentální fyzice je správné určení různých aproximací. Pokud tedy nějaký řešitel např. zanedbal obsah cukru a dalších látek ve víně, ale přitom bral zákon sčítání objemů jako nepřesný, pak se dopustil vskutku chybné úvahy.

### *Pracovní postup a výsledky měření*

Pro určení podílu alkoholu ve víně jsme zvolili vylepšenou destilační metodu. Víno budeme ohřívát ve vodní lázni tak dlouho, až jeho teplota překročí teplotu varu ethanolu, a poté změříme, kolik roztoku nám zbylo. To, co se z roztoku odpařilo, není jen ethanol, ale i spousta vody. Abychom zjistili, kolik se jí odpařilo, vložíme do nádoby s vínem ještě menší baňku s vodou a změříme, kolik vody se z ní během ohřívání odpařilo. Zde předpokládáme, že vypařování vody a ethanolu jsou dva nezávislé děje a rovněž že vypařování vody nezávisí na podílu ethanolu ani jiných látek v roztoku. Jako měřicí pomůcky nám bude stačit šupléra na měření hloubky

a teploměr na orientační určení teploty (teploměr není pro měření příliš podstatný, v zásadě bychom se bez něj mohli obejít). Značně zjednodušenou destilační soupravu lze snadno sestavit z několika hrnců a skleničky a ohřev zajistí kuchyňský sporák.

Celkem jsme provedli jedno pokusné a tři platná měření pokaždé s půl litrem krabicového bílého vína původem z Itálie (snad). V rámci dodržení základních pravidel bezpečnosti práce jsme se neodhodlali zkoumaný roztok ochutnat. Chyba v měření hladiny šuplérů je 0,1 mm, což se ve výsledku promítlo do chyby v určení podílu 0,5 objemových procent obsahu. Průměrná hodnota podílu alkoholu (bez korekce na odpařování vody) potom vyšla  $w_1 = (16,1 \pm 0,5) \%$ , hodnota korekce  $w_{\text{kor}} = (5,2 \pm 0,5) \%$ , což dává výslednou hodnotu podílu  $w = (11,3 \pm 1,0) \%$ . Podrobnější údaje z měření zde neuvádíme vzhledem k nízké reprodukovatelnosti experimentu.

### Závěr

Úloha se dala s trochou fyzikální úvahy vyřešit jen s pravítkem a kuchyňským náčiním, popřípadě teploměrem. Výsledek je vcelku uspokojivý, hodnota uvedená na obalu (10 %) sice do naměřeného intervalu nespadá, ale vzhledem k původu vína je možné mít o přesnosti dané hodnoty oprávněné pochybnosti. Výsledná přesnost není jistě ideální, preciznějším měřením by se dala zmenšit až o řád. Důležité je, že měření není zatíženo žádnou výraznou systematickou chybou.

**Michael Komm**

michael@fykos.mff.cuni.cz

### Úloha III. S ... aplikace statistické fyziky (5 bodů; průměr 3,47; řešilo 15 studentů)

- Pomocí podobné úvahy jako v příkladu v textu určete, jaký tvar má Guldbergův-Waageův zákon pro složitější reakce (např.  $2A + B \rightarrow A_2B$ ). Zkuste zjistit, jestli (a jak dobře) tento zákon odpovídá skutečnosti.
- Z Maxwellova-Boltzmannova rozdělení odvoďte, jaké mocnině teploty je úměrná střední kinetická energie částic plynu. Ověřte si, že jste schopni stejnou metodou zjistit, jak závisí na teplotě střední hodnota libovolné mocniny rychlosti.
- Mějme systém nezávislých spinů, diskutovaný v textu, o teplotě  $T_1$ , který se nachází v magnetickém poli o velikosti  $B_1$ . Následně systém adiabaticky zaizolujeme (tj. zavřeme jej do termosky, aby z něj nemohlo odcházet žádné teplo) a budeme pomalu zmenšovat magnetické pole až na hodnotu  $B_2$ . Kvalitativně vysvětlete, proč se bude snižovat teplota systému. Pokud možno vypočítejte, jaká bude výsledná teplota  $T_2$ .

*Nápověda.* Práce vykonaná na systému s magnetickým momentem  $M$  při malé změně magnetického pole  $B$  o  $dB$  je dána vztahem  $dW = -M dB$ .

*Zadal autor seriálu Matouš Ringel.*

- Pro složitější reakci ze zadání ( $2A + B \rightarrow A_2B$ ) provedeme úplně stejnou úvahu jako pro reakci ze seriálu. Aby se výchozí atomy mohly sloučit do molekuly, musí se současně srazit dva atomy  $A$  a jeden atom  $B$ . Pravděpodobnost takové srážky je přibližně přímo úměrná počtu atomů  $B$  a druhé mocnině počtu atomů  $A$ . To je zřejmé; o prvním a druhém atomu  $A$  se dá totiž formálně uvažovat jako o atomu  $A$  a atomu  $C$  a pravděpodobnost srážky tří atomů  $A$ ,  $B$  a  $C$  je zřejmě úměrná koncentraci každého z nich.

Z řečeného vyplývá, že ve vzorci pro jednoduchou reakci stačí nahradit  $n_A$  počtem  $n_A^2$ , takže Guldbergův-Waageův zákon bude mít tvar

$$\frac{n_A^2 n_B}{n_{AB}} = g \exp(-E/kT) .$$

Každý si nyní jistě snadno odvodí, že pro obecnou reakci typu  $\nu_1 A_1 + \nu_2 A_2 + \dots \longrightarrow \mu_1 B_1 + \mu_2 B_2 + \dots$  bude v rovnováze platit

$$\frac{n_{A_1}^{\nu_1} \cdot n_{A_2}^{\nu_2} \cdot \dots}{n_{B_1}^{\mu_1} \cdot n_{B_2}^{\mu_2} \cdot \dots} = g \exp(-E/kT).$$

Pokud jde o určení rovnovážného stavu reakce, Guldbergův-Waageův zákon platí dosti přesně, přinejmenším v tom smyslu, že kombinace koncentrací na levé straně je funkcí pouze teploty a tlaku. Tato funkce však ve skutečnosti nemusí být přesně exponenciální. Nicméně předpovídané rychlosti reakcí nejsou správné ani ve smyslu závislosti na koncentracích. To je důsledkem složité dynamiky srážek, jichž se obvykle účastní více molekul než jen ty potřebné. Rozmyslete si například, že reakce  $A + B \longrightarrow AB$  vlastně není sama o sobě kinematicky možná, neboť nemohou být současně splněny zákony zachování hybnosti a energie, poněvadž energie vázaného stavu je menší než energie dvou samotných atomů, a navíc mají atomy na začátku nenulovou hybnost. Aby mohla proběhnout, musí se objevit nějaký prostředník, který přebytečnou energii odnese ve formě své kinetické energie; tímto prostředníkem může být například další atom nebo vyzářený foton. Další příčinou selhávání je omezená platnost Boltzmannova vztahu pro nerovnovážné stavy.

