**19. ročník, úloha V . 3 ... *účinnost elektrárny*** *(5 bodů; průměr 1,07; řešilo 14 studentů)*

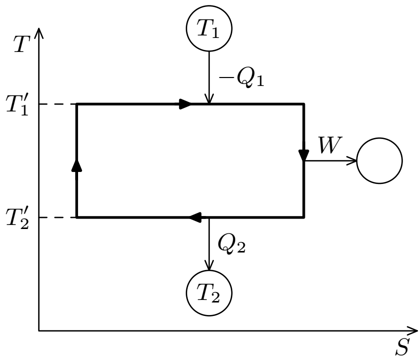
*Vypočítejte účinnost stroje, který pracuje mezi dvěma tepelnými lázněmi o teplotách $T_1$ a $T_2$, $T_1 > T_2$ a který dosahuje maximálního možného výkonu. Do výsledného vztahu potom dosaďte data některé známé elektrárny.*

*Uvědomte si, že Carnotův stroj má nulový výkon, protože při izotermickém ději je rozdíl teplot mezi strojem a lázní nekonečně malý, což způsobí nekonečně malý tepelný tok a nekonečně malý výkon stroje.* *Úloha z knížky Herberta Callena – Thermodynamics.*

Jak jsme zmínili v zadání, maximální účinnost nemusí být nezbytně to, čeho chceme dosáhnout při konstrukci reálných tepelných strojů. Důležitý je výkon, který je ve sporu s maximální účinností – Carnotův stroj má nulový výkon.

Předpokládejme, že chceme odebírat teplo z teplejší tepelné lázně a nějakým způsobem získávat práci. Dobře víme, že maximální možné účinnosti dosahuje každý vratný děj (změna celkové entropie je nulová). Jestliže má někdy pracovní látka tepelného stroje dosáhnout teploty jedné z lázní, bude jí to trvat nekonečně dlouhou dobu, a stroj tak bude mít nulový výkon. Pokud však během odebírání tepla z lázně má pracovní látka teplotu nižší než teplota lázně, stává se děj nevratným (v takovém systému totiž roste celková entropie[1]). Abychom tedy získali nenulový výkon, musí extrakce tepla z teplé lázně (stejně jako odevzdávání přebytečného tepla chladnější lázni) probíhat nevratně[2].

Pro další analýzu budeme předpokládat, že izotermy pracovního cyklu budou na teplotách $T_1'$ a $T_2'$ tak, že platí $T_1 > T_1' > T_2' > T_2$. Tudíž teplo přechází z teplejší lázně do pracovní látky skrze teplotní rozdíl $T_1 - T_1'$ a teplo odchází z pracovní látky do chladnější lázně skrze teplotní rozdíl $T_2' - T_2$, jak je znázorněno na obrázku 1. Tepelný tok je úměrný teplotnímu rozdílu s konstantou úměrnosti $\varkappa$, kde $\varkappa$ je tepelná vodivost krát plocha děleno tloušťka stěny mezi lázní a pracovní látkou.



Obr. 1. TS-diagram pracovního cyklu.

Jestliže $t_1$ je čas potřebný k přenesení tepla[3] $Q_1$, pak platí

$$\frac{-Q_1}{t_1} = \varkappa_1 (T_1 - T_1') \,.$$

Podobný vztah platí pro teplo $Q_2$. Celkový čas, který stroj stráví na obou izotermách, tedy je

$$t = t_1 + t_2 = \frac{1}{\varkappa_1} \frac{-Q_1}{T_1 - T_1'} + \frac{1}{\varkappa_2} \frac{Q_2}{T_2' - T_2} \,. \tag{1}$$

Předpokládáme, že čas strávený na obou adiabatách je zanedbatelný vůči $t$, adiabatické děje totiž musí proběhnout velice rychle, aby pracovní látka nestihla relaxovat, navíc tento čas můžeme libovolně zkrátit.

[1] Podobně jako vzroste entropie systému při odstranění izolační přepážky mezi dvěma plyny různých teplot.

[2] Takový stroj, ve kterém dochází k toku tepla nevratně, nazýváme *endoreversibilní.*

[3] $Q_1$ je teplo přijaté teplou lázní, proto $Q_1 < 0$.

Jelikož pracovní cyklus je vlastně Carnotův cyklus pracující mezi teplotami $T_1'$ a $T_2'$, platí

$$\frac{W}{-Q_1} = \eta = 1 - \frac{T_2'}{T_1'}\,, \qquad \frac{W}{Q_2} = \frac{W}{-Q_1 - W} = \frac{1}{-Q_1/W - 1} = \frac{\eta}{1-\eta} = \frac{T_1'}{T_2'} - 1\,.$$

Toto využijeme do vztahu (1).

$$t = \left(\frac{1}{\varkappa_1}\frac{1}{T_1 - T_1'}\frac{T_1'}{T_1' - T_2'} + \frac{1}{\varkappa_2}\frac{1}{T_2' - T_2}\frac{T_2'}{T_1' - T_2'}\right) W\,.$$

Výkon našeho stroje je $W/t$ a toto číslo chceme maximalizovat vzhledem k zatím neznámým teplotám $T_1'$ a $T_2'$. Po provedení příslušných derivací dostaneme podmínky[4]

$$T_1' = c\sqrt{T_1}\,, \quad T_2' = c\sqrt{T_2}$$

a maximální získatelný výkon je

$$P = \varkappa_1\varkappa_2\left(\frac{\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}}{\sqrt{\varkappa_1} + \sqrt{\varkappa_2}}\right)^2\,.$$

Hledali jsme účinnost tohoto stroje vyjádřenou pomocí $T_1$ a $T_2$ a ta je

$$\varepsilon = 1 - \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}\,.$$

Pozoruhodné je, že účinnost nezávisí na koeficientech $\varkappa_1$ a $\varkappa_2$.

Velké elektrárny evidentně pracují tak, že mají téměř maximální výkon, jak ukazují data ze tří elektráren v následující tabulce.

| Elektrárna | $T_2$ [°C] | $T_1$ [°C] | $\eta$ | $\varepsilon$ | pozorovaná |
|---|---|---|---|---|---|
| West Thurrock (UK), tepelná elektrárna | $\sim 25$ | 565 | 0,64 | 0,40 | 0,36 |
| CANDU (Kanada), PHW jaderný reaktor | $\sim 25$ | 300 | 0,48 | 0,28 | 0,30 |
| Larderello (Itálie), geotermální elektrárna | 80 | 250 | 0,32 | 0,175 | 0,16 |

Účinnosti elektráren ve srovnání s účinností $\eta$ Carnotova stoje a s účinností $\varepsilon$.

***Honza Prachař***
honzik@fykos.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

[4] Kde $c = (\sqrt{\varkappa_1 T_1} + \sqrt{\varkappa_2 T_2})/(\sqrt{\varkappa_1} + \sqrt{\varkappa_2})$.