20. ročník, úloha III . 2 ... *přistání na Titanu* *(5 bodů; průměr 3,10; řešilo 20 studentů)*

V pátek 14. ledna 2005 na povrchu Titanu hladce přistála sonda Huygens, pojmenovaná po objeviteli Titanu. Mateřská sonda Cassini ji nesla k Saturnu 7 let. Jedná se dosud o nejvzdálenější přistání umělé sondy v dějinách.

Přistávací modul o čisté hmotnosti (bez paliva) m, vybavený reaktivním motorem, se vznášel v klidu nad povrchem měsíce (gravitační zrychlení je zde g). Měl k dispozici palivo o hmotnosti $M_0 - m$ a zásobu energie o velikosti E_0, kterou využíval k urychlování paliva (rychlost a množství paliva vypuzovaného z motoru lze libovolně měnit). Jaká je maximální doba, po kterou se sonda mohla vznášet v konstantní výšce? Poraďte řídícímu středisku, jakým způsobem by mělo naprogramovat rychlost a množství vypuzovaného paliva, aby této maximální doby dosáhli. *Úlohu vymyslel Marek Pechal.*

Označme okamžitou hmotnost paliva vypuzovaného z modulu za jednotku času jako μ, velikost jeho okamžité rychlosti pak v. Je-li v čase t hmotnost modulu i s palivem rovna M a modul se nehybně vznáší, je jeho hybnost nulová. V čase $t + \mathrm{d}t$ bude hybnost soustavy modul–palivo rovna $\mu v\,\mathrm{d}t$, protože během doby $\mathrm{d}t$ bylo vypuzeno palivo o hmotnosti $\mu\,\mathrm{d}t$ rychlostí v a modul je (podle předpokladů) stále nehybný. Změna hybnosti soustavy je tedy rovna $\mu v\,\mathrm{d}t$, to se však má podle Newtonova druhého pohybového zákona rovnat impulsu působící síly, tj. $Mg\,\mathrm{d}t$. Srovnáním pak dostaneme

$$\mu v = Mg\,.$$

Protože nás zajímá, jak se spotřebovává palivo a energie, bylo by vhodnější mít místo okamžité rychlosti paliva ve vzorci okamžitý výkon, tedy energii spotřebovávanou na jeho urychlování za jednotku času. Tu označme obvyklým způsobem jako P. Snadno nahlédneme, že platí $P = \frac{1}{2}\mu v^2$. Vyjádříme-li odtud v, pak dosazením do předchozí rovnice dostáváme

$$\sqrt{2P\mu} = Mg\,.$$

Pro dosažení maximální možné doby vznášení je nejvýhodnější, když modul spotřebuje veškerou zásobu paliva i energie. Pokud by totiž na konci procesu zbylo nějaké palivo a nezbyla žádná energie, mohli bychom vybrat nějaký časový interval v průběhu vznášení, v němž bychom poněkud zvýšili množství paliva vypouštěného za sekundu (avšak tak, aby stále ještě nějaké na konci zbylo). Potom bychom ovšem pro zachování konstantního tahu motoru museli během tohoto okamžiku o trochu snížit výkon P, a tak bychom uspořili energii, která by spolu se zbytkem paliva umožnila prodloužit dobu vznášení.

Jednou z možností, jak popsat průběh procesu, by tedy mohlo být udání závislosti množství zbylé energie na hmotnosti modulu (nebo naopak, to však v dalším postupu příliš nehraje roli), tedy určité funkce $E(M)$, pro kterou platí $E(M_0) = E_0$ a $E(m) = 0$ a která musí být zřejmě rostoucí. Dá se ze znalosti průběhu této funkce určit celková doba vznášení T? Vskutku ano, a to následujícím způsobem. Provedeme-li derivaci $E(M)$ podle času (časové derivace budeme značit tečkami), dostaneme pomocí pravidla o derivaci složené funkce $E'(M)\dot{M}$. Derivace zbylé energie podle času je však zřejmě rovna záporně vzatému P, stejně tak jako časová derivace hmotnosti modulu podle času je až na záporné znaménko rovna μ. Dostaneme tak rovnost $P = E'(M)\mu$. Dosazením do výše odvozené podmínky vznášení s ohledem na rovnost $\mu = -\dot{M}$ pak získáme

$$-\sqrt{2E'(M)}\,\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = Mg\,. \tag{1}$$