- b) Tato úloha šla vyřešit vulgární rozměrovou analýzou. Všimněme si, že se teplota vždy vyskytuje v kombinaci s  $k$ , tj. jako  $kT$ , kterýžto výraz má rozměr energie. Výraz  $\langle mv^2 \rangle$  má také rozměr energie. Odtud snadno odvodíme  $\langle v^n \rangle \sim T^{n/2}$ .

K početnímu řešení této úlohy nebylo třeba umět vypočítat nějaký konkrétní integrál, stačilo pouze umět provést nejtriviálnější možnou substituci. Vydeme z Maxwellova-Boltzmannova rozdělení, jež jsme v seriálu psali ve tvaru

$$P(v) = C \cdot v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right),$$

kde  $C$  je konstanta nezávislá na rychlosti (v seriálu jsme místo  $C$  psali úměrnost). Pravděpodobnost, že částice bude mít rychlost o velikosti mezi  $v$  a  $v + dv$ , je  $P(v) dv$ .

Prvním důležitým krokem bylo uvědomit si, že celková pravděpodobnost má být jednotková. Tedy  $1 = \int_0^\infty P(v) dv$ . K tomu musíme vhodně nastavit konstantu  $C$ . Zajímáme se však pouze o závislosti na teplotě, nepotřebujeme tudíž splnit rovnost. Integrál rozepíšeme a zasubstituueme v něm. Stačí nám, aby integrál vpravo nezávisel na teplotě.

$$\int_0^\infty C \cdot v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv = C \cdot \left(\frac{2kT}{m}\right)^{3/2} \cdot \int_0^\infty \frac{mv^2}{2kT} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) d\left(\sqrt{\frac{m}{2kT}} v\right).$$

Poslední výraz je, pokud jde o teplotní závislost, úměrný

$$C \cdot T^{3/2} \cdot \int_0^\infty \alpha^2 e^{-\alpha^2} d\alpha \sim C \cdot T^{3/2},$$

neboť integrál podle  $\alpha$  již také na teplotě nezávisí. Konstanta  $C$  musí vyrušit teplotní závislost, platí tedy úměrnost  $C \sim T^{-3/2}$ , a Maxwellovo-Boltzmannovo rozdělení včetně teplotní závislosti napíšeme ve tvaru

$$P(v) \sim T^{-3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right).$$

Nyní již snadno určíme teplotní závislost libovolné mocniny rychlosti. Střední hodnota veličiny  $f(v)$  závislé na rychlosti, je definována jako  $\langle f \rangle = \int_0^\infty f(v)P(v) dv$ . Střední hodnotu  $n$ -té mocniny rychlosti proto vypočítáme jako

$$\langle v^n \rangle = \int_0^\infty v^n P(v) dv \sim T^{-3/2} \int_0^\infty v^{n+2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv.$$

Nyní stačí zopakovat výše provedený postup (substituci), abychom dostali

$$\langle v^n \rangle \sim T^{-3/2} \cdot \left(\frac{2kT}{m}\right)^{(n+3)/2} \int_0^\infty \left(\frac{mv^2}{2kT}\right)^{(n+2)/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) d\left(\sqrt{\frac{m}{2kT}} v\right),$$

odkud

$$\langle v^n \rangle \sim T^{n/2} \cdot \int_0^\infty \alpha^{n+2} e^{-\alpha^2} d\alpha \sim T^{n/2}.$$

Například kinetická energie je úměrná druhé mocnině rychlosti, čili střední hodnota kinetické energie v plynu je přímo úměrná teplotě, jak nás učili na střední škole.

- c) Úloha se pro systém neinteragujících spinů dala vyřešit velice jednoduchou úvahou. Větší část řešitelů však počítala ochlazování nějaké abstraktní látky či ideálního plynu, přestože bylo v zadání jasně uvedeno, jaký systém se má uvažovat.

Na klíč k řešení bylo možno přijít hned dvěma způsoby. Ten jednodušší z nich využívá zákon zachování momentu hybnosti (tedy celkového spinu). Jelikož je náš systém v termosce adiabaticky zaizolován, neinteraguje s okolím jinak než prostřednictvím magnetického pole. Magnetické pole samo o sobě však v našem systému nemůže překlápět spin (ten je překlápěn slabou interakcí spinů mezi sebou), takže přinejmenším celkový spin (resp. magnetický moment  $M$ ) musí zůstat zachovaný. Tato úvaha však může selhat v obecnějším systému, neboť magnetické pole obecně mění projekci spinu (příkladem je tzv. precese spinu, kdy spin částece jakoby rotuje kolem směru magnetického pole).

Druhý způsob využívá nápovědy. Při odvozování vztahů pro spinový systém jsme uvedli, že energie spinu v magnetickém poli je rovna  $-\mu B$ . Podíváme-li se na vorec pro celkovou magnetizaci  $M$ , snadno identifikujeme výraz  $-MB$  jako (vnitřní) energii systému spinů v magnetickém poli. V zadání ale bylo uvedeno, že práce v magnetickém poli je  $dW = -M dB$ . První termodynamický zákon má pro adiabaticky izolovaný systém (žádný přenos tepla) tvar  $dE = dW = -M dB$ , avšak ze vztahu  $E = -MB$  určíme změnu energie jako  $dE = -M dB - B dM$ . Porovnáním prvního a druhého vztahu snadno zjistíme, že  $dM = 0$ , čili že  $M$  se při zmenšování magnetického pole nemění. Dá se ukázat, že tato úvaha platí i pro libovolný homogenní izotropní systém.

