Milí řešitelé!

Nový (jubilejní dvacátý) ročník FYKOSu teprve začíná a chtěli bychom dát příležitost všem studentům ještě se zapojit do řešení našeho semináře. **Chceš se zamýšlet nad fyzikálními úlohami a problémy či tě lákají dvě týdenní soustředění a zájezd po Česku, které pořádáme pro úspěšné řešitele? Pošli nám řešení alespoň jedné úlohy druhé série!**

Novým řešitelům bychom chtěli vzkázat, ať se nelekají toho, že v zadání úloh se často neobjeví ani jediná zadaná veličina, narozdíl od středoškolských učebnic, kde bývají zadané právě všechny potřebné hodnoty. V našem semináři se více chceme přiblížit skutečné fyzice a ne pouhému dosazování do vzorečků.

Pokud je ve vašem okolí stále někdo, koho fyzika baví, ale o našem semináři neví nebo si myslí, že FYKOS není pro něj, neboť ho řeší jenom vítězové celostátního kola olympiády, vysvětlete mu prosím, že to není pravda.

Ať už uvažuješ o studiu na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy nebo ne, přijď nás navštívit na Dnu otevřených dveří, který se koná v úterý 28. listopadu (bližší informace na `http://www.mff.cuni.cz/verejnost/dod/`). Potkáš se s organizátory i účastníky FYKOSu. Na místě bude k dostání ročenka 19. ročníku, která se právě tiskne.

Připomeňme na závěr několik organizačních záležitostí.

Řešení úloh 1. série s průběžnou výsledkovou listinou dostanete se zadáním 3. série během prosince. Každému, kdo nám pošle svůj e-mail, budeme vždy poté, co nám od něj dojde řešení, posílat krátkou zprávu, ve které potvrdíme, že řešení skutečně došlo. Klasická pošta bývá nespolehlivá a tímto způsobem předejdeme nepříjemným překvapením. Svá řešení můžete samozřejmě celá posílat e-mailem na adresu `fykos-solutions@mff.cuni.cz`.

Aktuální dění v semináři sledujte na našich www stránkách `http://fykos.mff.cuni.cz`. Naleznete tam zadání a řešení úloh, aktuální pořadí, **diskusní fórum** a mnoho dalších věcí.

Přejeme plno nápadů při řešení úloh a s těmi pilnými z vás se těšíme na viděnou na jarním soustředění.

Honza Prachař

FYKOSí fyziklání

Na závěr druhé série pro vás máme ještě jednu novinku. V tomto ročníku pořádáme první **FYKOSí fyziklání**, což je soutěž určená pro nejvýše pětičlenná družstva studentů středních škol v řešení fyzikálních příkladů s časovým limitem 3 hodiny. Pravidla soutěže a jiné důležité informace (datum a místo konání, pozvánka s přihláškou atd.) naleznete na našich stránkách `http://fykos.mff.cuni.cz`. Předběžný termín konání této soutěže je v polovině prosince tohoto roku. Pokud o soutěž máte zájem, napište nám prosím na adresu `fykos@mff.cuni.cz`.

Zadání II. série

Termín odeslání: 4. prosince 2006

Úloha II . 1 ... *Čeňkova pila*

Čeňkova pila se nachází na soutoku řek Vydry a Křemelné na Šumavě. Pojmenovaná je podle obchodníka s dřevem Čeňka Bubeníčka, který zde pilu v 19. století postavil. Na jejím místě nyní stojí vodní elektrárna, která je stále v provozu a patří mezi technické památky.

Vodní elektrárna využívá výškový rozdíl hladin nad a pod turbínou 10 m, výkon elektrárny je 96 kW. Voda je na turbínu přiváděna vantroky[1], které jsou široké 1 m, a voda v nich sahá do výšky 1,5 m. Při pozorování proudící vody jsme odhadli, že uprostřed vantroků má proud vody rychlost $1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Odhadněte, jaká je účinnost elektrárny.

Úloha II . 2 ... *drtivý dopad*

Pokuste se najít libovolný vztah mezi rychlostí meteoroidu dané hmotnosti těsně před dopadem na povrch Země a poloměrem vzniknuvšího kráteru.

Úloha II . 3 ... *osvětlení stolu*

Navrhněte rozmístění zářivek na stropě pracovny, který je ve výšce 3 m nad deskou stolu tak, aby intenzita osvětlení na ploše stolu nekolísala víc než o 0,1 %.

Úloha II . 4 ... *jak je daleko Slunce?*

Vraťte se zpátky do 18. století do doby, kdy ještě nebyla známa konstanta v Newtonově gravitačním zákoně ani vzdálenost Země od Slunce či jiných planet. V té době Edmond Halley (astronom, který poznal, že kometa pozorovaná v roce 1682 je stejná jako ta v letech 1456, 1531 a 1607) navrhl určit vzdálenost Slunce od Země proměřením přechodu planety Venuše přes sluneční kotouč. Přechody Venuše se bohužel odehrávají nepravidelně. Přicházejí v párech po osmi letech, ale potom k nim nedochází sto let i déle a za Halleyho života nedošlo k žádnému.

