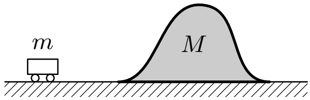
19. ročník, úloha VI . 1 ... *zdolání kopečku* *(5 bodů; průměr 2,96; řešilo 27 studentů)*

Vozíček o hmotnosti m jede po rovině rychlostí $\boldsymbol{v}$, na níž leží dřevěný „kopeček" o hmotnosti M a výšce h, jenž po rovině klouže bez tření (viz obr. 1). Vozíček na kopeček najede. Za jakých podmínek se mu podaří přejet přes vrchol? Jakou rychlostí se bude hora nakonec pohybovat?

Našel Matouš Ringel v sovětské sbírce.



Obr. 1

Jelikož není nijak specifikováno, jak vypadá kopeček, je zřejmé, že zkoumat tuto úlohu pomocí účinků sil by nikam nevedlo – tedy možná vedlo, ale bylo by to zbytečně komplikované. Proto raději budeme úlohu zkoumat z hlediska energií. Pro platnost zákona zachování mechanické energie nebudeme uvažovat žádné odporové síly. Také je třeba, aby se vozíček během své cesty nevznesl nad povrch kopečku, jelikož při dopadu by se část jeho energie předala podložce. Také budeme předpokládat, že kopeček má dostatečně hladký povrch, aby do něj vozíček „nenarazil".

Vztažnou soustavu volíme pevně spojenou s podložkou, kladný směr rychlosti volíme tak, že vozíček má na počátku kladnou rychlost.

Pro stanovení velikosti kritické počáteční rychlosti v_k vozíčku (minimální počáteční rychlosti takové, aby vozíček kopeček přejel) budeme předpokládat, že kopeček má jediný vrcholek, a tedy po zdolání tohoto vrcholku je již jisté, že vozíček kopeček přejede. Jelikož kopeček volně klouže po podložce, bude mít vozíček při překonávání vrcholku v mezním případě stejnou rychlost jako kopeček, tuto společnou rychlost si označíme V_k. Díky předpokladům platí zákon zachování mechanické energie a zákon zachování hybnosti

$$\tfrac{1}{2}mv_\mathrm{k}^2 = \tfrac{1}{2}(m+M)V_\mathrm{k}^2 + mgh\,,$$
$$mv_\mathrm{k} = (m+M)V_\mathrm{k}\,.$$

Vyloučením V_k dostaneme

$$v_\mathrm{k}^2 = \frac{m+M}{M}\,gh\,, \tag{1}$$

čímž jsme získali kritickou velikost počáteční rychlosti vozíčku pro dostání se na vrcholek.

Nyní pojďme zkoumat, jakou rychlostí se bude kopeček pohybovat poté, co z něj vozíček sjede. Opět využijeme zákon zachování mechanické energie a zákon zachování hybnosti, tedy

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}mw^2 + \tfrac{1}{2}MV^2\,,$$
$$mv = mw + MV\,,$$

kde w je rychlost vozíčku po opuštění kopečku a V je konečná rychlost kopečku. Po vyloučení w získáme rovnici

$$\frac{M}{m}\,V\left(\frac{m+M}{m}\,V - 2v\right) = 0\,,$$

která má dvě řešení pro V

$$V_1 = 0\,, \qquad V_2 = \frac{2m}{m+M}\,v\,.$$

Jak ukážeme dál, první řešení odpovídá situaci, kdy vozíček kopeček překoná a dál pokračuje stejnou rychlostí jako na počátku, a druhé řešení odpovídá situaci, kdy vozíček kopeček nepřekoná.

Pokud tedy budeme uvažovat rychlost kopečku V_2 a vyjádříme si rychlost vozíčku w, získáme

$$w = \frac{m - M}{m} v \,,$$

ekvivalentními úpravami vztahů pro w a V_2 lze snadno dokázat, že $V_2 > w$, což vzhledem k povaze úlohy znamená, že kopeček je „před“ vozíčkem a stále se mu vzdaluje, neboli že vozíček kopeček nepřekonal.

Vozíček tedy musí jet alespoň rychlostí v_k dle vztahu (1), a pokud překoná kopeček, tak kopeček nakonec zůstane stát v klidu, ale bude posunut oproti své původní poloze.

Častá chyba v zaslaných řešeních byla, že si řešitelé neuvědomili, že kopeček se nebude pohybovat rychlostí V_k příliš dlouho, protože vozíček na něj bude ještě nějak působit při svém sjíždění dolů.

Petr Sýkora
petr@fykos.mff.cuni.cz