Celková magnetizace  $M$  je monotónní funkcí kombinace  $\mu B/kT$ . Zde  $\mu$  a  $k$  jsou konstanty. Proto okamžitě vidíme, že poměr  $B/T$  je během ochlazování konstantní. Pro konečnou teplotu tedy bude platit

$$T_2 = T_1 \cdot \frac{B_2}{B_1}.$$

Tento vzorec ovšem evidentně nemůže zcela odpovídat realitě. Kdybychom totiž například snížili magnetické pole až na nulu, konečná teplota by také byla nulová; jedním z postulátů (experimentálně dobře ověřených) termodynamiky však je tvrzení, že nulové teploty nelze dosáhnout. A co by se teprve stalo, kdyby konečné pole mělo opačný směr než počáteční!

Náš systém je nerealistický v zanedbání všech interakcí. Ve skutečné látce vždy dochází k interakcím spinů mezi sebou i s krystalovou mřížkou; existuje jistá velikost magnetického

pole, pod kterou již není stav látky určen převážně vnějším magnetickým polem. Pod touto hranicí již neplatí podmínka  $B/T = \text{konst}$  a teplota se s polem přestává snižovat. Efektivně to odpovídá existenci malého vnitřního magnetického pole  $B_0$ , pod které nelze celkové pole v látce snížit, takže mezní konečná teplota je dána vzorcem  $T_2 = T_1 \cdot B_0/B_1$ . Problém záporného magnetického pole ve skutečné látce nenastává, neboť v realistické verzi se ve vztahu pro konečnou teplotou objevují absolutní hodnoty magnetického pole.

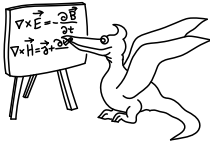
Pokud půjdeme s  $B_2$  až do záporných hodnot, nastane kuriózní situace: častěji budou obsazeny hladiny s vyšší energií než s nižší energií (tj. větší část spinů bude mířit proti směru pole), což při kladné teplotě odporuje Boltzmannovu vzorci i „zdravému rozumu“. Pokud ovšem formálně takovému stavu přiřadíme zápornou teplotu (jakou by předpovídal odvozený vzorec), vše bude v pořádku. S touto myšlenkou poprvé přišel velký sovětský fyzik L. D. Landau ve svém kurzu teoretické fyziky.

Experimentálně lze záporných teplot doopravdy dosáhnout. Podmínkou je mít systém nepříliš interagujících spinů (např. systém jaderných spinů v krystalu), které velice slabě interagují s krystalovou mřížkou. Pak je možné na krátký čas (dokud ji tepelný kontakt s mřížkou nenaruší) dosáhnout záporné teploty spinů.

Popisovaná metoda chlazení, nazývaná *adiabatická demagnetizace*, se v praxi hojně využívá, nejčastěji na některých paramagnetických solích. Adiabatickou demagnetizací systému jader lze získat teploty v řádu mikrokkelvinů.

*Matouš Ringel*

matous@fykos.mff.cuni.cz



## Seriál na pokračování

### Kapitola 5: Mnohočásticový systém

V následujících řádcích probereme chování systému složeného z mnoha identických částic. Uvažujme tedy systém s  $N$  neinteragujícími identickými částicemi. Nechť má tento systém energetické hladiny  $E_i$  a v každém takovém stavu se nachází  $n_i$  částic. Půjde nám o to určit vlastnosti systému (vypočítat partiční sumu) při konstantním počtu částic  $N = \sum n_i$ . Konfigurace systému je jednoznačně zadaná počty částic  $n_i$  v jednotlivých stavech. Partiční suma proto bude mít tvar

$$Z = \sum \exp \left( - \sum_i \beta n_i E_i \right),$$

kde v první sumě sčítáme přes všechny konfigurace, pro které platí  $\sum n_i = N$ . Ukazuje se, že v tomto tvaru je nemožné získat výraz pro  $Z$  v uzavřeném tvaru.

Místo řešení takto složitého problému budeme raději uvažovat jiný model. S naším systémem spojíme jakýsi rezervoár částic, ze kterého si systém může částice vypůjčovat a naopak. Podobný trik jsme užili již při odvozování Boltzmannova vzorce; tam jsme obešli požadavek neměnnosti celkové energie použitím rezervoáru energie. Předpokládejme, že pro přechod částice z našeho systému do rezervoáru je potřeba dodat energii  $\mu$ . Střední počet částic v našem systému roste s rostoucím  $\mu$ . Vhodným nastavením této energie se nám podaří zařídit, aby střední počet částic v nádobě byl  $N$ . Na rozdíl od předchozího případu zde počet částic není přesně  $N$ , nýbrž kolem této hodnoty fluktuuje, a to s amplitudou úměrnou  $\sqrt{N}$ . Relativní fluktuační počtu částic (tj.  $\sqrt{N}/N = 1/\sqrt{N}$ ) pak se vzrůstajícím počtem částic klesá k nule.

Odtěď můžeme používat Boltzmannův vzorec, ovšem s novými energetickými hladinami  $E_i - \mu$ , tedy celkovou energii  $E = \sum_i n_i (E_i - \mu)$ . V partiční sumě se pak nebude sčítat přes konfigurace s  $\sum_i n_i = N$ , nýbrž přes všechny konfigurace  $n_i = 0, 1, \dots$

$$Z = \sum_{n_1, n_2, \dots} \exp \left( - \sum_i \beta n_i (E_i - \mu) \right) = \prod_i \sum_{n_i} \exp (-\beta n_i (E_i - \mu)).$$

Poslední rovnost potřeba důkladně rozmyslet.

Zatím jsme nespecifikovali, jakých hodnot mohou nabývat čísla  $n_i$ , tedy počet částic ve stavu  $i$ . Ve skutečnosti existují dvě různé fyzikálně důležité možnosti. U jednoho druhu částic, takzvaných „bosonů“, neexistuje žádné omezení na počet částic v jednom stavu, takže každé  $n_i$  může nabývat hodnot  $0, 1, 2, \dots$ . Pro druhý druh částic, „fermiony“, naopak platí, že v jednom stavu  $i$  může být nejvýše jedna částice, proto  $n_i = 0, 1$ . Částice se rozdělují do těchto skupin podle velikosti svého spinu. Částice s celou hodnotou spinu (např. foton) patří mezi bosony a částice s polocelou hodnotou spinu (např. elektron) patří mezi fermiony. Různé složené částice, jako třeba atomové jádro či atom sám, může patřit jak mezi fermiony, tak mezi bosony, v závislosti na celkovém spinu. Tento fakt se ukázal jako klíčový pro vysvětlení supravodivosti kovů a supratekutosti helia  $^3\text{He}$  (jde o izotop helia s jedním neutronem), což na vhodném místě vysvětlíme.

