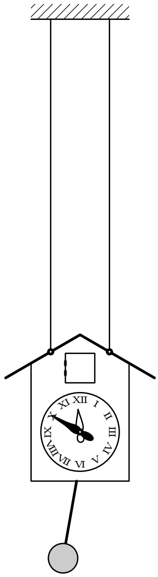
19. ročník, úloha VI . 2 ... *kukačky na lanech* *(5 bodů; průměr 2,20; řešilo 15 studentů)*

Kyvadlové hodiny o hmotnosti M jsou zavěšeny na dvou dlouhých rovnoběžných lanech (viz obr. 1). Kyvadlo se skládá ze závažíčka o hmotnosti m a lehké tyčky o délce l. Určete, o kolik se budou takové hodiny předbíhat (opožďovat) oproti hodinám pevně přibitým na stěně.

Našel Matouš Ringel v sovětské sbírce.



Obr. 1

Vzhledem k tomu, že délka lana, na kterém jsou zavěšeny kukačky, je velká, lze považovat pohyb kukaček za vodorovný. Situace je tedy ekvivalentní tomu, že hodiny jsou vázány na vodorovnou přímku.

Uvažujme proto následující příklad. Mějme vozíček o hmotnosti M na vodorovných kolejnicích, na kterém je zavěšeno matematické kyvadlo o délce l a hmotnosti m (viz obr. 2). Na tuto soustavu působí pouze tíhová síla a reakce kolejí. Tyto síly mají svislý směr. Síly ve vodorovném směru jsou nulové, a proto těžiště této soustavy podle zákona setrvačnosti setrvává v klidu nebo se pohybuje rovnoměrným přímočarým pohybem. Ve svislém směru kmitá těžiště harmonickým pohybem se stejnou frekvencí jako kyvadlo.

Přejděme do neinerciální soustavy spojené s těžištěm soustavy. Zde použijeme druhou impulzovou větu vzhledem k těžišti. Se setrvačnými silami se nemusíme trápit, protože mají působiště v těžišti a tedy nulový moment vzhledem k těžišti. Také předpokládejme, že výchylky kyvadla jsou dostatečně malé, aby $\cos\alpha \approx 1$ a $\sin\alpha \approx \alpha$.

Velikost tahové síly vlákna $\boldsymbol{F}$ určíme z rovnováhy sil působících na kyvadlo ve směru rovnoběžném s vláknem $F = mg\cos\alpha$, v tomto směru se totiž kyvadlo nepohybuje. Svislá souřadnice výslednice sil působících na vozík je nulová se vozík v tomto směru nepohybuje. Vodorovná souřadnice je ovšem nenulová a má hodnotu $-F\cos\alpha = -mg\cos\alpha\sin\alpha$ (tj. vodorovná složka míří na obrázku 2 doleva). Zbývá vzdálenost kyvadla od těžiště označit l_T a máme vše připraveno k napsání druhé impulzové věty.

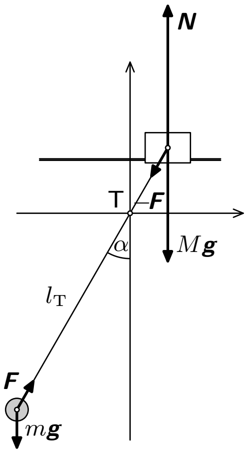
$$[ml_\mathrm{T}^2 + M(l - l_\mathrm{T})^2]\ddot{\alpha} = -mgl_\mathrm{T}\sin\alpha - mg(l - l_\mathrm{T})\cos^2\alpha\sin\alpha \approx$$
$$\approx -mgl\alpha$$

Jestliže za vzdálenost těžiště od kyvadla dosadíme $l_\mathrm{T} = Ml/(m+M)$, po úpravách dostaneme

$$\ddot{\alpha} + \frac{(M+m)g}{Ml}\alpha = 0\,.$$

Rovnice kyvadla má tvar $\ddot{\alpha} + \omega^2\alpha = 0$, takže úhlová frekvence soustavy kyvadla a vozíčku je

$$\omega = \sqrt{\frac{(M+m)g}{Ml}}\,.$$



Obr. 2

Podíl úhlových frekvencí zavěšených hodin a hodin pevně přibitých na stěně je roven

$$\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{P}}} = \sqrt{1 + \frac{m}{M}} > 1\,,$$

a tedy zavěšené kukačky se předbíhají oproti přibitým hodinám.

Karel Tůma
kajinek@fykos.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.