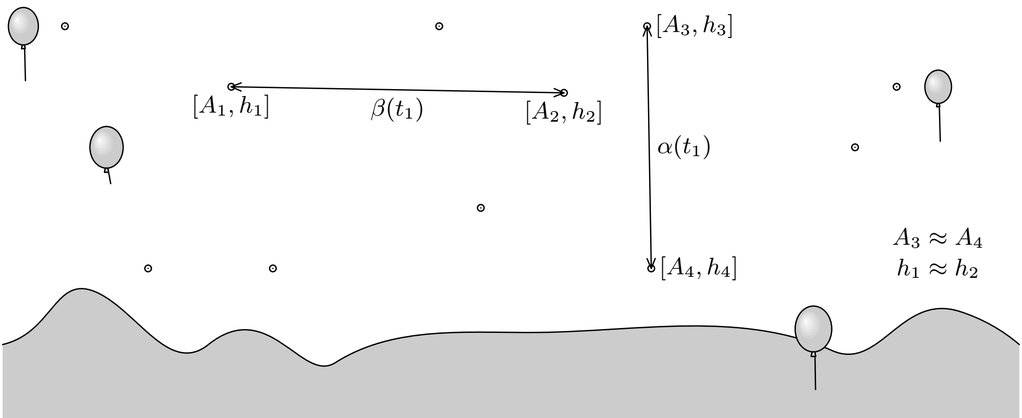
19. ročník, úloha IV . E ... *jak oči Balónka klamou* *(8 bodů; průměr 4,70; řešilo 20 studentů)*

Balónci při pozorování oblohy často soudí, že se jim souhvězdí vysoko nad hlavou zdají menší, než když si je prohlížejí nízko nad obzorem. Proveďte pozorování na Zemi a měřením ověřte, zda jde skutečně o klam. Změřte úhlovou vzdálenost $\alpha(t_1)$ dvou vybraných hvězd, které jsou přibližně nad sebou (mají stejný azimut A), a úhlovou vzdálenost $\beta(t_1)$ jiných dvou hvězd, které jsou ve stejné výšce h nad obzorem, (tzn. kontrola v obou nezávislých směrech) v okamžiku, kdy se tyto hvězdy nacházejí co nejníže nad obzorem. Až později stejné dvojice hvězd najdete v co největší výšce, měření obou úhlových vzdáleností $\alpha(t_2)$, $\beta(t_2)$ zopakujte. Snažte se pochopitelně měřit co nejpřesněji!

Zvlášť oceníme, pokud ze znalosti katalogizovaných souřadnic hvězd přesně vypočítáte jejich teoretickou úhlovou vzdálenost. Nezapomeňte popsat použité pomůcky a zamyslet se nad jejich výhodami a nevýhodami (resp. diskutovat přesnost měření), uvést důležité podmínky měření a určit zkoumané hvězdy – alespoň načrtněte mapku hvězdného okolí a uveďte směr (např. jih) a čas měření. Vyhodnoťte chyby měření a v diskusi srovnejte výsledky.

Vymyslel Pavel Brom inspirován dotazem na hvězdárně.



Primárním cílem úlohy mělo být ověřit neměnnost úhlových vzdáleností mezi hvězdami, a to ve dvou nezávislých a významných směrech – vodorovném a svislém. Totiž právě ve vertikálním směru můžeme očekávat případné změny úhlových vzdáleností, když si uvědomíme, že směr šíření světla je ovlivňován při průchodu atmosférou, což má za následek posunutí pozice hvězdy. Tento jev se nazývá *atmosférická refrakce* a jeho případné potvrzení nám budiž výzvou k honbě za co nejvyšší přesností našeho měření!

Teorie

V teoretické části bychom nejprve měli provést rešerši, abychom získali kvantitativní představu o velikosti atmosférické refrakce a podle toho mohli plánovat přesnost měření a vybrat vhodné hvězdy. Mnohá literatura udává maximální hodnotu refrakce 34 úhlových minut při obzoru, o kterou je pozorovaná pozice hvězdy posunuta výš oproti skutečné. (Díky refrakci je tedy Slunce déle nad obzorem, a to řádově o několik minut.) Zdůrazněme okolnost *při obzoru* a uvědomme si, že bychom neměřili absolutní refrakci, nýbrž tzv. diferenciální refrakci, což znamená, že se posouvají polohy obou hvězd, mezi kterými úhlovou vzdálenost měříme. Ke snížení relativní chyby bychom tedy měli volit hvězdy raději více vzdálené.