Nyní především vypočítáme partiční sumu pro oba druhy částic. Pro fermiony platí

$$Z_F = \prod_i \sum_{n_i=0,1} \exp (-\beta n_i (E_i - \mu)) = \prod_i (1 + \exp (\beta (\mu - E_i))).$$



Pro bosony je výpočet o něco složitější, musíme totiž sečíst geometrickou řadu, což nám snad nedělá větší obtíže; tímto získáme

$$Z_B = \prod_i \sum_{n_i=0}^{\infty} \exp(-\beta n_i (E_i - \mu)) = \prod_i [1 - \exp(\beta(E_i - \mu))]^{-1}.$$

Zavedeme novou veličinu  $\Omega$  (tzv. termodynamický či Landauův potenciál) analogickou volné energii v systému s konstantním počtem částic, a to vztahem  $\Omega = -kT \ln Z$ , kde  $Z$  je partiční suma s proměnným počtem částic. Z potenciálu  $\Omega$  půjdou vypočítat všechny zajímavé veličiny, podobně jako jsme ve druhém díle počítali např. střední hodnotu energie ze známé volné energie  $F$ .

V případě proměnného počtu částic by nás obzvláště zajímalo, jak souvisí „umělá“ energie  $\mu$  se středním počtem částic  $\langle N \rangle$ . Podobnou procedurou jako ve druhém díle najdeme

$$\langle N \rangle = \frac{\sum N \cdot P(N)}{Z} = \frac{\sum (\sum_i n_i) \exp(-\sum_i \beta n_i (E_i - \mu))}{Z} = \frac{1}{\beta Z} \frac{\partial Z}{\partial \mu} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu}.$$

Tento postup lze aplikovat i na výpočet středního počtu částic v jednom určitém kvantovém stavu  $i$ . Jen musíme modifikovat  $\Omega$  tak, že do něj započítáme pouze příspěvek od  $i$ -té hladiny (modifikované  $\Omega$  označíme jako  $\Omega_i$ ). Pro fermiony má  $\Omega_i$  tvar  $\Omega_i = -kT \ln(1 + \exp(\beta(\mu - E_i)))$ , pro bosony  $\Omega_i = kT \ln(1 - \exp(\beta(\mu - E_i)))$ . Z vypočítaných  $\Omega_i$  již snadno získáme rovnici pro střední počet částic v  $i$ -té hladině

$$\begin{aligned} \langle N_i \rangle &= \frac{1}{\exp(\beta(E_i - \mu)) + 1} && \text{(fermiony)}, \\ \langle N_i \rangle &= \frac{1}{\exp(\beta(E_i - \mu)) - 1} && \text{(bosony)}. \end{aligned}$$

Tyto dva vzorce se ukázaly jako naprosto klíčové pro pochopení vlastností světa kolem nás. Mnoho reálných systémů se dá totiž modelovat jako systémy nepřiliš interagujících částic, jejichž vlastnosti můžeme počítat s pomocí vybudovaného aparátu.

Vyšetříme zde průběh těchto rozdělení. Především si povšimněme, že se obě rozdělení liší pouze znaménkem u jedničky ve jmenovateli. Jejich chování v klasické limitě, kdy je hustota částic natolik malá, že všechna  $\langle N_i \rangle \ll 1$ , a tedy exponenciála ve jmenovateli mnohem větší než 1, musí být tedy stejné, a to konvergující k nám již známému Boltzmannovu rozdělení. Zapsáno vzorcem tvrdíme

$$\langle N_i \rangle \approx \exp(-\beta(E_i - \mu)).$$

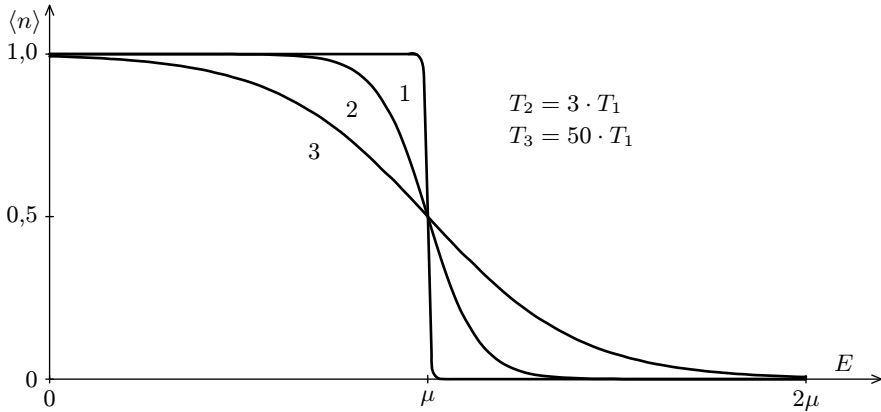
V opačném případě, kdy je hustota částic velká nebo teplota nízká, se tato rozdělení budou podstatně lišit. Budeme je diskutovat separátně.

### Chování fermionů

Bezprostřední důležitost má obzvláště Fermiho rozdělení. Na něm totiž stojí celá teorie pevných látek. Průběh tohoto rozdělení je pro různé teploty vyneseno v grafu na obrázku 7.

Přirozeným měřítkem energie je zde energie  $\mu$ , která se v tomto případě obvykle nazývá Fermiho energií a značí se  $E_F$ . Energií  $E = E_F$  odpovídá střední počet částic 0,5, čili poloviční zaplnění. Ve směru rostoucích energií od Fermiho energie obsazení stavů rychle klesá, naopak ve směru klesajících energií rychle roste až k jedničce. V ideálním případě nulové teploty

by všechny stavy s energií  $E < E_F$  byly zaplněny a všechny stavy s  $E > E_F$  by byly prázdné. Můžeme také odhadnout typickou šířku tohoto rozdělení. Při nízkých teplotách existuje jakési „moře“ zaplněných stavů, z něhož je určitá část částic excitována nad Fermiho energii. Excitovány jsou částice z okolí  $E_F$  o šířce typicky  $1/\beta = kT$  (jedině tehdy je exponenciála srovnatelná s jedničkou ve jmenovateli). Teplota zavedená vztahem  $kT_F = E_F$  se nazývá Fermiho teplotou; tato teplota je předělem mezi klasickým a kvantovým chováním.