Myšlenka nezapadla, doutnala, a když se blížil další přechod v roce 1761, vědecký svět byl připraven. Vědci se vydali do sta míst na světě (mj. na Sibiř, do Číny, Jižní Afriky, Indonésie). Byl to první vědecký podnik v historii založený na mezinárodní spolupráci.

Po návratu měřičů se dospělo k závěru, že měření přechodu bylo v podstatě nezdarem. Ironií je, že jedním z problémů byl příliš velký počet pozorování, která se často ukázala jako protikladná. Úspěšné měření Venušina přechodu naopak uskutečnil kapitán James Cook v roce 1769 z jednoho slunného vrchu na Tahiti. Po jeho návratu měli astronomové dostatek informací, aby vypočítali, že průměrná vzdálenost ze Země ke Slunci činí zhruba 150 miliónů kilometrů.

Na vás je, abyste tak jako Edmond Halley vymysleli, jak lze z měření přechodu Venuše určit vzdálenost Země od Slunce. Samozřejmě neznáte jiná než tehdejší data: poloměr Země a dobu oběhu Země a Venuše kolem Slunce z astronomických pozorování.

---

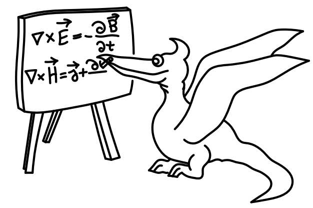
[1] Vantroky jsou dřevěná stavba – koryto obdélníkového průřezu, kterým je přiváděna voda na mlýnské kolo.

Úloha II . P ... *třepání čajem*

Vysvětlete, proč když zatřepeme sypaným čajem v plechovce, zůstanou větší kousky lístků spíše nahoře než dole. Řešení můžete obohatit vlastním pozorováním.

Úloha II . E ... *vlny na vodě*

Na základě rozměrové analýzy najděte vztah pro rychlost vln na vodě. Teoretický vztah ověřte a najděte neznámé konstanty z měření rychlosti vln v závislosti na jejich vlnové délce. Uvědomte si, že existují dva typy vln – jedny jsou způsobené gravitací Země a druhé povrchovým napětím.



Seriál na pokračování

Kapitola 2: Matematický aparát kvantové mechaniky

Dříve než se pustíme do tajů kvantového světa, povíme si něco o matematických nástrojích, jimiž kvantová mechanika disponuje. Těm, kterým toto povídání přijde jako mrhání časem, se předem omlouváme, příště budou jistě uspokojeni.

Vektory

Vektor si naivně můžeme představit jako orientovanou šipku. Pokud ji umístíme do počátku souřadnic, lze ji popsat pomocí tří čísel V_1, V_2 a V_3, které zapisujeme do sloupce. Ty tento vektor potom plně určují. Např.

$$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Jistě můžeme sestavit speciální vektory, které mají vždy jen jedno z těchto tří čísel nenulové (konkrétně jednotku), a označit je

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Není pak problém rozložit náš původní vektor $\boldsymbol{V}$ na součet jednotkových vektorů, tj.

$$\boldsymbol{V} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 .$$

Trojice vektorů $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ a $\boldsymbol{e}_3$ se nazývá *báze* a do této báze lze rozložit libovolný vektor, tedy pro libovolné $\boldsymbol{V}$

$$\boldsymbol{V} = V_1 \boldsymbol{e}_1 + V_2 \boldsymbol{e}_2 + V_3 \boldsymbol{e}_3 ,$$

kde V_1, V_2 a V_3 jsou *komponenty* tohoto vektoru v bázi tvořené $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$.

Dalším důležitým pojmem je *skalární součin*. Naivně řečeno určuje, jak jsou si dva vektory blízké. Pro dva vektory $\boldsymbol{X}$ a $\boldsymbol{Y}$ máme

$$\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{Y} = (X_1^* \ X_2^* \ X_3^*) \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} = X_1^* Y_1 + X_2^* Y_2 + X_3^* Y_3 \,.$$

Co jsme tedy vlastně provedli za operaci? No nejdříve jsme vektor $\boldsymbol{X}$ otočili ze sloupce do řádku, komplexně ho sdružili a poté jsme vynásobili první komponentu $\boldsymbol{X}$ s první komponentou vektoru $\boldsymbol{Y}$ atd. A nakonec jsme to celé sečetli. Výsledek skalárního součinu je tedy komplexní číslo.

