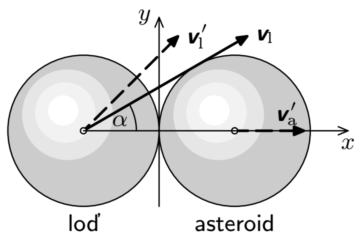
20. ročník, úloha I . 2 ... *srážka s asteroidem* *(4 body; průměr 2,80; řešilo 41 studentů)*

Určete, jaký úhel po srážce svírala trajektorie asteroidu a vědecké lodi. Před srážkou byl kulový asteroid v klidu a měl stejnou hmotnost jako loď. Uvažte, že loď chrání štíty, které mají kulový tvar. *Problém kulečníkových koulí se zalíbil Zuzce Safernové.*

Označme poloměr kulových štítů rakety a poloměr asteroidu r. Veličiny příslušející lodi budeme indexovat písmenem „l“ a veličiny příslušející asteroidu budeme indexovat písmenem „a“. Veličiny po střetnutí označujme čárkou. Volme pravoúhlou soustavu souřadnic s počátkem v místě styku těles při srážce. Osa x nechť je určena spojnicí středů těles. Osu y volme tak, aby vektor rychlosti rakety ležel v rovině xy. Složky vektoru rychlosti označme $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)$, přičemž $v_z = 0$ po celou dobu pohybu (neboť ve směru osy z nepůsobí žádné síly).



Obr. 1. Srážka lodě s asteroidem.

Protože loď je chráněna velmi pevnými štíty kulových tvarů, můžeme při malých rychlostech uvažovat dokonale pružnou srážku. První jednoduchý případ uvedeme bez důkazu; po čelní srážce zůstane loď v klidu a asteroid se bude pohybovat rychlostí $\boldsymbol{v}_\mathrm{l}$ (loď mu předá veškerou svou energii a hybnost). Nyní vyřešíme obecnou srážku.

Nejdříve vypočítáme úhlovou rychlost rotace lodi po srážce. Třecí síla mezi lodí a asteroidem jest $F_\mathrm{t} = fF_\mathrm{n}$ a velikost momentu síly působící na loď $M = fF_\mathrm{n}r$. Snadno sestavíme rovnici vyjadřující druhou impulzovou větu $\mathrm{d}L/\,\mathrm{d}t = M$

$$J\,\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\Delta p_x}{\Delta t}\,fr\,,$$

kde $\Delta\omega$ a Δp_x je změna úhlové rychlosti a x-ové složky hybnosti během srážky, která trvala dobu Δt. Pro homogenní kouli s momentem setrvačnosti $J = 2mr^2/5$ dostáváme změnu úhlové rychlosti

$$\Delta\omega = \frac{5}{2}\,\frac{f\Delta v_x}{r}\,.$$

Jelikož se loď před srážkou neotáčela, bude její úhlová rychlost po srážce $\omega'_\mathrm{l} = \Delta\omega$. Na asteroid působí síly stejné velikosti, avšak opačného směru. Jeho úhlová rychlost po srážce bude mít tedy stejnou velikost $\omega'_\mathrm{a} = \Delta\omega$, ale opačný směr. Rotační energie obou těles po srážce je vyjádřena vztahem

$$E'_\mathrm{r} = 2\cdot\tfrac{1}{2}J(\Delta\omega)^2 = \tfrac{5}{2}mf^2(\Delta v_x)^2\,.$$

Podle zákona zachování momentu hybnosti vzhledem k počátku soustavy souřadnic (místo styku těles při srážce) píšeme

$$mv_{\mathrm{l}y}r = -J\omega'_\mathrm{l} + J\omega'_\mathrm{a} + mv'_{\mathrm{l}y}r - mv'_{\mathrm{a}y}r \quad\Rightarrow\quad v_{\mathrm{l}y} = v'_{\mathrm{l}y} - v'_{\mathrm{a}y}\,.$$

Podle zákona zachování hybnosti platí $v_{\mathrm{l}x} = v'_{\mathrm{l}x} + v'_{\mathrm{a}x}$ a také $v_{\mathrm{l}y} = v'_{\mathrm{l}y} + v'_{\mathrm{a}y}$. Navíc ze zákona zachování energie po násobení faktorem $2/m$ plyne

$$v_{\mathrm{l}x}^2 + v_{\mathrm{l}y}^2 = \frac{2E_\mathrm{r}}{m} + v'^2_{\mathrm{l}x} + v'^2_{\mathrm{l}y} + v'^2_{\mathrm{a}x} + v'^2_{\mathrm{a}y}\,.$$

Úpravou těchto vztahů získáme

$$v'_{\mathrm{l}x} = \frac{5f^2}{2+5f^2}\,v_{\mathrm{l}x}\,,\quad v'_{\mathrm{l}y} = v_{\mathrm{l}y}\,,\qquad v'_{\mathrm{a}x} = \frac{2}{2+5f^2}\,v_{\mathrm{l}x}\,,\quad v'_{\mathrm{a}y} = 0\,,$$

pohyb ve směru osy y se tedy nezmění. Úhel mezi trajektoriemi po srážce je roven úhlu mezi vektory rychlosti po srážce, tj. vztahem

$$\operatorname{tg}\alpha' = \frac{v'_{1y}}{v'_{1x}} = \frac{2 + 5f^2}{5f^2}\,\operatorname{tg}\alpha\,,$$

kde α je úhel, který svíral vektor rychlosti lodi se spojnicí středů obou těles před srážkou.

Pokud rotaci těles neuvažujeme či je koeficient smykového tření f roven nule, je výsledek jednoduchý $\alpha' = 90°$.

Roman Derco
`roman.derco@gmail.com`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.