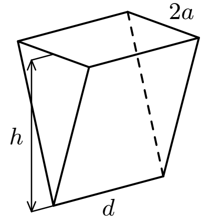
19. ročník, úloha V . 1 ... veď svou bárku dál *(4 body; průměr 2,56; řešilo 27 studentů)*

Pracovníci NASA objevili, že určité sedimenty rostlinného původu na měsíci Europa mají zajímavou štěpnost na velice pevné desky tvaru obdélníku a rovnoramenného trojúhelníku, takže z nich lze snadno a levně postavit loď výšky h, délky d a šířky paluby $2a$ jako na obrázku 1. Kapitán vám dává za úkol zjistit, pro jaké hustoty tamějších oceánských vod bude plavba bezpečná.

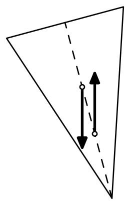


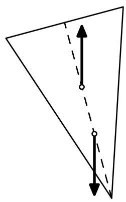
Obr. 1

Předpokládejte, že desky mají konstantní tloušťku a hustotu ϱ_m, že loď je dutá a má palubu. (Diskutujte případ, že plavidlo není duté a celé má konstantní hustotu ϱ_m.) Nemusíte kapitánovi předložit jedinou výslednou relaci, spíše prakticky užitečný návod na propočty s uvedením všech potřebných vztahů; snažte se je napsat přehledně a úsporně a odůvodněte užití případné vhodné aproximace.

Vymyslel Pavel Brom při vzpomínce na historku o jedné nešťastně navržené lodi.

Pro tuto úlohu je v první řadě důležité si uvědomit, že loď musí plavat, tedy že průměrná hustota lodě musí být nižší než hustota oceánu. Je také třeba, aby loď byla ve stabilní poloze, tzn. že působiště vztlakové síly (tzv. *metacentrum plování*) musí být nad těžištěm lodě. Pak totiž mírné výchylky z rovnovážné polohy vyvolají rozdíl momentů tíhové a vztlakové síly, který bude mít snahu vzniklou výchylku vyrovnat zpět. Pokud tomu tak nebude, rozdíl momentů těchto sil bude mít snahu tuto výchylku zvětšovat (viz obrázky 2 a 3).


Obr. 2. Labilní poloha


Obr. 3. Stabilní poloha

Souřadný systém zvolíme tak, že nulová výška je nejnižší bod lodě. Budeme předpokládat, že loď bude plavat v poloze, v jaké je nakreslena na obrázku, a že pluje velmi pomalu, tedy se chová obdobně, jako by stála na místě. Také budeme předpokládat, že tloušťka desek je zanedbatelně malá oproti rozměrům lodě.

Nejdříve vypočteme průměrnou hustotu ϱ_1 lodě, tedy vypočítáme hmotnost jednotlivých desek a podělíme objemem lodě.

$$\varrho_1 = \frac{2t\varrho_\mathrm{m}(ad + ah + d\sqrt{a^2+h^2})}{adh} = \frac{t\varrho_\mathrm{m}S(a,d,h)}{adh}\,,$$

kde t je tloušťka desek a S je funkce, kterou jsme substituovali celkový povrch lodě. Někteří pilní řešitelé přidali k hmotnosti lodě i hmotnost nákladu. Získali jsme tedy první podmínku, která je nutná pro bezpečnou plavbu, tedy aby hustota oceánu byla vyšší než ϱ_1.

Nyní přichází na pořad stabilita. Polohu těžiště lodě najdeme jako vážený průměr těžišť jednotlivých komponent, přičemž je zřejmé, že těžiště horní paluby je ve výšce h, těžiště obou trojúhelníků je ve výšce $2h/3$ a těžiště bočních obdélníků ve výšce $h/2$, tedy těžiště lodě bude ve výšce

$$h_\mathrm{T} = \frac{2t\varrho_\mathrm{m}(adh + \frac{2}{3}ah^2 + \frac{1}{2}dh\sqrt{a^2+h^2})}{t\varrho_\mathrm{m}S(a,d,h)} = \frac{adh + \frac{2}{3}ah^2 + \frac{1}{2}dh\sqrt{a^2+h^2}}{\frac{1}{2}S(a,d,h)} = \frac{2T(a,d,h)}{S(a,d,h)}\,,$$

kde T je funkce, kterou jsme substituovali čitatel předchozího zlomku, abychom zpřehlednili níže uvedené výpočty.