Kromě skalárního součinu definujeme také *dyadický* součin, který ze dvou vektorů udělá matici[2] podle vztahu

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} (X_1^* \ X_2^* \ X_3^*) = \begin{pmatrix} Y_1 X_1^* & Y_1 X_2^* & Y_1 X_3^* \\ Y_2 X_1^* & Y_2 X_2^* & Y_2 X_3^* \\ Y_3 X_1^* & Y_3 X_2^* & Y_3 X_3^* \end{pmatrix} .$$

Skalární součin dvou vektorů má některé zajímavé vlastnosti. Pokud je skalární součin dvou vektorů 0, potom jsou na sebe tyto vektory kolmé. Lze snadno ukázat, že toto platí právě pro trojici vektorů $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, tvoří tedy tzv. *ortogonální* bázi.

Pomocí skalárního součinu lze definovat pojem *norma* vektoru, což je jen jiný výraz pro jeho velikost.

$$\|\boldsymbol{V}\| = \sqrt{\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{V}} = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2} \,.$$

Pokud platí $\|\boldsymbol{V}\| = 1$, mluvíme o normovaném vektoru (resp. normovaném na jednotku). To se bude často hodit, proto není od věci si na příkladu ukázat, jak z obecného vektoru udělat normovaný. Opět použijeme vektor $\boldsymbol{V}$ z úvodu. Jeho norma potom je

$$\|\boldsymbol{V}\| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{21} \,.$$

Normovaný vektor dostaneme tak, že komponenty toho původního vydělíme jeho normou, tj.

$$\boldsymbol{V}' = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{21}} \\ \frac{4}{\sqrt{21}} \\ \frac{1}{\sqrt{21}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{21}} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Pro tento vektor už platí $\|\boldsymbol{V}'\| = 1$. Musíme si uvědomit, že jsme sice změnili jeho velikost (a to z $\sqrt{21}$ na 1), nicméně jeho směr zůstal nezměněný. Není těžké ukázat, že pro dva normované vektory platí $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \cos\varphi$, kde φ je úhel, který spolu svírají. Odtud také vidíme, že pro kolmé vektory ($\varphi = \pi/2$) máme skalární součin nulový, pro rovnoběžné ($\varphi = 0$) naopak roven jedné.

Zatím jsme diskutovali jen 3-komponentové vektory (určené třemi čísly), nicméně vše, co jsme řekli, platí pro vektory s libovolným počtem komponent. Pokud bychom se pohybovali pouze na ploše, popsali bychom vektor pomocí dvou čísel atd. Obecně pro n-komponentový vektor potřebujeme pro určení vektoru zadat n čísel, což jsou komponenty v bázi $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2, \dots \boldsymbol{e}_n$.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} .$$

[2] Co je matice, se dozvíte v zápětí.

Vektory báze potom mají tvar

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \dots, \qquad \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Všechny vlastnosti ukázané pro případ $n = 3$ platí obecně i tady.

Matice

Tak jako vektor byl pro nás sloupec obecně n čísel, tak matice bude pro nás čtvercová tabulka $n \times n$ čísel. Například

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Prvky obecné matice označujeme symboly a_{ij}, kde i a j označují číslo řádku a sloupce daného prvku. Pro první z matic je např. $a_{11} = 3$, $a_{23} = 4$. Obecná matice 3×3 má tvar

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

a obdobně pro jiné rozměry. *Stopou* matice nazýváme součet diagonálních elementů a označujeme ji symbolem Tr (z angl. trace), tj.

$$\operatorname{Tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}\,.$$

Konkrétně u našich dvou matic vyjde 12, resp. 1. Maticí $n \times n$ vždy můžeme zapůsobit na n-rozměrný vektor, a to tak, že skalárně vynásobíme první řádek matice s daným vektorem, dostaneme číslo, poté druhý řádek s daným vektorem, atd. Výsledkem této operace je opět vektor. Např.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 0 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 1 \\ 5 \cdot 2 + 0 \cdot 4 + 7 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

Pro obecnou matici je

$$Y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j\,,$$

kde X_i, Y_j jsou složky vektoru před, resp. po zapůsobení matice a_{ij}. To samé můžeme zapsat symbolicky

$$\boldsymbol{Y} = A \cdot \boldsymbol{X}\,.$$

Tak jako lze skalárně vynásobit dva vektory či násobit matici s vektorem, můžeme definovat i součin dvou matic. Postup je zcela analogický jako u součinu matice s vektorem, jen druhou matici si představíme jako sadu sloupcových vektorů vedle sebe. Poté zapůsobíme maticí na každý vektor zvlášť a výsledek zapíšeme opět do vektorů ležících vedle sebe. Výsledek násobení dvou matic je tedy opět matice. Ukážeme si to na příkladu