Obr. 7

Teorie pevných látek pracuje s plynem elektronů, řídících se Fermiho rozdělením. Elektrony v kovu se chovají jako vlny (vlnové částicová dualita). Rovnice kvantové mechaniky připouštějí různá řešení s různými energiemi. Typicky se stává, že mnoho stavů má stejnou energii. Nás zajímá zejména situace, kdy jsou elektrony popsány vlnovými vektory různých směrů a velikostí. Je to podobná situace jako při popisu fotonů v krabici; tam byly přípustné hodnoty vlnového vektoru určeny požadavkem naskládání celého počtu půlvln. V nejjednodušším modelu pevné látky můžeme použít přesně tutéž představu. Oproti fotonům se situace liší pouze výpočtem energie. Energie se vypočítá pomocí klasického vzorce  $E = p^2/2m$ , kam za  $p$  dosadíme velikost vektoru  $\mathbf{p}$ , jenž souvisí s vlnovým vektorem příslušné de Broglieovy vlny elektronu jako  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ . Z tohoto stejným postupem jako při výpočtu hustoty stavů fotonů v krabici vypočteme veličinu  $g(E)$  (hustotu stavů), související s počtem stavů s energií mezi  $E$  a  $E + dE$  vzorcem  $dN = g(E)dE$ . Při teplotě  $T = 0$  jsou všechny stavy s energií  $E < E_F$  zaplněny; vektor hybnosti každého elektronu tudíž leží v kouli o poloměru  $p_F$  (nazývaném Fermiho hybnost), který je s  $E_F$  svázán vztahem  $p_F^2/2m = E_F$ . Při zvyšování teploty se povrch koule „rozmazává“ podle Fermiho rozdělení. Fermiho teplota pro kovy je řádově  $10^4$ – $10^5$  K, což je teplota daleko větší než pokojová. Jen malá část elektronů ve skutečném kovu je při pokojové teplotě excitována.

Touto argumentací se vysvětlil další paradox klasické fyziky. V minulém díle seriálu jsme určovali tepelnou kapacitu krystalu na základě ekvipartičního teorému. Nicméně z naší úvahy jsme zcela vynechali elektrony. Ty jsou sice daleko lehčí než jádra, nicméně i ony by měly každý nést svoji energii  $3kT/2$ ; vtip ekvipartičního teorému je právě v tom, že střední energie nezávisí na hmotnosti! Příspěvek elektronů k tepelné kapacitě v této formě se ovšem nepozoruje. Nyní již víme proč. Za pokojových teplot je většina elektronů uvězněna ve Fermiho kouli. Tepelného pohybu se účastní jen excitované elektrony, tedy jen malá část elektronů z okolí povrchu této

koule. Dá se ukázat, že příspěvek elektronů k tepelné kapacitě je přímo úměrný teplotě, což dobře odpovídá skutečnosti.

Plyn elektronů má další zajímavou vlastnost. Jelikož částice uvězněné ve Fermiho kouli mají nenulovou hybnost, vykazují vždy nenulový tlak, a to i při nulové teplotě. Stavová rovnice elektronového plynu má pro nízké teploty tvar  $PV = 2/5RT_F$ , přičemž na rozdíl od ideálního plynu pravá strana nezávisí na teplotě.

Lepší modely kovů musí brát do úvahy další dva fakty. Především krystal nemusí být izotropní. To vede k deformaci Fermiho koule do mnohem složitějších tvarů. Za druhé vektory hybností nemusí vyplňovat celou Fermiho kouli. Tento problém je skutečně aktuální a jeho vzetí do úvahy je základem teorie polovodičů. Základní myšlenka spočívá v tom, že přípustné energie elektronů leží v určitých disjunktních intervalech, tzv. energetických pásech. Fermiho koule se pak změní na systém soustředných „mezikoulí“, mezi nimiž se nemůže nacházet žádný vektor hybnosti. Oblastem energie s absencí řešení se říká *zakázané pásy*. Vznikají díky interakci elektronů s mřížkou (představující periodický potenciál). Elektron při působení vnějšího pole vykazuje v tomto případě jinou (efektivní) hmotnost; stavy uprázdněné excitovanými elektrony se mohou chovat jako částice s opačným nábojem, tzv. díry.

Rozhodujícím činitelem pro zařazení daného krystalu podle vodivosti mezi izolátory, vodiče či polovodiče je zaplněnost nejvyššího energetického pásu. Pokud je nejvyšší obsazený pás téměř zaplněný a od následujícího pásu oddělený dostatečně širokou mezerou, bude se krystal chovat jako izolátor. Elektrické pole totiž nemůže změnit hybnost elektronů, neboť téměř všechny dostupné stavy jsou obsazeny a jejich hybnost dána. Samozřejmě, při nulové teplotě budou vždy existovat (dle Fermiho rozdělení) elektrony i ve vyšších pásech, nicméně bude jich velice málo (jejich počet exponenciálně ubývá se vzdáleností od Fermiho energie). Pokud je nejvyšší pás jen částečně zaplněn, mohou být elektrony s nejvyšší energií excitovány do stavů s hybností mířící proti směru vnějšího elektrického pole, budou tedy vykonávat uspořádaný pohyb — elektrický proud.

Kovy se vyznačují tím, že jejich nejvyšší pás není zaplněn ani při nulové teplotě. Polovodiče mají při nulové teplotě svrchní pás zcela zaplněný, avšak jejich zakázaný pás je natolik úzký, že je přes něj možné excitovat elektrony již při rozumných (např. pokojových) teplotách. Při vysokých teplotách vedou elektrický proud všechny látky.

Další informace o pásové struktuře pevných látek můžete najít v ročence Fykosu z ročníku 1999/2000.

