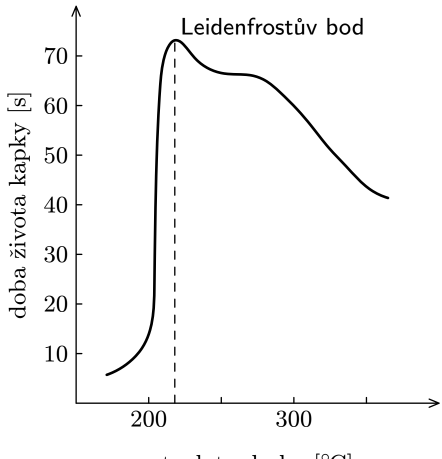
19. ročník, úloha V . E ... *babiččiny palačinky* *(8 bodů; průměr 3,62; řešilo 29 studentů)*

Rozehřejte pánvičku na plotýnce nebo nad plamenem tak, aby se na ní daly smažit palačinky (asi na 200°C). Pokud na její suchý rozžhavený povrch cáknete kapičku vody, hned se nevypaří, ale bude po něm až minutu rejdit. Proměřte dobu rejdění v závislosti na velikosti kapičky a tento jev se pokuste vysvětlit. *Úlohu navrhl Jano Lalinský.*

Teorie

Vytáhneme z kredence pánvičku, pořádně ji rozehřejeme, kápneme na ni vodu a ona se nám okamžitě vypaří, přestože zadání nám tvrdí něco jiného. Kapka podle zadání prý vydrží rejdit na pánvičce až minutu. Takže kde je zakopán pes (přesněji kde jsou ty babiččiny palačinky)? Jakkoli nepřirozené to může někomu přijít, pánvička je jenom příliš studená, přesněji řečeno její teplota nedosáhla okolí tzv. *Leidenfrostova bodu* (citlivější povahy upozorňuji, že žádná velká překvapení se už nechystají, a tudíž mohou klidně číst dál). Abychom pochopili, o co se jedná, podívejme na graf na obrázku 1 (převzato z [1]).

Tuhle závislost naměřil Jearl Walker z Clevelandské Univerzity v Ohiu, o čemž si můžete přečíst v poměrně známé knížce [1]. Z této závislosti je zřejmé, že při jisté teplotě (kolem 200 °C) dochází k prudkému růstu doby života kapek s teplotou pánve. Jako Leidenfrostův bod pak označujeme teplotu, při které žijí kapky nejdéle. A to je přesně ta teplota, při které bychom rádi proměřili závislost doby života kapky na jejím objemu (a pekli též babiččiny palačinky). Avšak dříve, než se pustíme do měření a vymýšlení různých teoretických modelů pro délku života kapek v závislosti na jejich objemu, měli bychom zjistit, proč se kapka chová takhle podivně. Protože nejlepším expertem na rejdící kapky na horké desce je vzpomínaný Jearl Walker, nechme ho promluvit: „Je-li teplota nad Leidenfrostovým bodem, spodní povrch kapky se okamžitě vypaří. Tlak této páry ovšem kapku nadnáší, takže se zbytek kapky desky ani nedotkne. Vrstva je stále doplňována vodní párou z dolního povrchu kapky, odkud se voda neustále odpařuje díky záření a vedení tepla vrstvou páry. Přestože je tloušťka vrstvy menší, než 0,1 mm u hranice a okolo 0,2 mm ve středu, dokáže výrazně zpomalit vypařování kapky.“ K tomuto vysvětlení jenom dodám, že vedení tepla vrstvou páry je o poznání menší, než je tomu při vedení tepla přes rozhraní kapka–pánvička – a to vysvětluje i skutečnost, proč se kapka vypaří tak rychle při nízkých teplotách (myslím tím teploty menší než je Leidenfrostův bod), kdy neexistuje tato vrstvička páry v dostatečné míře.