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3\cdot 0 + 2\cdot(-1) \\ (-1)\cdot 0 + 2\cdot(-1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3\cdot 1 + 2\cdot 2 \\ (-1)\cdot 1 + 2\cdot 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} .$$

To je pouze pro názornou představu. Obecně vzato, pokud násobíme dvě matice A a B s prvky a_{ij} a b_{ij}, předpis pro prvky c_{ij} výsledné matice C zní

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} .$$

Pro danou matici[3] $n \times n$ existuje n speciálních vektorů, které nazýváme *vlastní vektory* matice A, pro které platí

$$A \cdot \boldsymbol{X}_i = \lambda_i \boldsymbol{X}_i ,$$

kde λ_i jsou tzv. *vlastní čísla* příslušející dané matici A a vlastním vektorům $\boldsymbol{X}_i$ (pro každý vektor jsou vlastní čísla obecně různá), $i = 1, \ldots, n$. Postup řešení si ukážeme na jednoduchém případu matice 2×2. Hledáme řešení rovnice

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} .$$

Dostáváme tedy soustavu dvou rovnic pro tři neznámé

$$-x_1 + 2x_2 = \lambda x_1 \qquad x_1 - x_2 = \lambda x_2 .$$

To je sice na první pohled divné, nicméně z rovnice je jasné, že pokud řeší rovnici určitý vektor $\boldsymbol{X}$, bude ji řešit i jeho libovolný násobek. Nicméně se jedná stále o tentýž vektor, jen jinak nanormovaný (má jinou délku). Tudíž komponenty samy o sobě tak důležité nejsou, zásadní je, jaký je mezi nimi vztah. Můžeme tedy klidně zvolit $x_1 = 1$, dopočítat x_2 a λ a poté nanormovat výsledný vektor, jak je potřeba (většinou na číslo 1). Dostaneme tedy dvě řešení:

$$\boldsymbol{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} ,\ \lambda_1 = \sqrt{2} - 1 \qquad \boldsymbol{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} ,\ \lambda_2 = \sqrt{2} + 1$$

Normované vlastní vektory mají potom tvar[4]

$$\boldsymbol{X}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} , \qquad \boldsymbol{X}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Pro danou matici A můžeme najít tzv. *transponovanou* matici A^{T}, pro jejíž komponenty platí $a_{ij}^{\mathrm{T}} = a_{ji}$ (prostě matici zrcadlově zobrazíme podle diagonály). Obdobně lze definovat

[3]) Uvažujeme pouze regulární matice, což jsou matice s nenulovým determinantem.

[4]) Je jasné, že stejně dobré normované řešení jsou vektory vynásobené -1 nebo obecně jakýmkoliv fázovým faktorem $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$.

komplexně sdruženou matici A^*, jejíž všechny komponenty jsou komplexně sdružené k původním. Uvedeme krátký příklad. Vyjdeme z matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -1 & 2 & -2i \\ 1+i & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a spočítáme k ní matici transponovanou a komplexně sdruženou.

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1+i \\ i & 2 & 0 \\ 0 & -2i & 3 \end{pmatrix}, \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ -1 & 2 & 2i \\ 1-i & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Kromě toho se zavádí také tzv. *hermitovsky sdružená* matice $A^\dagger$, která je jak transponovaná, tak komplexně sdružená (a je samozřejmě jedno, v jakém pořadí to uděláme). V našem případě dostaneme

$$A^\dagger = (A^{\mathrm{T}})^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1-i \\ -i & 2 & 0 \\ 0 & 2i & 3 \end{pmatrix}.$$

Pokud je matice A shodná s nějakou svojí mutací, říkáme o ní, že je

- ortogonální, pokud $A = A^{\mathrm{T}}$,
- reálná, pokud $A = A^*$,
- hermitovská, pokud $A = A^\dagger$.

Dále se k dané matici A dá vypočítat tzv. *inverzní*[5] matice A^{-1}, pro kterou platí $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{I}$. Postup výpočtu je poněkud zdlouhavější, proto ho tu dělat nebudeme, nicméně lze najít v každé učebnici lineární algebry. Pokud je inverzní matice A^{-1} shodná s maticí hermitovsky sdruženou $A^{-1} = A^\dagger$, nazýváme matici A *unitární*.

Hilbertův prostor stavů

Pro další výklad zavedeme abstraktní označení[6] pro vektory. Sloupcový vektor $\boldsymbol{X}$ budeme označovat jako $|X\rangle$, řádkový vektor (ten u skalárního součinu) jako $\langle X|$. Toto označení bude mít velké výhody, které se záhy ukážou.

