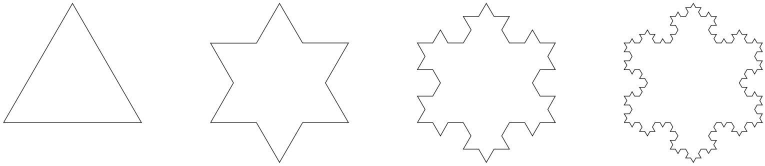
20. ročník, úloha IV . 4 ... *Kochova vločka* *(5 bodů; průměr 2,28; řešilo 18 studentů)*

Určete moment setrvačnosti Kochovy vločky zhotovené z homogenního plechu vzhledem k ose kolmé na její rovinu a procházející jejím středem. Uvažujte, že vločka má hmotnost m a průměr a.

Kochova vločka je útvar vzniklý iterativním lepením vždy třikrát menších rovnostranných trojúhelníků na strany předchozího útvaru (viz obr. 1). Průměrem Kochovy vločky rozumíme vzdálenost vrcholů jejích protějších cípů.



Obr. 1. První čtyři iterace při vytváření Kochovy vločky.

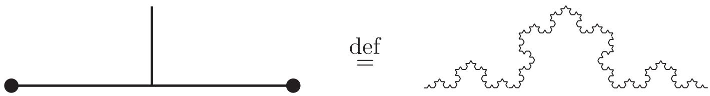
Prvním možným přístupem k problému určení momentu setrvačnosti je přímé využití jeho definice pomocí integrálu. V případě Kochovy vločky K by však výpočet příslušného integrálu

$$I = \int_K r^2 \varrho \, \mathrm{d}V$$

byl zřejmě velmi obtížný. K něčemu nám však toto vyjádření momentu setrvačnosti přece jen pomůže. Lze z něj totiž jednoduše odvodit, že změníme-li všechny rozměry plošného objektu k-krát (při zachování polohy osy a hodnoty plošné hustoty), změní se hmotnost každého elementu $\mathrm{d}V$ k^2-krát a příslušná vzdálenost r od osy k-krát. Moment setrvačnosti se tedy změní k^4-krát. Tuto skutečnost později využijeme.

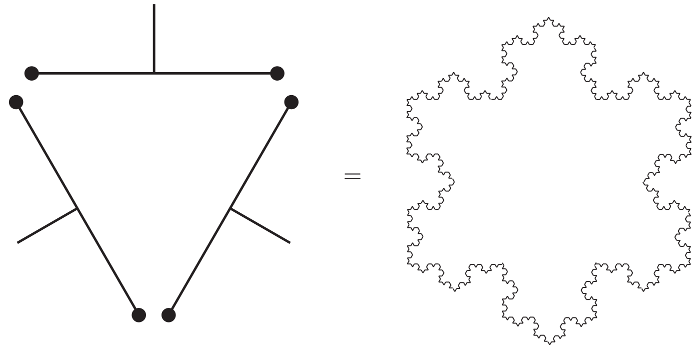
Nevede-li k cíli přímé použití definice, je užitečné prostudovat případné symetrie či jiné pravidelnosti. Nejcharakterističtější vlastností Kochovy vločky (a obecně všech fraktálů) je její soběpodobnost. Co to konkrétně znamená? Podíváme-li se na jednu ze „stran“ Kochovy vločky (kterou budeme dále pro jednoduchost nazývat Kochovou křivkou), snadno nahlédneme, že se skládá ze čtyř na sebe napojených třikrát menších Kochových křivek.

Zaveďme si pro Kochovu křivku zjednodušenou grafickou značku[1]

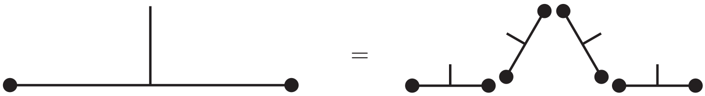


[1] Schémata použitá v tomto textu v zájmu názornosti neobsahují popisky délek a úhlů. Zjednodušeně řečeno však platí, že to, co vypadá jako úhel 30°, 60°, resp. 120°, jím také skutečně je.

Potom můžeme například celou Kochovu vločku znázornit takto

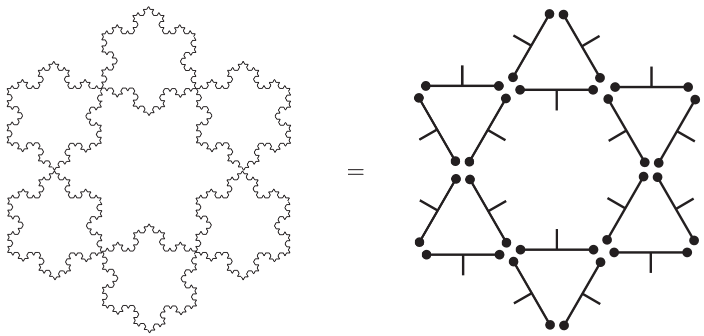


Zmíněnou soběpodobnost Kochovy křivky vyjadřuje následující „rovnost“

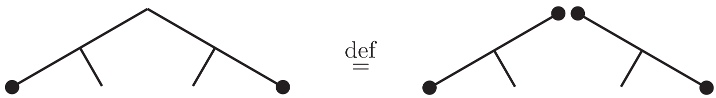


Důležité je, že Kochova křivka je jedinou omezenou křivkou, která vykazuje právě popsanou soběpodobnost. Tento fakt ponecháme bez důkazu. Zájemcům můžeme prozradit, že k němu lze použít tzv. Banachovu větu o kontrakci (někdy též zvanou Banachova věta o pevném bodě).