Obr. 1. Doba života kapek na horké desce

A nyní je na řadě slíbený teoretický model. Předpokládejme, že kapka má přibližně kulový tvar (kapka nezaujme přesně kulový tvar, koho by to víc zajímalo, toho můžeme opět odkázat na knihu [1]) a že mezi kapkou a povrchem pánve je vrstva páry. Kapka přijímá teplo od pánve prostřednictvím záření a vedením tepla skrz vrstvičku páry. O teplo přichází kapka díky vypařování, vyzařování a část tepla také odvádí okolní vzduch. Dominantním jevy, které mají vliv na teplotu kapky, jsou odpařování vody z kapky a vedení tepla vrstvičkou mezi pánví a kapkou[1]. Pokud bude kapka v každém okamžiku ve stavu tepelné rovnováhy, pro vypařování můžeme napsat rovnici

$$-l\varrho\,\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \lambda\,\frac{P(T-T_0)}{d}\,.$$

Člen na levé straně rovnice je teplo spotřebované na odpaření objemu[2] $(-\,\mathrm{d}V)$ kapky za čas $\mathrm{d}t$, ϱ je tedy hustota vody a l je měrné skupenské teplo vypařování. Člen na pravé straně vyjadřuje přenos tepla vedením skrz vrstvu páry, ten je úměrný obsahu průřezu kapky P, tepelné vodivosti směsy vzduchu a páry λ, rozdílu teplot mezi pánví a kapkou $T - T_0$ a nepřímo úměrný tloušťce d vrstvy páry. Zdůrazňujeme, že uvedená rovnice je jen hrubý popis toho, co se ve skutečnosti s kapkou děje. Experiment ukáže, jak bude tento teoretický model úspěšný.

Pro kulovou kapku platí $V = 4\pi R^3/3$ a $P = \pi R^2$, kde R je poloměr kapky. Rovnici pro odpařování kapky přepíšeme jenom v proměných V a t (tzn. že P vyjádříme pomocí V). Po úpravách dostaneme

$$-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \left[\left(\frac{3\sqrt{\pi}}{4}\right)^{2/3}\lambda\,\frac{(T-T_0)}{l\varrho d}\right]V^{2/3}\,.$$

Výraz v hranaté závorce označíme K a diferenciální rovnici vyřešíme separací proměnných

$$-\int_V^0 \frac{\mathrm{d}V}{V^{2/3}} = \int_0^t K\,\mathrm{d}t\,,$$

kde horní a dolní meze integrálů jsme zvolili tak, aby v čase 0 měla kapka objem V a v čase t objem 0. Počítáme už jenom dané integrály a pro dobu odpařování kapky obdržíme

$$t = \frac{3}{K}\,V^{1/3}\,.$$

Proměřením závislosti doby života kapky na jejím objemu $t(V)$ můžeme určit konstantu K a tedy koeficient tepelné vodivosti λ dělený tloušťkou d vrstvy páry.

$$\frac{\lambda}{d} = \left(\frac{4}{3\sqrt{\pi}}\right)^{2/3}\frac{3l\varrho}{T-T_0}\left(\frac{3}{K}\right)^{-1}\,. \qquad (1)$$

Hrubost našeho modelu se projeví ve skutečnosti, že konstanta K bude záviset na objemu kapky, protože se během odpařování mění její tvar, tloušťka polštáře mezí ní a pánví apod. Tato závislost bude obecně složitá. Zvláště při malých objemech kapky, kdy je děj nejvíce dynamický, se bude náš model nejvíce lišit od reality. Při integrování jsme předpokládali, že K na objemu nezávisí a pro dobu vypařování jsme dostali jednoduchý výsledek $t \sim V^{1/3}$. Takže se podívejme, co ukázal experiment.

Postup měření

Naším skvělým experimentálním zařízením byla elektrická plotna na koleji, místo pánve jsme ale použili nerezový hrnec (nedělejte to![3]), protože na pánvi se nedařilo rejdění pozorovat,

---

[1] Experimentální ověření tohoto faktu viz úloha IV.E loňského ročníku FYKOSu.