Metodou separace proměnných dostaneme pro dobu vznášení (v podstatě jen mechanicky osamostatníme $\mathrm{d}t$ a vložíme integrační znaménka na obě strany rovnosti)

$$-\int_{M_0}^{m} \frac{\sqrt{2E'(M)}}{Mg}\,\mathrm{d}M = \int_0^T \mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad T = \int_m^{M_0} \frac{\sqrt{2E'(M)}}{Mg}\,\mathrm{d}M\,.$$

Snažíme se tedy maximalizovat určitý integrál volbou vhodné funkce $E(M)$, splňující navíc jisté podmínky, které jsme již uvedli. Zřejmě můžeme při hledání extrému směle zahodit multiplikativní konstanty a hledat tak pouze maximum integrálu

$$\int_m^{M_0} \frac{\sqrt{E'(M)}}{M}\,\mathrm{d}M\,. \tag{2}$$

Úloha, kdy hledáme funkci, pro kterou nějaký integrální výraz nabývá extrémní hodnoty, je asi pro většinu z vás nanejvýš podezřelá. Na střední škole nic takového nepotkáte, ačkoliv jde o velmi užitečný typ úloh.[1] Vzhledem k nesmírné užitečnosti tohoto postupu mi snad ti, kdo jej znají třeba z Feynmanových přednášek, odpustí drobné opakování.

Takovéto úlohy se řeší v principu podobně jako hledání extrému funkce. To, že jsme našli extrém, zjistíme tak, že pokud se o kousek pohneme libovolným směrem, hodnota funkce se „více méně“ nezmění. My budeme s naší funkcí také malinko hýbat (variovat ji) přičítáním nějaké poměrně libovolně zvolené malé funkce a budeme sledovat, jak se mění hodnota integrálu.

Dosaďme tedy do našeho integrálu místo $E(M)$ součet $E(M) + \eta(M)$, kde $\eta(M)$ bude ona malá funkce. Dostaneme tak

$$\int_m^{M_0} \frac{\sqrt{E'(M) + \eta'(M)}}{M}\,\mathrm{d}M\,.$$

Protože funkci $f(x)$ můžeme v okolí zvoleného bodu x_0 poměrně dobře aproximovat výrazem $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ (je to jako nahradit graf funkce jeho tečnou v bodě x_0), dostaneme odtud pro $\sqrt{E'(M) + \eta'(M)}$ přibližný výraz $\sqrt{E'(M)} + \eta'(M)/2\sqrt{E'(M)}$.

Změna hodnoty integrálu způsobená přičtením naší malé funkce je tedy přibližně rovna

$$\int_m^{M_0} \frac{\eta'(M)}{2M\sqrt{E'(M)}}\,\mathrm{d}M\,.$$

Integrace per partes pak dává

$$\left[\frac{\eta(M)}{2M\sqrt{E'(M)}}\right]_m^{M_0} - \int_m^{M_0} \eta(M)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}M}\left(\frac{1}{2M\sqrt{E'(M)}}\right)\mathrm{d}M\,.$$

Všimněme si však, že hodnoty $E(M)$ jsou v bodech m a M_0 pevně dané a funkce $\eta(M)$ v nich tedy musí být nulová. To ovšem vynuluje první člen v tomto výrazu.