### Chování bosonů

Dále přejdeme k diskuzi rozdělení bosonů, tzv. Boseho-Einsteinova rozdělení. Při zmenšování teploty (a tedy zvětšování  $\beta$ ) bude chování určovat rozdíl  $E_i - \mu$  v argumentu exponenciály. Z požadavku konvergence partiční sumy však pro bosony plyne podmínka  $\mu \leq 0$ . Rovnost zde nastává pro fotony. To znamená, že foton lze do systému přidat bez vynaložení energie. Fotonů ve skutečnosti není nějaké určité množství. Fotony vznikají a zanikají a jejich počet, stejně jako rozdělení podle energií, jsou diktovány pouze podmínkou termodynamické rovnováhy.

Při nízké teplotě se většina částic soustředí v okolí základního stavu (s energií  $E_i = 0$ ), neboť pouze pro energie blízké základnímu stavu exponenciála ve jmenovateli nediverguje. Bosony se tedy díky svému spinu jakoby přitahují, snaží se dostat se do stejného stavu a chovat se kolektivně. Tomuto jevu se říká Boseho-Einsteinova kondenzace. Nicméně nejde o kondenzaci ve smyslu prostorovém (podobnou např. krystalizaci); částice se soustředí ve stavu se stejnou (nulovou) hybností. K přechodu ke kolektivnímu chování dochází náhle při určité teplotě  $T_C \approx (\hbar^2/km)(N/V)^{2/3}$ . V kritické teplotě je nespojitá derivace tepelné kapacity, takže

jde o fázový přechod. Bosonový plyn vykazuje zajímavou vlastnost, totiž že jeho tlak při teplotách  $T < T_C$  nezávisí na objemu. Nás to jistě nepřekvapí, poněvadž víme, že se téměř všechny částice nacházejí v základním stavu s nulovou hybností.

Indický fyzik S. A. Bose a A. Einstein jev teoreticky předpověděli již v roce 1924, nicméně nikdo jej nepovažoval za reálný. Až v roce 1930 se F. London pokusil vysvětlit supratekutost helia  $^4\text{He}$ , což je izotop helia se dvěma neutrony a celkovým spinem celočíselným. Supratekutost je jev, kdy v silně ochlazeném heliu vymizí tření, a helium tedy může téci bez odporu. Absence tření je ekvivalentní tvrzení, že se supratekuté helium při dostatečně malých rychlostech (tj. malých energiích interakce) nenechá excitovat do stavů s vyšší energií. Nicméně Boseho-Einsteinův kondenzát není supratekutý, neboť jej lze excitovat libovolně malou energií. Navíc je pro popis supratekutosti nevhodný kvůli zanedbání interakcí mezi jednotlivými částicemi; naproti tomu částice helia spolu silně interagují. Klíčovou vlastnost – kolektivní chování – mají však tyto systémy společnou.

Supratekuté je i helium  $^3\text{He}$  (kapalina fermionů, díky poločíselnému spinu tohoto izotopu). To by se mohlo zdát paradoxní, neboť jak zanedlouho uvidíme, fermiony se naopak odpuzují; v jednom stavu může být nanejvýše jeden fermion. Ačkoliv supratekutost nelze vysvětlit *pouze* Bose-Einsteinovou kondenzací, nutnou podmínkou je kolektivní chování částic. Podobný problém vyvstává v teorii supravodivosti, kde pod určitou teplotou zmizí elektrický odpor některých kovů. Zdá se, jako by docházelo k „supratekutosti“ plynu volných elektronů v krystalu, tedy ke kolektivnímu chování. Avšak elektron je fermion!

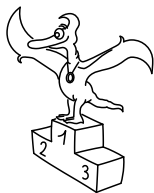
Tento rozpor byl vyřešen v teorii supravodivosti pánů Bardeena, Coopera a Schrieffera, založené na myšlence, že se elektrony díky vhodné interakci s krystalovou mřížkou mohou efektivně přitahovat a vytvářet tak vázaný stav, tedy jakousi novou částici, tzv. Cooperův pár. Tato nová částice bude mít coby složenina dvou částic s poločíselným spinem spin celočíselný, a bude tudíž bosonem. Bosony se však mohou chovat kolektivně a k paradoxu nedochází.

### Úloha V. S ... ferimony a bosony

- a) Najděte hustotu stavů  $g(E)$  pro volné elektrony a pomocí ní určete vztah mezi počtem elektronů a Fermiho energií při nulové teplotě. Zjistěte, jak musí záviset Fermiho energie na teplotě (při nevelkých teplotách), aby byl počet elektronů konstantní. Nakonec odhadněte počet excitovaných elektronů při pokojové teplotě.

*Nápověda.* Nechte se inspirovat minulými díly seriálu a úlohami k nim.

- b) Určete závislost  $\mu$  na teplotě při malých teplotách a konstantním počtu částic v systému stejných bosonů. Najděte teplotní závislost počtu excitovaných bosonů při nízkých teplotách.