Hřiště, na kterém budeme kvantovou mechaniku budovat, se nazývá Hilbertův prostor. Je to prostor všech vektorů $|X\rangle$ s tím, že můžeme zavést skalární součin mezi dvěma vektory $|A\rangle$ a $|B\rangle$. Řekneme, že prostor je n-dimenzionální, pokud jeho báze má n nezávislých vektorů. Označme je $|k\rangle$, kde k probíhá od 1 do n a vektory jsou na sebe kolmé. Kolmost vektorů báze $|k\rangle$ lze v této notaci jednoduše vyjádřit jako $\langle k|m\rangle = \delta_{km}$.[7] Bázové vektory jsou přímým analogem vektorů $\boldsymbol{e}_i$, obecný vektor $|\psi\rangle$ můžeme tedy do této báze rozložit jako

$$|\psi\rangle = \sum_{k=1}^{n} c_k|k\rangle = c_1|1\rangle + c_2|2\rangle + \ldots + c_n|n\rangle\,,$$

5) Přesněji jde to jen pro tzv. regulární matice.

6) Toto značení se nazývá Diracova notace.

7) Kroneckerův symbol δ_{jk} je 1 pro $j = k$ a 0 pro $j \neq k$.

kde c_k jsou nějaká (obecně komplexní) čísla. Tyto vektory se označují jako *kety* (či ket-vektory). Obdobně lze zavést prostor vektorů $\langle\psi|$ s bází $\langle k|$, kde rozklad do báze má tvar

$$\langle\psi| = \sum_{k=1}^{n} c_k^* \langle k| = c_1^*\langle 1| + c_2^*\langle 2| + \ldots + c_n^*\langle n| \,.$$

Tyto vektory se nazývají *bra* (či bra-vektory). Většinou se pracuje pouze s kety, protože prostory obou typů vektorů jsou stejné, každému ketu $|\psi\rangle$ odpovídá nějaký bra $\langle\psi|$. Koeficienty rozkladu do báze lze reprezentovat pomocí vektoru v klasickém smyslu, tj.

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} , \qquad \langle\psi| = \begin{pmatrix} c_1^* & c_2^* & \ldots & c_n^* \end{pmatrix} \,.$$

Skalární součin vektorů $|X\rangle$ a $|Y\rangle$ potom zapisujeme ve tvaru $\langle X|Y\rangle$. Po rozepsání vektorů $|X\rangle$ a $|Y\rangle$ do báze a využití kolmosti vektorů vyjde

$$|X\rangle = \sum_{k=1}^{n} X_k |k\rangle \,, \qquad |Y\rangle = \sum_{k=1}^{n} Y_k |k\rangle \,,$$

$$\langle X|Y\rangle = X_1^* Y_1 + X_2^* Y_2 + \ldots + X_n^* Y_n \,.$$

Fakticky tedy děláme to, že danému ketu $|A\rangle$ přiřadíme bra $\langle A|$ a „přibouchneme“ ho zprava na ket $|B\rangle$. Je to přesný analog skalárního součinu dvou sloupcových vektorů (kety), kdy jeden z vektorů otočíme na řádku (bra), aby je bylo možno vynásobit. Je zřejmé, že platí důležitý vztah

$$\langle A|B\rangle = \langle B|A\rangle^* \,,$$

tudíž obecně není jedno, v jakém jsou pořadí.

Teď by nás zajímalo, jak vypočítat koeficienty c_k v rozkladu $|\psi\rangle$ do báze $|k\rangle$. Pokud vztah pro rozklad $|\psi\rangle$ skalárně vynásobíme s bázovým vektorem $\langle j|$, dostaneme

$$\langle j|\psi\rangle = \sum_{k=1}^{n} c_k \langle j|k\rangle = \sum_{k=1}^{n} c_k \delta_{jk} = c_j \,.$$

Jediný nenulový člen v sumě je pro $j = k$, tedy skalární součin s $\langle j|$ vybírá z rozkladu pro $|\psi\rangle$ koeficient c_j, např. tedy $c_2 = \langle 2|\psi\rangle$. Pro normovaný vektor platí $\langle\psi|\psi\rangle = 1$, tj.

$$\sum_{j=1}^{n} |c_j|^2 = |c_1|^2 + |c_2|^2 + \ldots + |c_n|^2 = 1 \,,$$

což je signál pro to, že c_j^2 souvisí s pravděpodobností výskytu $|j\rangle$ ve vektoru $|\psi\rangle$.

Samozřejmě neexistuje pouze jedna báze. Pro popis si můžeme zvolit pro nás nejvýhodnější bázi. Označme první bázi jako $|k\rangle$ a druhou bázi $|k'\rangle$, kde $k, k' = 1, \ldots, n$. Samozřejmě obě báze volíme tak, aby byly ortogonální, což znamená, že bázové vektory jsou navzájem kolmé, tj. $\langle k|m\rangle = \delta_{km}$, $\langle k'|m'\rangle = \delta_{k'm'}$. Vektor $|\psi\rangle$ lze potom rozložit i do nové báze $|k'\rangle$

$$|\psi\rangle = \sum_{k=1}^{n} c'_k |k'\rangle = c'_1|1'\rangle + c'_2|2'\rangle + \ldots + c'_n|n'\rangle.$$

Samozřejmě koeficienty c'_k jsou obecně různé od koeficientů c_k, ačkoliv rozkládáme stejný vektor $|\psi\rangle$. Jak tyto koeficienty spolu souvisejí, si povíme za chvíli.