[2] Objem kapky se zmenšuje, proto je $\mathrm{d}V$ menší než nula.

[3] Na tak vysoké teploty hrnec není navržen a evidentně to špatně snáší – ten náš na povrchu trochu zčernal tak, že se to nedá umýt (děkuji *Jakubovi Fišerovi* za zapůjčení hrnce a zároveň se mu ještě jednou omlouvám za jeho poškození).

pravděpodobně kvůli nízké teplotě pánve nebo možná také kvůli teflonovému povrchu. Injekční stříkačkou objemu 2 ml jsme kapali kapky vody na povrch a stopkami na mobilu měřili dobu, kterou kapka na rozpáleném povrchu vydržela.

Pro měření jsme použili dva druhy kapek. Velké kapky jsme odkapávali přímo ze stříkačky, malé kapky jsme připravovali tak, že jsme zmenšili otvor stříkačky tak, aby byly kapky menší. Další větší kapky jsme jednoduše vytvářeli rychlým nakapáním více kapek menších. Soustavná chyba měření objemu stříkačkou je asi 2 procenta, jak jsme zjistili měřením hmotnosti natáhnutého objemu vody. Vzhledem k době vypařování (asi 1 min) je měření času dostatečně přesné, bohužel méně přesné je měření objemu kapek. Objem kapky ze stříkačky je možné stanovit tak, že nakapáte množství kapek, spočítáte je a za objem kapky pak prohlásíte výsledný objem vydělený počtem kapek. Takto jsme to dělali – při velkých kapkách to celkem šlo (nepřesnost asi 6 %), kdežto při malých to šlo o dost hůř a nepřesnost odhadujeme asi na 14 %. To už je opravdu hodně nepřesné, ale stále lepší, než kdybychom určovali objem měřením poloměru (který má smysl jenom pro malé kapky kulového tvaru).

Výsledky měření

Naměřené hodnoty jsou shrnuty v následující tabulce.

č. m.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
V [ml]	0,0182	0,0364	0,0522	0,0545	0,1044	0,1566	0,2088	0,2610	0,3132	0,3654
σ_V [ml]	0,0026	0,0052	0,0033	0,0078	0,0066	0,0099	0,0132	0,0155	0,0188	0,0221
	t_1 [s]	t_2 [s]	t_3 [s]	t_4 [s]	t_5 [s]	t_6 [s]	t_7 [s]	t_8 [s]	t_9 [s]	t_{10} [s]
	52	65	88	77	109	134	153	168	174	194
	47	68	84	76	108	129	151	164	180	192
	43	70	84	82	109	129	142	155	182	183
	53	72	84	77	110	131	147	156	192	185
	49	62	80		113	129	147	162	183	197
	49	68	80		108	123	149	157	180	204
t_i [s]	48,8	67,5	83,3	78	109,5	129,2	148,2	160,3	181,8	192,5
σ_{t_i} [s]	1,8	1,8	1,6	1,7	1,3	1,8	1,9	2,3	2,6	3,4

Naměřené hodnoty závislosti doby vypařování na objemu kapky.