K potvrzení atmosférické refrakce bychom potřebovali měřit s přesností menší než půl stupně. Jelikož počasí většinou nedovoluje měřit hvězdy těsně nad obzorem, pro reálně zkoumané hvězdy je vliv refrakce mnohem menší a její přímé experimentální potvrzení by bylo v našich možnostech nesmírně náročné. (Viz komentář k došlým řešením.)

Do teorie dále patří uvedení vztahu pro výpočet teoretické úhlové vzdálenosti dvou hvězd se známými katalogizovanými souřadnicemi α (rektascenze) a δ (deklinace). Uveďme rychlé odvození vztahu od *Marka Pechala*, který využil analytickou geometrii. Osu x zavedeme jako průsečnici roviny světového rovníku s rovinou deklinační kružnice první hvězdy, osu y definuje v kladném smyslu polopřímka střed sféry – zenit a konečně osa z je na ně kolmá. Polohový vektor první hvězdy na jednotkové sféře je $\boldsymbol{r}_1 = (\cos\delta_1, \sin\delta_1, 0)$, analogicky pro druhou hvězdu, jejíž deklinační kružnice je v našem souřadném systému otočena podél osy y o úhel $\varphi = |\alpha_1 - \alpha_2|$, dostáváme polohový vektor $\boldsymbol{r}_2 = (\cos\delta_2\cos\varphi, \sin\delta_2, \cos\delta_2\sin\varphi)$. Hledaná teoretická úhlová vzdálenost ω_{t} mezi hvězdami potom odpovídá úhlu svíranému těmito vektory, který vypočteme pomocí skalárního součinu (sčítají se součiny vždy odpovídajících komponent vektorů). Platí

$$\cos\omega_{\mathrm{t}} = \frac{\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1||\boldsymbol{r}_2|} = \boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2 = \cos\delta_1\cos\delta_2\cos\varphi + \sin\delta_1\sin\delta_2\,,$$

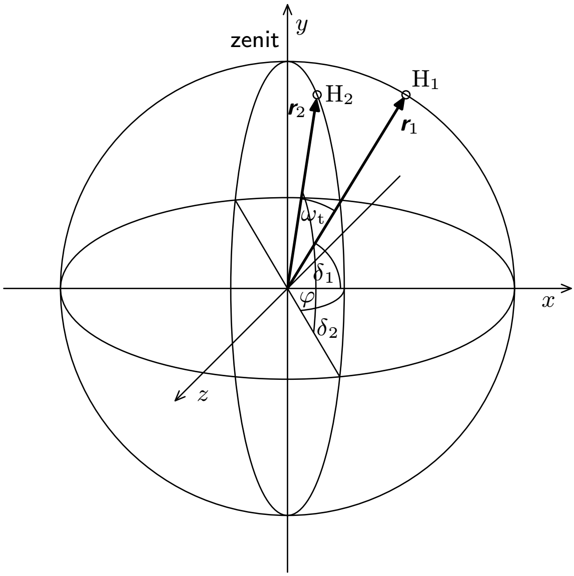
odkud po dosazení za φ a zjednodušení díky sudosti funkce kosinus dostáváme[1]

$$\omega_{\mathrm{t}} = \arccos\left(\cos\delta_1\cos\delta_2\cos\left(\alpha_1-\alpha_2\right) + \sin\delta_1\sin\delta_2\right).$$

[1] Při užití Pythagorovy věty k vyjádření délky tětivy v hledaném oblouku (vezmeme-li délky odvěsen jako rozdíl y-souřadnic v našem souřadném systému a vzdálenost pat kolmic spuštěných z obou hvězd na rovinu rovníku) vypočteme délku tohoto oblouku z délky tětivy podle získaného vztahu

$$\omega_{\mathrm{t}} = 2\arcsin\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(1-\cos\delta_1\cos\delta_2\cos\left(\alpha_1-\alpha_2\right)-\sin\delta_1\sin\delta_2\right)}\,,$$

který odpovídá předchozímu výrazu přes identitu $\arcsin\sqrt{(1-x)/2} = \arccos x/2$, pro $x \in \langle -1; 1\rangle$, kterou lze dokázat srovnáním derivací obou stran a samozřejmě funkčních hodnot např. v krajním bodě.