Operátory na Hilbertově prostoru

Důležitým pojmem hojně užívaným v kvantové mechanice je *operátor*. Standardně jej značíme $\widehat{A}$, $\widehat{H}$, atd. a působí na Hilbertově prostoru tak, že zkrátka mění jeden vektor ve druhý. Např.

$$\widehat{A}|X\rangle = h|Y\rangle\,,$$

kde $|X\rangle$ a $|Y\rangle$ jsou normované vektory a h je číslo.

Pro daný operátor jsou však podstatné pouze vlastní vektory a vlastní čísla, která se podobně jako u matic definují jako

$$\widehat{A}|X_i\rangle = \lambda_i|X_i\rangle\,,$$

kde λ_i je vlastní číslo příslušející vlastnímu vektoru $|X_i\rangle$, $i = 1, \ldots, m$, počet vlastních vektorů je m. Často mají vlastní vektory a vlastní čísla stejné označení jako operátor

$$\widehat{A}|A_i\rangle = A_i|A_i\rangle\,.$$

Vlastní vektory jsou kolmé, tudíž platí $\langle A_i|A_j\rangle = \delta_{ij}$. Pokud počet vlastních vektorů m je stejný jako počet vektorů báze n (čili dimenze prostoru)[8], můžeme za bázi tohoto prostoru zvolit právě vlastní vektory $|A_i\rangle$, což bohatě využijeme později.

Obecný operátor vždy nakonec vyjadřujeme v nějaké konkrétní bázi. Označme $|k\rangle$ ortogonální bázi v Hilbertově prostoru. Operátor pak můžeme vyjádřit jako matici, která má komponenty[9]

$$A_{km} = \langle k|\widehat{A}|m\rangle\,,$$

kde k čísluje kromě prvků báze i číslo řádku a m číslo sloupce. Téměř každý operátor jde takto vyjádřit pomocí matice, mluvíme v tomto případě o tzv. *maticové reprezentaci*. Hledání vlastních čísel a vlastních vektorů operátorů se tak většinou převede na výpočty s maticemi. Stejně jako u matic je součin dvou operátorů opět operátor.

Zajímavá je skutečnost, že pokud uděláme dyadický součin dvou libovolných vektorů $|X\rangle$ a $|Y\rangle$, chová se výsledný objekt jako operátor, tedy mění jeden vektor ve druhý, např. zapůsobením na nějaký jiný vektor $|\psi\rangle$ dostaneme

$$\widehat{A} = |X\rangle\langle Y| \quad\Rightarrow\quad \widehat{A}|\psi\rangle = |X\rangle\langle Y|\psi\rangle = a|X\rangle\,,$$

kde $a = \langle Y|\psi\rangle$ je nějaké číslo. Vidíme tedy, že působením operátoru $\widehat{A}$ se vektor $|\psi\rangle$ přeměnil na vektor $|X\rangle$ vynásobený číslem. Speciálním případem takovéhoto operátoru je tzv. *projekční operátor*, který libovolný vektor $|\psi\rangle$ zobrazí do předem daného vektoru $|X\rangle$

$$\widehat{P} = |X\rangle\langle X| \quad\Rightarrow\quad \widehat{P}|\psi\rangle = |X\rangle\langle X|\psi\rangle = a|X\rangle\,,$$

kde $a = \langle X|\psi\rangle$ udává, jak moc jsou si vektory $|\psi\rangle$ a $|X\rangle$ blízké. Pro $a = 0$ jsou oba vektory kolmé, pro $a = 1$ jsou identické.[10] Takovéto projekční operátory lze samozřejmě sestavit i pro bázové vektory, $\widehat{P}_k = |k\rangle\langle k|$. Pak zapůsobením na libovolný vektor $|\psi\rangle$ dostaneme

$$\widehat{P}_k|\psi\rangle = |k\rangle\langle k|\psi\rangle = c_k|k\rangle\,,$$

---

[8] V příštím díle uvidíme, že může být $m < n$.

[9] Výsledek „obložení“ operátoru vektory dostaneme skutečně číslo, pokud zapůsobí operátor na vektor $|m\rangle$ dostaneme obecně nějaký jiný vektor a pak ho skalárně vynásobíme s $\langle k|$ a dostaneme číslo.