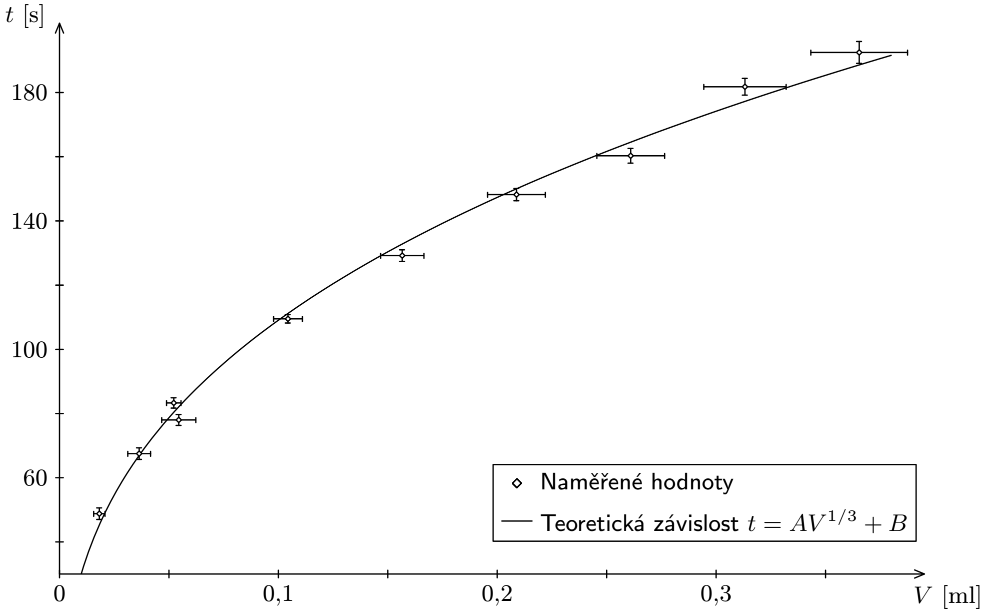
Naměřené hodnoty jsme spolu s jejich chybami vynesli do grafu (viz obr. 2) a nechali proložit závislostí $t = AV^{1/3} + B$ s neznámými koeficienty A a B. Oproti teoretické závislosti jsme přidali konstantu B, aby závislost dobře odpovídala i pro malé objemy kapek. Tehdy je náš teoretický model nejvíce špatně. Dostali jsme

$$A = (320 \pm 40)\,\mathrm{s{\cdot}ml^{-1/3}}\,, \qquad B = (-40 \pm 15)\,\mathrm{s}\,.$$

Teplota kapky T_0 je rovna teplotě varu vody, teplota pánve je asi 220 °C, takže $T - T_0 = (120 \pm 30)$ K. Hustoty vody a její skupenské teplo vypařování při 100 °C najdeme v tabulkách $\varrho = 958\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, $l = 2260\,\mathrm{kJ{\cdot}kg^{-1}}$. Dosazením do (1) dostaneme

$$\lambda/d = (1400 \pm 500)\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}{\cdot}K^{-1}}\,.$$

Z této hodnoty můžeme alespoň odhadnout tloušťku vrstvy mezi pánví a kapkou. V tabulkách najdeme, že tepelné vodivosti plynů jsou řádově $10^{-2}\,\mathrm{W{\cdot}m^{-1}{\cdot}K^{-1}}$, takže $d \approx 10\,\mu\mathrm{m}$.



Obr. 2. Závislost doby rejdění kapky na jejím objemu.

Diskuse výsledků

Největší vliv na celé měření měla nepřesnost stanovení objemu kapek, která se podle grafu na obrázku 2 značně projevila při malých kapkách (všimněte si skoku v naměřeném času mezi třetí a čtvrtou kapkou v grafu 2). Další vlivy na přesnost jsou: proměnlivá teplota povrchu, teplotní roztažnost plastové injekční stříkačky při kapání nad rozpáleným povrchem a z toho vyplývající vliv na objem kapek, nepřesné stanovení času (kapání více kapek do jedné větší musí být dost rychlé) atd. Dále je zřejmé, že konkrétní časy $t = t(V)$ závisí na konkrétních podmínkách, jako teplota, čistota a vlastnosti rozpáleného povrchu, složení vody, okolní vlhkost atd. Ale i přesto má měření význam jako informace o průběhu vypařování kapky.