Loď se potopí do takové hloubky H, že hmotnost vytlačené vody je stejná jako hmotnost lodě, tedy

$$t\varrho_{\mathrm{m}}S(a,d,h) = \varrho\,\frac{aH^2d}{h} \quad\Rightarrow\quad H = \sqrt{\frac{th\varrho_{\mathrm{m}}S(a,d,h)}{\varrho ad}}\,,$$

kde ϱ je hustota oceánu. Z jednoduché geometrické úvahy – potopená část lodě je vlastně trojúhelníkový hranol – je zřejmé, že „těžiště vytlačené vody“ (čili působiště vztlakové síly) je ve výšce $H_{\mathrm{T}} = 2H/3$.

Vrátíme-li se k naší podmínce, že působiště vztlakové síly má být výš než těžiště lodě, hledáme takovou hustotu oceánu, pro kterou platí $H_{\mathrm{T}} > h_{\mathrm{T}}$.

$$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{th\varrho_{\mathrm{m}}S(a,d,h)}{\varrho ad}} > \frac{2T(a,d,h)}{S(a,d,h)} \quad\Rightarrow\quad \varrho < \varrho' = \frac{th\varrho_{\mathrm{m}}}{9ad}\,\frac{S^3(a,d,h)}{T^2(a,d,h)}$$

Při nižší hustotě oceánu než ϱ' se loď potopí do větší hloubky (stoupne působiště vztlakové síly), přičemž těžiště lodě zůstane na stejném místě, tedy loď bude stabilní. Při vyšší hustotě oceánu se loď více vynoří (klesne působiště vztlakové síly), a tedy působiště vztlakové síly bude níž než těžiště lodě, a tudíž loď bude nestabilní.

Máme tedy dvě podmínky stability (v uvažované poloze), jednak hustota oceánu musí být vyšší než ϱ_{l}, jednak nižší než ϱ'. Samozřejmě pokud bychom uvažovali jinou polohu lodě, podmínky by byly radikálně odlišné.

$$\frac{t\varrho_{\mathrm{m}}S(a,d,h)}{adh} < \varrho < \frac{th\varrho_{\mathrm{m}}}{9ad}\,\frac{S^3(a,d,h)}{T^2(a,d,h)}\,.$$

Vyřešme ještě otázku, zda pro daný tvar a polohu lodi, existuje taková hustota oceánu, že loď na ní bude plovat stabilně. Tehdy musí platit $\varrho_{\mathrm{l}} < \varrho'$ čili

$$1 < \frac{h^2}{9}\,\frac{S^2(a,d,h)}{T^2(a,d,h)} \quad\Rightarrow\quad 1 < \frac{2(ad + ah + d\sqrt{a^2+h^2})}{3(ad + \frac{2}{3}ah + \frac{1}{2}d\sqrt{a^2+h^2})}\,.$$

Po úpravě dostaneme

$$2a < \sqrt{a^2+h^2}\,,$$

neboli délka ramena trojúhelníku musí být delší než délka základny.

Jestliže budeme uvažovat případ, kdyby byla celá loď homogenní (nejen desky, ale i uvnitř), výrazně se nám zjednoduší podmínka, aby oceán loď unesl. Stačí, když hustota oceánu bude vyšší než hustota lodě, která je již známa.

Druhá podmínka, tedy vzájemná poloha těžiště lodě a ponořené části se také poněkud zjednoduší. Těžiště lodě je (opět jde o homogenní trojúhelníkový hranol) ve 2/3 výšky celé lodě. Těžiště ponořené části je ve 2/3 její výšky, tedy vždy níže, než je těžiště lodě – za předpokladu, že loď plove. Tudíž by homogenní loď nesetrvala v poloze jako na obrázku, ale překlopila by se palubou dolů, podobně jako to dělají ledovce.

Petr Sýkora
petr@fykos.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.