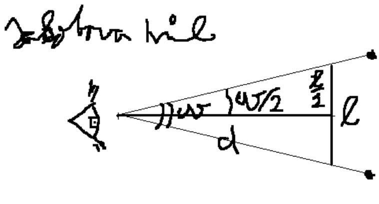


Obr. 1

Plánování experimentu a pomůcky

V zimě kolem Vánoc se jako vhodné hvězdy nabízejí např. Polárka a některá z hvězd Velkého vozu pod Polárkou v době krátce po setmění. Po půlnoci najdeme Velký vůz v nadhlavníku, což by nám velice vyhovovalo. Bohužel v podmínkách měření (opar při obzoru, světelné znečištění) nebyla jasnost hvězd Velkého vozu dostatečná pro spolehlivé vizuální měření a obecně bylo nutné volit co nejjasnější hvězdy, jako např. vůbec nejjasnější hvězdu na obloze Sírius (α CMa) a jasnou hvězdu přibližně nad ním při jeho východu, třeba levou horní hvězdu Oriona s názvem Betelgeuze (α Ori). Kolem 23 hodin se tyto hvězdy nacházejí nejvýše nad obzorem (kulminují). Vodorovná úhlová vzdálenost byla měřena mezi jasnými hvězdami Rigel (β Ori) (v Orionově obrazci vpravo dole) a Prokyon (α CMi; alfa v souhvězdí Malého psa nalevo od horních hvězd Oriona).

K měření byla použita v antice osvědčená Jakobova hůl, která byla realizována ocelovým metrem a nevelkým dřevěným trojúhelníkem s ryskou. Samozřejmostí je užití statistického zpracování, které potlačí náhodnou chybu subjektivního měření (chceme srovnávat střední hodnoty). Dalšími potřebami byla baterka s červeným světlem, sešit pro zápis hodnot a slabé i silné rukavice.



Obr. 2. Jakobova hůl (náčrtek)

Experimentálně zjištěná úhlová vzdálenost ω byla vypočtena z průměru d naměřených hodnot d_i délky Jakobovy hole (tj. vzdálenost trojúhelníka od oka) a se znalostí pevné délky l přepony trojúhelníka (vzdáleností vrcholů, se kterými se kryly obě hvězdy při nastavené vzdálenosti d_i). Z jednoduché geometrie zřejmě platí

$$\omega = 2 \operatorname{arctg} \frac{l}{2d} \,.$$

Chybu takto vypočteného úhlu určíme z chyby měření l i d např. pomocí parciálních derivací

$$\Delta\omega_d = \frac{\partial\omega}{\partial d}(d_0, l_0)\Delta d = \frac{4l_0}{4d_0^2 + l_0^2}\Delta d\,,$$
$$\Delta\omega_l = \frac{\partial\omega}{\partial l}(d_0, l_0)\Delta l = \frac{4d_0}{4d_0^2 + l_0^2}\Delta l\,,$$

které sloučíme podle kvadratického zákona sčítání chyb, tedy výsledek uvedeme ve tvaru

$$\omega = \left(2\,\mathrm{arctg}\,\frac{l}{2d} \pm \frac{4}{4d^2 + l^2}\sqrt{d^2(\Delta l)^2 + l^2(\Delta d)^2}\right)\cdot\frac{180^\circ}{\pi}\,,$$

kde l, d jsou spočtené střední hodnoty ze statistického zpracování.

Postup měření

Jakmile byly za soumraku vybrané hvězdy pozorovatelné, zaznamenal jsem podmínky měření (datum, místo, čas, teplotu, příp. tlak a vlhkost vzduchu, měřené hvězdy a jejich výšky nad obzorem) a zahájil měření. Zapřel jsem se do rozvětveného stromu, tzn. opřel záda o kmen a levou ruku o příhodnou větev. Pravou rukou jsem konec ocelového metru vždy přikládal stejným způsobem na kost vedle oka, dřevěný trojúhelník jsem spolu s navijákem metru držel v levé ruce tak, že ocelový pásek metru byl kolmo na plochu trojúhelníka a ryska trojúhelníka přiléhala právě ke stupnici, na které bylo možno odečítat hodnotu d_i. Citlivě jsem měnil vzdálenost trojúhelníku od oka, dokud se měřené hvězdy nekryly s vrcholy trojúhelníka při rychle střídavém pohledu (to zajistí, že oba vrcholy současně splývají s příslušnými hvězdami). Před odečtením hodnoty jsem ukazováčkem přitiskl stupnici metru k dřevěnému trojúhelníku, aby nedošlo k posunutí. Pro vyšší efektivitu jsem si zapamatovával tři naměřené hodnoty a ty pak najednou zapsal. Nastavení délky Jakobovy hole při měření jsem prováděl střídavě jak při prodlužování, tak při zkracování vzdálenosti trojúhelníka od oka. Měření úhlové vzdálenosti jsem pro každou dvojici hvězd opakoval 10krát pro statistické zpracování. Na konci měření jsem opět zapsal aktuální podmínky experimentu.