Při pohledu na graf na obrázku 2 vidíme, že teoretická závislost (s korekcí pro malé objemy kapek) dobře vystihuje naměřenou závislost. Teoretický model tedy nebyl úplně zcestný. Dokonce se nám podařilo řádově odhadnout tloušťku vrstvy páry mezi kapkou a povrchem pánve. Hodnota $10\,\mu\mathrm{m}$ je reálná, dá se očekávat takový výsledek. To je další skutečnost, která nevyvrací uvedenou teorii.

Přesnější experiment by vyžadoval hlavně vymyslet lepší metodu kapání kapek a zejména měření jejich objemu. Možná by také bylo dobré zajistit větší stálost teploty povrchu – při našem měření termostat neustále vypínal a zapínal ohřívání plotny, takže teplota nebyla pořád stejná.

Co bychom rádi viděli ve vašich řešeních

Nějaké teoretické předpovědi. Jak a čím jste měřili? Co jste naměřili? Jak přesně jste to změřili? Potvrdili jste, nebo vyvrátili teoretické předpovědi? Kde mohl být zdroj systematických chyb měření? Co by se případně dalo zlepšit na experimentu?

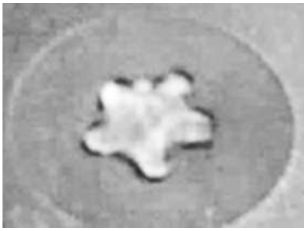
Co bychom viděli jen neradi ve vašich řešeních

Co jste jedli při sepisování toho celého (pochvala – nikoho to nenapadlo). Dalekosáhlé závěry ze třech měření. Grafy proložené lomenou čárou. Grafy bez popisků. Tabulky bez popisků. Dokonale přesná měření. Žádné zhodnocení naměřených hodnot.

A speciálně při této úloze jsme nebyli příliš nadšeni z řešení, v nichž jste jenom konstatovali, že jste při měření nepozorovali žádné rejdění kapek na pánvičce. Chtělo by to aspoň popřemýšlet proč. Totiž problémem je právě dosáhnutí ideální teploty (za Leidenfrostovým bodem). Tu sice lze přímo měřit jen těžko, ale někdy je dobré jednoduše nám uvěřit a udělat vše pro to, aby kapky rejdily. Minimálně to chtělo vyzkoušet jinou pánvičku nebo starý (nejlépe nepoužívaný) hrnec.

Bonus na závěr

Jak si všiml *Marek Kaleta*, pokud kápnete trochu větší kapku (asi 0,5 ml) do malé jamky na plotně (takže vám kapka neuteče), dopadem dalších malých kapek ji trochu rozvibrujete. Pokud chvíli počkáte a ještě máte trochu štěstí, uvidíte něco opravdu krásného – kapka začne kmitat vlastním modem ve tvaru podobném trojcípé, pěticípé nebo i vícecípé hvězdě či mnohoúhelníku, má-li kapka vhodnou velikost (viz obr. 3). Přitom kapka kmitá tak rychle, že okem neuvidíte okamžitý tvar kapky, ale překryv dvou po sobě následujících kmitů (dva trojúhelníky pootočené o 60°), takže místo trojúhelníku vidíte šestiúhelník! Zajímavé je, že když už tyto kmity začnou, jen tak rychle nezmizí. Jak je to možné, když nějaké, byť velmi malé tření mezi kapkou a plotnou (a v neposlední řadě také vnitřní tření v kapce) tam být přece musí, takže dochází ke ztrátám energie kmitů? Jediným vysvětlením, které se nabízí, je, že kapka si musí brát tepelnou energii od plotny a měnit ji na mechanickou energii svého pravidelného kmitavého pohybu podobně jako tepelný stroj. Pokus je velmi pěkný, určitě si ho vyzkoušejte!



Obr. 3

Literatura

[1] Halliday, D., Resnick, R., Walker, J.: *Fyzika.* VUT Brno – naklad. VUTIUM, Brno 2000.

Peter Zalom
peter@fykos.mff.cuni.cz
Ján Lalinský
jano@fykos.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.