## Pořadí řešitelů po III. sérii



### Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	III	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	3	4	8	5	<b>32</b>	100	<b>100</b>
1. <i>Marek Pechal</i>	G Lesní čtvrtě, Zlín	4	3	5	3	2	8	7	<b>32</b>	96	<b>96</b>
2. <i>Tomáš Bednářík</i>	Masarykovo G Vsetín	2	4	3	2	4	8	3	<b>26</b>	84	<b>84</b>
3. <i>Libor Šachl</i>	G Terezy Novákové Brno	0	3	1	-	2	5	-	<b>11</b>	66	<b>55</b>
4. <i>Marek Scholz</i>	G F. Palackého, Neratovice	-	4	-	-	-	8	-	<b>12</b>	75	<b>51</b>
5. <i>Petra Malá</i>	G Moravský Krumlov	1	2	-	-	0	6	-	<b>9</b>	71	<b>49</b>
6. <i>Roman Dercó</i>	G dukl. hrdinův, Svidník	-	4	1	3	-	-	-	<b>8</b>	74	<b>48</b>
7. <i>Vojtěch Molda</i>	Masarykovo G Vsetín	-	4	-	1	-	7	-	<b>12</b>	68	<b>46</b>
8. <i>Jan Váňa</i>	G Lesní čtvrtě, Zlín	0	3	1	-	0	3	-	<b>7</b>	65	<b>45</b>
9. <i>Martin Koštejn</i>	G a SPgŠ Liberec	2	3	1	2	2	-	-	<b>10</b>	60	<b>39</b>
10.-11. <i>Martin Konečný</i>	G Boskovice	-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	66	<b>38</b>
<i>Jenda Valášek</i>	G Broumov	-	3	-	3	-	7	-	<b>13</b>	75	<b>38</b>
12. <i>Aleš Podolník</i>	G Kapitána Jaroše, Brno	2	3	2	2	-	8	-	<b>17</b>	71	<b>34</b>
13. <i>Lukáš Střiteský</i>	Masarykovo G Vsetín	1	4	1	3	4	8	3	<b>24</b>	73	<b>32</b>
14. <i>Petr Bezmozek Dvořák</i>	SPŠ Jihlava	-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	71	<b>29</b>
15. <i>Tomáš Jirotko</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	-	4	-	2	0	-	-	<b>6</b>	69	<b>27</b>
16.-17. <i>Jan Bednář</i>	COP Hronov	-	4	-	-	3	-	-	<b>7</b>	73	<b>24</b>
<i>Zuzana Pôbišová</i>	G Tajovského, B. Bystrica	-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	65	<b>24</b>
18. <i>Adam Přenosil</i>	G Sladkovského n. Praha	-	2	1	-	-	-	-	<b>3</b>	62	<b>23</b>
19.-20. <i>Jiří Šperka</i>	GOA Blansko	-	-	-	-	0	-	-	<b>0</b>	75	<b>21</b>
<i>Peter Vanya</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	1	0	-	-	0	7	-	<b>8</b>	36	<b>21</b>
21.-22. <i>Miroslav Hrubý</i>	Biskupské G, Brno	-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	69	<b>20</b>
<i>Ján Mikuláš</i>	G B. S. Timravy, Lučenec	-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	80	<b>20</b>
23. <i>Rushil Goel</i>		-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	76	<b>16</b>
24. <i>Monika Josieková</i>	G Český Těšín	-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	60	<b>12</b>
25. <i>Martin Slezák</i>	G Vlašim	-	3	-	-	-	-	-	<b>3</b>	63	<b>10</b>
26.-28. <i>Miroslav Janáček</i>	G a SPgŠ Liberec	-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	50	<b>6</b>
<i>Jakub Klener</i>	G J.Jungmanna, Litoměřice	-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	50	<b>6</b>
<i>Hana Vítová</i>	G Bystřice n. Pern.	2	-	-	1	-	-	-	<b>3</b>	40	<b>6</b>
29. <i>Ladislav Štěpánek</i>		-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	100	<b>4</b>
30. <i>Darja Suchá</i>	G Kladno	-	2	-	-	-	-	-	<b>2</b>	50	<b>2</b>
31. <i>Ondřej Bílka</i>	G Lesní čtvrtě, Zlín	-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	13	<b>1</b>

## Kategorie třetích ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	III	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	3	4	8	5	<b>32</b>	100	100
1. <i>Pavel Motloch</i>	G Petra Bezruče, Frýdek-Místek	4	4	3	3	1	8	6	<b>29</b>	92	92
2. <i>Jakub Benda</i>	G Jana Nerudy, Praha	2	5	2	2	2	8	4	<b>25</b>	79	75
3. <i>Martin Formánek</i>	G Uherské Hradiště	2	3	3	3	–	8	–	<b>19</b>	78	67
4. <i>Tomáš Bzdušek</i>	G Piešťany	1	5	1	2	3	0	4	<b>16</b>	65	62
5. <i>Daniel Šimsa</i>	G J. Jungmanna, Litoměřice	2	4	–	2	–	8	3	<b>19</b>	79	61
6.–7. <i>Jan Jelínek</i>	G Konstantinova Praha	3	5	1	3	1	8	3	<b>24</b>	65	59
<i>Pavol Pšeno</i>	G Ružomberok	4	4	–	2	4	7	–	<b>21</b>	72	59
8. <i>Peter Berta</i>	G Velké Kapušany	2	2	1	3	2	6	–	<b>16</b>	69	53
9. <i>Lukáš Malina</i>	G Ch. Dopplera, Praha	–	5	–	–	–	7	–	<b>12</b>	87	46
10. <i>Marek Kaleta</i>	G Terezy Novákové Brno	2	2	1	–	–	8	–	<b>13</b>	66	41
11.–12. <i>Hana Jirků</i>	G Terezy Novákové Brno	2	–	–	1	2	6	–	<b>11</b>	61	37
<i>Radim Pechal</i>	SPŠE Rožnov p. R.	–	3	1	2	0	7	–	<b>13</b>	63	37
13. <i>Kryštof Touška</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	2	–	–	1	1	–	–	<b>4</b>	60	34
14. <i>Ondřej Bogár</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	2	1	–	–	1	6	–	<b>10</b>	67	32
15. <i>Marek Bukáček</i>	G Havlíčkův Brod	1	1	1	–	2	1	–	<b>6</b>	46	28
16.–17. <i>Jana Lochmanová</i>	G Chodovická, Praha	1	–	–	1	0	6	–	<b>8</b>	39	24
<i>Jana Przewczková</i>	G Komenského Havířov	–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	44	24
18. <i>Martin Štys</i>	COP Hronov	1	1	–	1	3	–	–	<b>6</b>	43	20
19. <i>Lukáš Novotný</i>	G J. K. Tyla, Hradec Králové	–	4	–	–	–	–	–	<b>4</b>	86	18
20.–21. <i>František Batysta</i>	G J. V. Jirsíka, Č. Budějovice	–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	100	17
<i>Jaroslava Lavková</i>	G Poprad	–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	68	17
22. <i>Jakub Prouza</i>	COP Hronov	2	2	–	–	–	–	–	<b>4</b>	44	16
23. <i>Matěj Korvas</i>	G Jaroslava Seiferta, Praha	1	3	–	–	0	–	–	<b>4</b>	48	14
24. <i>Jakub Vodňanský</i>	G Broumov	2	–	–	–	–	–	–	<b>2</b>	50	12
25. <i>Jan Stránský</i>	G Dobruška	–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	45	10
26. <i>Přemysl Šrámek</i>	G Dašická, Pardubice	–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	89	8
27. <i>Martin Berka</i>	G Moravská Třebová	–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	29	7
28. <i>Ján Hreha</i>	G Liptovský Hrádok	–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	46	6
29.–30. <i>Hana Lesáková</i>	G Konstantinova Praha	–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	50	4
<i>Jakub Loucký</i>	G Písek	–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	24	4
31.–32. <i>Petr Dvořák</i>	G N. Město n. M.	–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	50	2
<i>Michal Pavelka</i>	G Strakonice	–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	50	2