Hledáme-li extrém původně uvažovaného integrálu (2), musí být jeho změna jistým způsobem malá bez ohledu na volbu funkce $\eta(M)$. Není nic přímočařejšího, než zkusit, zda někdy

[1] Kdo někdy nechtěl vědět, proč ze všech křivek dané délky ohraničuje největší plochu právě kružnice?

tato změna (v přiblíženích, která jsme provedli) nebude dokonce nulová. Všímavější jistě zaregistrují, že se tak skutečně stane, pokud bude výraz pod integrálem v odvozeném vyjádření změny identicky nulový. Protože jsme však funkci $\eta(M)$ mohli zvolit tak, že sama není nulová nikde (samozřejmě kromě obou krajních bodů), musí být

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}M}\left(\frac{1}{2M\sqrt{E'(M)}}\right) = 0\,.$$

To už je obyčejná diferenciální rovnice, jejímž integrováním a úpravou dostaneme nejprve

$$\frac{1}{M^2C^2} = E'(M)$$

a následně pak

$$E(M) = A - \frac{1}{MC^2}\,.$$

Integrační konstanty A a C zvolíme tak, aby bylo $E(M_0) = E_0$ a $E(m) = 0$. Dostaneme pak hledanou funkci

$$E(M) = \frac{E_0M_0}{M_0 - m}\left(1 - \frac{m}{M}\right)\,, \tag{3}$$

$$E'(M) = \frac{E_0M_0m}{(M_0 - m)M^2}\,. \tag{4}$$

Nakonec vypočítáme závislost všech podstatných veličin na čase. Dosazením (4) do (1) a úpravou získáme

$$\dot{M} = -M^2g\sqrt{\frac{M_0 - m}{2E_0M_0m}}\,.$$

Tuto rovnici dořešíme separací proměnných

$$\frac{1}{M(t)} = \frac{1}{M_0} + tg\sqrt{\frac{M_0 - m}{2E_0M_0m}}\,. \tag{5}$$

Odtud také můžeme dostat dobu T položením $M = m$.

$$T = \frac{1}{g}\sqrt{\frac{2E_0(M_0 - m)}{M_0m}}\,. \tag{6}$$

Dosazením (5) do (3) získáme

$$E(t) = E_0 - tg\sqrt{\frac{mM_0E_0}{2(M_0 - m)}}\,.$$

Zderivováním podle času najdeme vztah pro veličiny P a μ.

$$P(t) = \frac{E_0}{T}\,, \qquad \mu(t) = \frac{Tg^2M_0^2}{2E_0}\frac{1}{(1 + tTg^2M_0/2E_0)^2}\,. \tag{7}$$

Využitím vztahu $P = \frac{1}{2}\mu v^2$ dostaneme

$$v(t) = \frac{2E_0}{TgM_0} + gt\,. \tag{8}$$

Vztahy (5) až (8) dávají všechny podstatné informace o ideálním průběhu vznášení modulu, které jsme hledali.

Jistě jste si všimli, že jsme nedokazovali, že pro nalezenou funkci uvažovaný integrál (tedy doba vznášení) nabývá skutečně maximální hodnoty. Intuitivně můžeme tento názor podepřít faktem, že hodnota integrálu (2) je shora omezená[2], a tedy by měl být jediný nalezený extrém maximem. Matematicky zcela správný důkaz by byl pravděpodobně docela zdlouhavý. Tento problém ve svém originálním řešení (založeném ovšem na poněkud odlišném principu, než jaký zde byl popsán) velice hezky vyřešil *Tomáš Tintěra.*

Marek Pechal
`marek@fykos.mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

[2] Užijeme Cauchyho-Schwarzovy nerovnosti, podle níž platí

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

tedy v našem případě

$$\left(\int_m^{M_0} \frac{\sqrt{E'(M)}}{M}\,\mathrm{d}M\right)^2 \le \int_m^{M_0} E'(M)\,\mathrm{d}M \cdot \int_m^{M_0} \frac{1}{M^2}\,\mathrm{d}M = E_0\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{M_0}\right)\,.$$