[10] Za předpokladu, že oba vektory jsou normované na jednotku.

kde $c_k = \langle k|\psi\rangle$ je známý koeficient z rozkladu $|\psi\rangle$ do báze. Vidíme tedy, že projekční operátor nám z toho rozkladu vybral přesně člen příslušející svému bázovému vektoru $|k\rangle$. Zajímavý případ nastane, pokud vezmeme projekční operátory od všech bázových vektorů a sečteme je. Zapůsobením na libovolný vektor potom dostaneme

$$\sum_{k=1}^{n} P_k|\psi\rangle = \sum_{k=1}^{n} |k\rangle\langle k|\psi\rangle = \sum_{k=1}^{n} c_k|k\rangle = |\psi\rangle\,.$$

Dostali jsme tedy opět ten samý vektor. Proto takovýto speciální operátor nazýváme operátorem *identity* a zapisujeme ho ve tvaru

$$\mathbb{I} = \sum_{k=1}^{n} P_k = \sum_{k=1}^{n} |k\rangle\langle k|\,.$$

Pomocí této užitečné formule můžeme snadno ukázat slibovaný vztah, jak spolu souvisejí bázové vektory $|k\rangle$ a $|k'\rangle$ a koeficienty c_k a c'_k rozkladu obecného vektoru $|\psi\rangle$ právě do těchto bází. Zapůsobíme identitou na vektor $|k'\rangle$

$$|k'\rangle = \mathbb{I}|k'\rangle = \sum_{k=1}^{n} |k\rangle\langle k|k'\rangle = \sum_{k=1}^{n} h_{kk'}|k\rangle = h_{1k'}|1\rangle + h_{2k'}|2\rangle + \ldots + h_{nk'}|n\rangle\,,$$

kde $h_{kk'} = \langle k|k'\rangle$. Pro koeficienty c'_k rozkladu vektoru $|\psi\rangle$ do báze $|k'\rangle$ můžeme psát

$$c'_k = \langle k'|\psi\rangle = \langle k'|\mathbb{I}|\psi\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle k'|k\rangle\langle k|\psi\rangle = \sum_{k=1}^{n} h_{k'k}c_k\,,$$

kde jsme trikově vložili identitu a rozepsali pomocí projektorů na bázové vektory $|k\rangle$. Obdobně pokud máme zadaný operátor $\widehat{A}$ v bázi $|k\rangle$, lze ho vyjádřit v čárkované bázi vektorů $|k'\rangle$

$$\begin{aligned} A'_{km} &= \langle k'|\widehat{A}|m'\rangle = \langle k'|\mathbb{I}\widehat{A}\mathbb{I}|m'\rangle = \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} \langle k'|k\rangle\langle k|\widehat{A}|m\rangle\langle m|m'\rangle = \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} h_{k'k}A_{km}h_{mm'}\,, \end{aligned}$$

kde $h_{k'k} = \langle k'|k\rangle$, $h_{mm'} = \langle m|m'\rangle = \langle m'|m\rangle^* = h^*_{m'm}$.

Takže pokud máme operátory a vektory určené v bázi $|k\rangle$ (tj. známe koeficienty rozkladu c_k u vektorů a maticové elementy A_{km} u operátorů) a známe koeficienty přechodu $h_{k'k}$ mezi bázemi $|k\rangle$ a $|k'\rangle$, lze tyto vektory a operátory vyjádřit v této nové čárkované bázi.

Zvolme teď za bázi vlastní vektory $|A_i\rangle$ nějakého operátoru $\widehat{A}$ (počítáme s tím, že jich je stejně jako je dimenze Hilbertova prostoru). Potom platí kouzelná formulka, která říká, že tento operátor lze vyjádřit ve tvaru

$$\widehat{A} = \sum_{i=1}^{n} A_i\widehat{P}_i = \sum_{i=1}^{n} A_i|A_i\rangle\langle A_i| = A_1|A_1\rangle\langle A_1| + \ldots + A_n|A_n\rangle\langle A_n|\,,$$

kde A_i jsou vlastní čísla operátoru $\widehat{A}$ příslušné vlastním vektorům $|A_i\rangle$. Lehko ukážeme, že zapůsobením na vlastní vektor tohoto operátoru $|A_k\rangle$ skutečně dostaneme opět tento vlastní vektor vynásobený vlastní hodnotou A_k.

$$\widehat{A}|A_k\rangle = \sum_{i=1}^{n} A_i|A_i\rangle\langle A_i|A_k\rangle = \sum_{i=1}^{n} A_i|A_i\rangle\delta_{ik} = A_k|A_k\rangle\,.$$

Speciálním typem operátorů, který nás bude v příštím díle eminentně zajímat, jsou tzv. *hermitovské* operátory. Mají totiž velmi důležité vlastnosti:

1. Jejich vlastní čísla jsou reálná.
2. Je jim jedno, jestli působí vlevo či vpravo, tj. jestli působí na bra či ket vektor. Přesněji to znamená platnost vztahu
$$\langle X|\widehat{A}|Y\rangle = \langle Y|\widehat{A}|X\rangle^* \,.$$
3. V konkrétní bázi mají tvar hermitovských matic, tudíž pro ně platí $A = A^\dagger$.