## Kategorie druhých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	III	%	Σ
<i>Student Pílný</i>	MFF UK	4	4	4	3	4	8	5	<b>32</b>	100	100
1. <i>Jakub Michálek</i>	G Jana Keplera, Praha	2	5	3	3	1	7	4	<b>25</b>	91	91
2. <i>Lukáš Vitovec</i>	PČG Karlovy Vary	2	3	2	3	1	7	3	<b>21</b>	64	59
3. <i>Lukáš Drápal</i>	G Ch. Dopplera, Praha	2	-	-	1	2	8	2	<b>15</b>	63	47
4.-5. <i>Vladimír Boža</i>	G D. Tatarku, Poprad	1	2	1	3	0	-	-	<b>7</b>	64	41
<i>Zdeněk Vais</i>	G Boskovice	-	3	-	-	1	7	5	<b>16</b>	75	41
6. <i>Marek Nečada</i>	G Jihlava	-	3	1	-	-	-	-	<b>4</b>	76	35
7. <i>Juraj Hartman</i>	G Náchod	2	4	3	3	4	6	-	<b>22</b>	79	34
8.-9. <i>Iva Kocourková</i>	G nám. TGM Zlín	-	-	-	-	1	7	-	<b>8</b>	56	28
<i>Lucie Pospíšilová</i>	G Matyáše Lercha, Brno	1	-	0	-	1	7	-	<b>9</b>	57	28
10.-11. <i>Jan Hermann</i>	G Český Krumlov	-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	93	27
<i>Petr Šedivý</i>	G Dašická, Pardubice	2	1	1	0	2	2	-	<b>8</b>	32	27
12. <i>Helena Svobodová</i>	G Ch. Dopplera, Praha	2	1	1	-	0	1	2	<b>7</b>	36	26
13. <i>Dalimil Mazáč</i>	G Jana Keplera, Praha	2	4	2	3	3	7	3	<b>24</b>	75	24
14. <i>Tomáš Talanda</i>	G Tišnov	2	-	-	3	1	2	-	<b>8</b>	51	18
15. <i>Katarína Rozvadská</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	52	17
16.-17. <i>Matěj Bítnar</i>	COP Hronov	1	-	-	-	0	-	-	<b>1</b>	30	10
<i>Jiří Sedlák</i>	G Boskovice	1	3	-	-	1	3	-	<b>8</b>	36	10
18. <i>Zuzana Jungrová</i>	G Blovice	-	-	-	-	-	1	-	<b>1</b>	38	8
19. <i>Jan Valášek</i>	G Ch. Dopplera, Praha	-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	50	6
20. <i>Petra Navrátilová</i>	COP Hronov	-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	25	5
21.-22. <i>Jan Červenka</i>	G Ostrava - Zábřeh	2	-	-	-	2	-	-	<b>4</b>	50	4
<i>Michaela Kubínová</i>	G Ostrava - Zábřeh	2	-	-	-	2	-	-	<b>4</b>	50	4
23.-25. <i>Vlastimil Daniček</i>	COP Hronov	1	-	-	-	0	-	-	<b>1</b>	25	3
<i>Lucie Kadrmanová</i>	G Jeseník	-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	33	3
<i>Vojtěch Špulák</i>	COP Hronov	-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	23	3
26. <i>Martin Flíger</i>	COP Hronov	-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	0	0

## Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	III	%	$\Sigma$
<i>Student</i> <i>Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	3	4	8	5	<b>32</b>	<i>100</i>	<b>100</b>
1. <i>Lukáš Čimpl</i>	G Frenštát pod Radhoštěm	2	1	1	-	2	1	-	<b>7</b>	<i>36</i>	<b>28</b>
2. <i>Katarína Bazová</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	1	2	-	-	3	7	-	<b>13</b>	<i>56</i>	<b>27</b>
3. <i>Alžběta Černeková</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	2	1	-	-	1	-	-	<b>4</b>	<i>53</i>	<b>24</b>
4. <i>Richard Polma</i>	G Mladá Boleslav	1	-	2	-	-	-	-	<b>3</b>	<i>48</i>	<b>20</b>
5. <i>Jan Šedek</i>	COP Hronov	-	-	-	-	3	-	0	<b>3</b>	<i>48</i>	<b>14</b>
6. <i>Jana Figulová</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	1	-	-	-	-	-	-	<b>1</b>	<i>65</i>	<b>13</b>
7. <i>Dana Suhomelová</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	<i>75</i>	<b>12</b>
8. <i>Petr Motloch</i>	G P.Bezruče, Frýdek-Místek	-	-	-	-	1	-	-	<b>1</b>	<i>63</i>	<b>10</b>
9. <i>Lukáš Vrablic</i>	SPŠ Hradec Králové	1	0	-	-	2	-	-	<b>3</b>	<i>24</i>	<b>9</b>
10. <i>Vojtěch Kaluža</i>	G P.Bezruče, Frýdek-Místek	-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	<i>100</i>	<b>4</b>
11.–15. <i>Ondřej Chvostek</i>	G P.Bezruče, Frýdek-Místek	-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	<i>38</i>	<b>3</b>
<i>Petr Kaděra</i>	G P.Bezruče, Frýdek-Místek	-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	<i>75</i>	<b>3</b>
<i>Jan Mertlík</i>	COP Hronov	1	-	-	-	1	-	-	<b>2</b>	<i>13</i>	<b>3</b>
<i>Jakub Moškoř</i>	G P.Bezruče, Frýdek-Místek	-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	<i>75</i>	<b>3</b>
<i>Jiří Novák</i>	COP Hronov	-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	<i>10</i>	<b>3</b>
16. <i>Ondřej Masný</i>	G P.Bezruče, Frýdek-Místek	-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	<i>50</i>	<b>2</b>
17. <i>Martin Konečný</i>		-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	<i>0</i>	<b>0</b>

**FYKOS**

**UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta**  
**Ústav teoretické fyziky**  
**V Holešovičkách 2**  
**180 00 Praha 8**

www: <http://fykos.mff.cuni.cz>

e-mail pro řešení: [fykos-solutions@mff.cuni.cz](mailto:fykos-solutions@mff.cuni.cz)

e-mail: [fykos@mff.cuni.cz](mailto:fykos@mff.cuni.cz)

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.