Výsledky

Všechna měření byla provedena v neděli 22. ledna 2006 na louce (využití rozvětveného stromu) NPP Radouč u Mladé Boleslavi. Teplota vzduchu (měřená kuchyňským lihovým teploměrem s chybou 0,5 °C) na začátku první série měření byla −4 °C, na konci −5 °C; později na začátku i na konci druhé série −9 °C. Velikost atmosférického tlaku byla odhadnuta podle televizní relace o počasí na (1030 ± 10) hPa. Během první série měření vzrostly výšky hvězd nad obzorem o 3 až 4 stupně, během druhé série klesly nejvýše o 2 stupně. Naměřené hodnoty úhlových vzdáleností jsou uvedeny a statisticky zpracovány v následující tabulce.

série	d_1 [cm]	d_2 [cm]	d_3 [cm]	d_4 [cm]	d_5 [cm]	d_6 [cm]	d_7 [cm]	d_8 [cm]	d_9 [cm]	d_{10} [cm]
I H	22,1	22,0	22,2	22,1	22,1	22,1	22,2	22,1	22,1	22,2
I V	31,1	31,3	31,6	31,7	31,1	31,6	31,6	31,3	31,2	31,5
II V	31,5	31,8	31,5	31,45	31,9	31,4	31,0	31,3	31,2	31,5
II H	22,0	22,1	22,1	22,1	22,2	22,1	22,2	22,1	22,1	22,1

Naměřené hodnoty délky Jakobovy hole (H –horizontální, V – vertikální vzdálenost).

série	čas	hvězdy	výška nad obzorem	průměr d [cm]	σ_d [cm]
I H	17:55–18:21	α CMi – β Ori	$8°$, $18°$	22,115	0,058
I V	18:30–18:56	α CMa – α Ori	$4°$, $31°$	31,400	0,226
II V	23:00–23:21	α CMa – α Ori	$22°$, $44°$	31,455	0,263
II H	23:22–23:44	α CMi – β Ori	$45°$, $23°$	22,110	0,057

Naměřené úhlové vzdálenosti – statistické zpracování.

Ze střední hodnoty délky Jakobovy hole d a pro hodnotu $l = (15{,}70 \pm 0{,}05)$ cm vypočteme experimentálně stanovenou úhlovou vzdálenost ω s příslušnou chybou podle odvozeného vztahu. Chybu měření Δd určíme ze standardní výběrové odchylky σ_d a možné chyby měření ocelovým metrem 0,05 cm podle kvadratického zákona sčítání chyb $\Delta d = \sqrt{\sigma_d^2 + (0{,}05\,\mathrm{cm})^2}$. Střední hodnoty správně zaokrouhlíme v řádu první (v případě jedničky až druhé) platné číslice chyby, kterou bezpečně zaokrouhlujeme nahoru. Na závěr vypočteme teoretickou úhlovou vzdálenost pro známé souřadnice hvězd rektascenze (α) a deklinace (δ). Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce.

Hvězda	Souřadnice α	Souřadnice δ	$d_{\mathrm{I,II}} \pm \Delta d_{\mathrm{I,II}}$ [cm]	$\omega \pm \Delta\omega$ [°]	rel [%]	ω_{t} [°]
α CMi	$7^{\mathrm{h}}39^{\mathrm{m}}18{,}12^{\mathrm{s}}$	$+5°13'30''$	$22{,}12 \pm 0{,}06$	$39{,}01 \pm 0{,}15$	0,4	38,51
β Ori	$5^{\mathrm{h}}14^{\mathrm{m}}32{,}28^{\mathrm{s}}$	$-8°12'6''$	$22{,}11 \pm 0{,}06$	$39{,}01 \pm 0{,}15$	0,4	38,51
α CMa	$6^{\mathrm{h}}45^{\mathrm{m}}8{,}92^{\mathrm{s}}$	$-16°42'58{,}1''$	$31{,}4 \pm 0{,}3$	$28{,}1 \pm 0{,}3$	1,1	27,10
α Ori	$5^{\mathrm{h}}14^{\mathrm{m}}32{,}28^{\mathrm{s}}$	$+7°24'25{,}4''$	$31{,}5 \pm 0{,}3$	$28{,}0 \pm 0{,}3$	1,1	27,10

Výsledky měření.