Podobně jako u matic lze zavést *inverzní* operátor $\widehat{A}^{-1}$, pro který platí $\widehat{A}\widehat{A}^{-1} = \widehat{A}^{-1}\widehat{A} = \mathbb{I}$. Velký význam mají také tzv. *unitární* operátory, pro které platí $\widehat{A}^\dagger = \widehat{A}^{-1}$, tedy $\widehat{A}\widehat{A}^\dagger = \widehat{A}^\dagger\widehat{A} = \mathbb{I}$.

Jednoduchý příklad – částice se spinem 1/2

Částice se spinem 1/2 (např. elektron) se může nacházet ve dvou stavech projekce spinu na osu z. Buď spin míří nahoru, pak se nachází ve stavu $|\uparrow\rangle$, či dolů, to je ve stavu $|\downarrow\rangle$[11]. Tyto dva stavy jsou na sebe kolmé, tj. $\langle\uparrow|\downarrow\rangle = 0$, přitom jsou normované $\langle\uparrow|\uparrow\rangle = \langle\downarrow|\downarrow\rangle = 1$. Tvoří tedy bázi dvoudimensionálního Hilbertova prostoru popisující právě částici se spinem 1/2. Ve své vlastní bázi mají tyto vektory tvar

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Libovolný vektor z tohoto prostoru lze rozložit do báze jako

$$|\psi\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Aby byl normovaný, musí navíc platit $\langle\psi|\psi\rangle = 1 \to a^2 + b^2 = 1$.

Na tomto prostoru lze definovat operátory spinu $\widehat{S}_1$, $\widehat{S}_2$ a $\widehat{S}_3$ (indexy 1, 2, 3 odpovídají osám x, y, z). V bázi vektorů $|\uparrow\rangle$ a $|\downarrow\rangle$ je můžeme vyjádřit pomocí matic 2×2, kde bude platit

$$S_i = \begin{pmatrix} \langle\uparrow|\widehat{S}_i|\uparrow\rangle & \langle\uparrow|\widehat{S}_i|\downarrow\rangle \\ \langle\downarrow|\widehat{S}_i|\uparrow\rangle & \langle\downarrow|\widehat{S}_i|\downarrow\rangle \end{pmatrix}, \qquad i = 1,\ 2,\ 3\,.$$

V této bázi mají operátory spinu až na násobek tvar Pauliho matic σ_i, tedy $S_i = \frac{1}{2}\sigma_i$

$$S_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

---

[11] Šipky nahoru a dolů zde používáme jen proto, že je to hezčí a názornější označení. Samozřejmě můžeme tyto dva vektory označit $|1\rangle$ a $|2\rangle$ v souladu s předcházejícím výkladem, ale je to jedno, jde o pouhé označení.

Úloha II . S ... *částice se spinem 1/2*

a) Napište, jak vypadá operátor identity na tomto prostoru v řeči vektorů $|\uparrow\rangle$ a $|\downarrow\rangle$.
b) Najděte vlastní vektory a vlastní čísla matic S_1, S_2 a S_3.
c) Máte zadány operátory $\widehat{S}_+$ a $\widehat{S}_-$ ve tvaru $\widehat{S}_+ = |\uparrow\rangle\langle\downarrow|$, $\widehat{S}_- = |\downarrow\rangle\langle\uparrow|$. Najděte jejich vyjádření v bázi vektorů $|\uparrow\rangle$ a $|\downarrow\rangle$ a určete, jak působí na obecný vektor $|\psi\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$. Jak vypadají vlastní vektory těchto operátorů a jaká jsou vlastní čísla?
d) Definujme vektory

$$|\otimes\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle\right) \qquad |\odot\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle\right) .$$

Ukažte, že tyto vektory tvoří bázi na našem Hilbertově prostoru a najděte vztah mezi koeficienty a, b v rozkladu $|\psi\rangle$ do původní báze a koeficienty c, d v rozkladu $|\psi\rangle = c|\otimes\rangle + d|\odot\rangle$ do nové báze.
e) Napište tvar operátorů spinu $\widehat{S}_1$, $\widehat{S}_2$ a $\widehat{S}_3$ v bázi vektorů $|\otimes\rangle$ a $|\odot\rangle$. Určete jejich vlastní čísla a vektory.

FYKOS
UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `http://fykos.mff.cuni.cz`
e-mail pro řešení: `fykos-solutions@mff.cuni.cz`
e-mail: `fykos@mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.