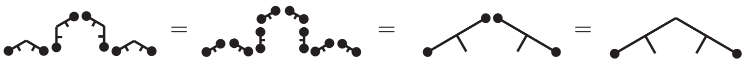
To však ještě stále není to, co bychom chtěli, protože jde o soběpodobnost křivky ohraničující Kochovu vločku. My se však zajímáme o samotnou plochu. Hodilo by se tedy nalézt soběpodobnost Kochovy vločky s některými jejími částmi. Zřejmě je rozumné soustředit se na šest cípů vločky. Každý z nich je totiž ze dvou stran ohraničen Kochovou křivkou. Pokud si podobně dokreslíme i třetí strany, dostaneme



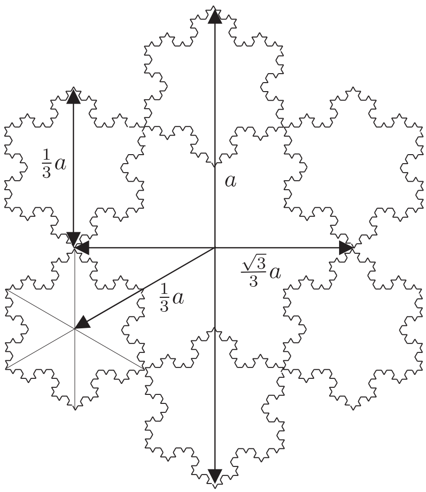
Situace začíná vypadat slibně. Kochova vločka se skládá z šesti třikrát menších vloček a jistého „zbytku“, který taktéž velmi silně připomíná vločku. Jak ale dokážeme, že zbylá vnitřní oblast je skutečně také Kochovou vločkou? K tomu by zřejmě stačilo ukázat, že každá dvojice sousedních stran oblasti tvoří dohromady Kochovu křivku. Zaveďme si pro tyto dvojice schématické označení



Jednoduše lze ukázat, že takto napojená dvojice Kochových křivek vykazuje přesně stejnou soběpodobnost jako samotná Kochova křivka. Postup důkazu znázorňuje následující série rovností



První z nich je jednoduše rozepsáním každé značky pro dvojici křivek na dvě značky pro jednotlivé křivky. Druhá plyne ze soběpodobnosti Kochovy křivky (viz obrázek výše) a třetí opět vyjadřuje pouze přechod k symbolu pro dvojici křivek. Jelikož však, jak bylo uvedeno výše, je jedinou omezenou křivkou s touto soběpodobností právě Kochova křivka, musí s ní být skutečně každá dvojice stran uvažované oblasti totožná.



Obr. 2. Geometrie Kochovy vločky.

Tím jsme korektně[2] dokázali něco, co je každému člověku „jasné z obrázku“, totiž že zbytek po odříznutí Kochových vloček představujících cípy původní vločky je také Kochovou vločkou.

Od vyřešení úlohy nás už dělí jen trocha elementární geometrie (viz obr. 2) a několik jednoduchých úvah. Využijeme skutečnost, že moment setrvačnosti dvourozměrného objektu o dané plošné hustotě roste se čtvrtou mocninou jeho charakteristického rozměru (v našem případě průměru vločky). Je-li moment setrvačnosti Kochovy vločky o průměru a (vzhledem k ose o procházející středem) roven I, pak je moment setrvačnosti vnitřní oblasti vzhledem k téže ose roven $I/9$. Moment setrvačnosti každého z cípů vůči ose procházející jeho vlastním středem je $I/81$ a vzhledem k ose o pak podle Steinerovy věty $I/81 + ma^2/81$ (hmotnost cípu je $m/9$). Celkový moment setrvačnosti I ale musí být roven součtu jednotlivých dílčích momentů, tj.

$$I = \tfrac{1}{9}I + 6\left(\tfrac{1}{81}I + \tfrac{1}{81}ma^2\right) .$$

Odtud pak již snadno vyjádříme výsledek $I = \frac{1}{11}ma^2$.

Marek Pechal
marek@fykos.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

[2] I když šlo pouze o hraní s obrázky, daly by se popsané úvahy snadno zformulovat do „skutečného“ matematického důkazu. Jediným slabým místem je právě již zmíněná otázka jednoznačnosti křivky s uvedenou soběpodobností, jejíž důkaz jsme vynechali.