Diskuse

Srovnáním hodnot v tabulce výsledků měření můžeme učinit závěr, že střední hodnoty zjištěných úhlových vzdáleností mezi určitou dvojicí hvězd s ohledem na chybu měření jsou poměrně dobře blízké, tedy můžeme konstatovat, že zdánlivá změna velikosti souhvězdí (uvážíme-li, že např. průměr Měsíce vidíme pod úhlem asi $0{,}5°$) je skutečně klamem, což jsme experimentálně ověřili s chybou měření menší, než je např. úhlový průměr Měsíce. Domnělé zmenšení velikosti hvězdných obrazců vysoko nad obzorem než při pozici těsně nad obzorem můžeme vysvětlit jako psychologický efekt. Obrazce nízko nad obzorem máme možnost srovnávat s pozemskými objekty (domy, paneláky), vůči nimž se souhvězdí zdají poměrně velká, zatímco ve větší výšce nad obzorem možnost srovnávat nemáme a nabýváme dojmu, že souhvězdí jsou menší v rámci rozlehlé nebeské klenby.

Měření je zatíženo relativní chybou kolem 1 %. Přes použití primitivních pomůcek se podařilo chybu měření snížit, a to zejména užitím statistického zpracování, volbou vhodných hvězd (tj. dostatečně vzdálených) i parametrů pomůcek (l). Výsledná absolutní chyba je menší než maximální možná velikost atmosférické refrakce. Refrakci se však nepodařilo přímo potvrdit, jelikož nebylo možné měřit hvězdy těsně nad obzorem kvůli oparu a pro reálné výšky je velikost refrakce menší než výsledná absolutní chyba měření. Dokonce střední hodnoty jsou vychýleny v opačném smyslu, než bychom čekali (úhlová vzdálenost v důsledku diferenciální refrakce je nejmenší těsně při obzoru a pro větší výšky nad obzorem roste). Toto odchýlení lze zdůvodnit náhodnou chybou při měření čili statistikou. S ohledem na výslednou chybu nemůžeme z měření vyvozovat žádné závěry ohledně potvrzení refrakce, nanejvýš můžeme odhadnout její maximální velikost na $0{,}3°$, což souhlasí s realitou. Srovnáním experimentálních hodnot s teoretickými objevujeme, že měření je zatíženo systematickou chybou (měřené úhlové vzdálenosti vycházejí větší než teoretické), což lze zdůvodnit okolností, že jsme se okem nedívali přesně z vrcholu (bližšího konce) Jakobovy hole. V tomto měření však systematická chyba není podstatná, jestliže jsme měřili stále stejným způsobem!

Závěr

Prohlásíme-li za okem postřehnutelný rozdíl ve velikostech obrazců souhvězdí, jenž je minimálně srovnatelný s úhlovým průměrem Měsíce, pak se nám podařilo s relativní chybou asi 1 %, resp. s absolutní chybou pod $0{,}3^\circ$ ověřit, že úhlová vzdálenost mezi hvězdami se nemění (více než uvedená chyba měření) a popisované zdání je skutečně psychologický klam.

Poznámky k došlým řešením

Všichni, kteří si vyzkoušeli měření v tak nehostinné zimě, si zasluhují mé uznání a lepší bodové ohodnocení. Někteří úlohu pojali jako přímé ověření atmosférické refrakce a v teorii se zabývali její velikostí. I takováto řešení s přirozeným úsilím dosáhnout co nejvyšší přesnosti jsme náležitě ocenili. Nejrafinovanější metody využívaly digitální fotoaparát (*Lukáš Stříteský*, *Tomáš Bednárik*) a srovnávání velikosti např. Měsíce odečítané v pixelech; skutečně již pouhým okem můžeme postřehnout, že Slunce nebo Měsíc je těsně při obzoru zdeformované a připomíná zploštělý bochník. K potvrzení refrakce by byly v našich možnostech vhodnější nepřímé metody, např. měření doby výskytu Slunce nad obzorem v den rovnodennosti apod.

K přímé metodě měření úhlových vzdáleností si mnozí vyrobili nejrůznější pomůcky (deska, či dokonce dlouhá hokejka pro zapichování špendlíků, hřebíků apod., které se kryly s pozorovanými hvězdami), příp. další rozmanité realizace Jakobovy hole. Nejzávažnějšími chybami byl výpočet teoretické úhlové vzdálenosti s použitím Pythagorovy věty pro rozdíly v úhlových souřadnicích jakožto délky odvěsen. Naštěstí dotyční řešitelé věřili více svým experimentálním hodnotám. Zdůrazňuji, že závěr konstatující experimentální ověření něčeho musí udávat rovněž chybu měření, jinak takové tvrzení nemá dobrý smysl.

Pavel Brom
paja@fykos.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.