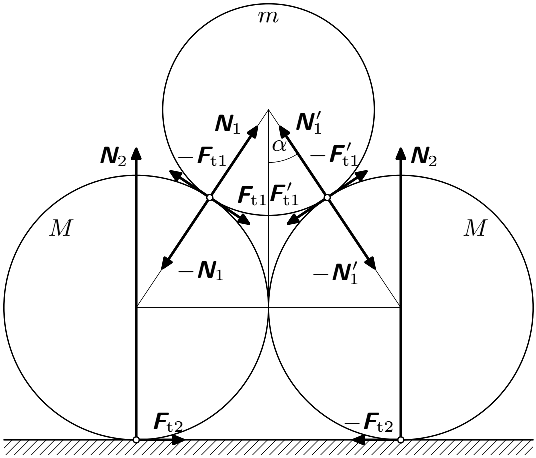
20. ročník, úloha VI . 1 ... *tři válce děda vševěda* *(4 body; průměr 1,90; řešilo 21 studentů)*

Zjistěte, za jakých podmínek bude soustava tří válců na obrázku 1 v klidu a nerozkutálí se. Hustota materiálu válců je ϱ, spodní válce mají poloměr R, horní válec má poloměr r. Součinitel tření je mezi všemi povrchy stejný.

Zadal Honza Prachař, aby prověřil vaše znalosti ze statiky soustav tuhých těles.



Obr. 1. Geometrie úlohy a síly působící na válce.

Jaké síly na válce působí? Tíhová síla působí na každý válec, dále na sebe navzájem působí válce normálovými a třecími silami a konečně na válce působí podložka (viz obr. 1, pro lepší přehlednost síly tíhové nejsou zakresleny). Těsně před rozkutálením na sebe spodní válce vůbec působit nebudou. Ze symetrie úlohy plyne $|\boldsymbol{N}_1| = |\boldsymbol{N}_1'| \equiv N_1$ a $|\boldsymbol{F}_{t1}| = |\boldsymbol{F}_{t2}'| \equiv F_{t1}$. Věty momentové vzhledem k osám válců dávají

$$F_{t1} = F_{t2} \equiv F_t \,.$$

Postupujme přímočaře a pro každý válec napišme rovnováhu sil

$$mg = 2N_1 \cos\alpha + 2F_t \sin\alpha \,, \tag{1}$$

$$Mg + N_1 \cos\alpha + F_t \sin\alpha = N_2 \,, \tag{2}$$

$$F_t + F_t \cos\alpha = N_1 \sin\alpha \,, \tag{3}$$

kde m je hmotnost válce horního a M značí hmotnost válců spodních.

Nemají-li válce po sobě sklouznouti, zároveň musí platit

$$F_t \le fN_1 = \frac{fmg}{2\cos\alpha} - fF_t \operatorname{tg}\alpha \,,$$

$$F_t \le fN_2 = f\left(Mg + \tfrac{1}{2}mg\right) \,,$$

kde jsme využili rovnic (1) a (2). Dosadivše za F_t z poslední nevyužité rovnice (3), podle které

$$F_t(1 + \cos\alpha) = N_1 \sin\alpha = \tfrac{1}{2}mg \operatorname{tg}\alpha - F_t \operatorname{tg}\alpha \sin\alpha \quad \Rightarrow \quad F_t = \frac{mg \sin\alpha}{2(1 + \cos\alpha)} \,,$$

podmínky pro součinitel tření získají tvar (zde je potřeba provést několik úprav, ty necháváme na vás)

$$
\begin{aligned}
f &\geq \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right), \\
f &\geq \frac{m}{2M+m}\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{m}{2M+m}\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Koukajíce na tyto podmínky, hned pochopíme, že při splnění prvé nerovnosti je automaticky splněna i druhá. Pročež se zabývejme jen tou první.

Geometrie úlohy říká $\sin\alpha = R/(R+r)$, proto obdržíme

$$
\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{\frac{R}{R+r}}{1+\sqrt{1-\left(\frac{R}{R+r}\right)^2}} = \frac{R}{R+r+\sqrt{2Rr+r^2}} = 1+\frac{r}{R}-\sqrt{\frac{2r}{R}+\left(\frac{r}{R}\right)^2}.
$$

Hledaná podmínka tudíž zní

$$
f \geq 1+\frac{r}{R}-\sqrt{\frac{2r}{R}+\left(\frac{r}{R}\right)^2}.
$$

Na závěr si dovolíme krátkou diskusi. Pravou stranu předchozí nerovnosti označíme f_0.

a) Je-li $r \ll R$, můžeme zanedbat r/R vzhledem k 1 a dostaneme

$$
f_0 \approx 1-\sqrt{\frac{2r}{R}}.
$$

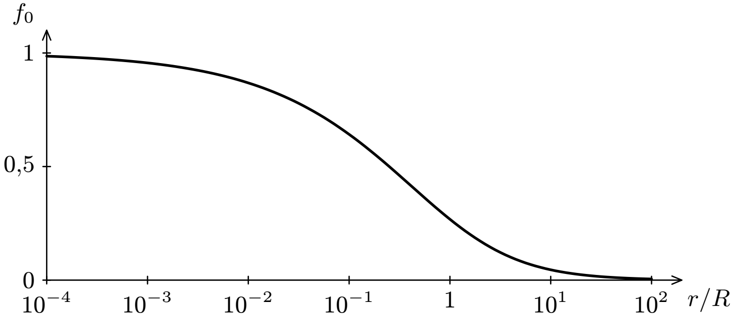
b) Je-li $r = R$, vychází

$$
f_0 = 2-\sqrt{3} \doteq 0{,}268.
$$

c) Je-li $r \gg R$, rozvineme odmocninu do druhého řádu

$$
f_0 = 1+\frac{r}{R}-\frac{r}{R}\sqrt{1+\frac{2R}{r}} \approx 1+\frac{r}{R}-\frac{r}{R}\left(1+\frac{R}{r}-\frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2\right) = \frac{R}{2r}.
$$

Zjišťujeme, že mezní hodnota f_0 součinitele tření s rostoucím poměrem r/R klesá. To zní logicky – horní válec maje malinký poloměr, zapadne hluboko do škvíry mezi spodními válci a bude je od sebe odtlačovat, naopak horní válec s velikým poloměrem bude na spodní válce tlačit spíše jen z vrchu. Graf závislosti $f_0(r/R)$ jsme pro vaše potěšení vynesli v obrázku 2.



Obr. 2. Závislost f_0 na poměru r/R.

Doufal jsem, že nám ukážete, že víte jak na to. Ale zklamal jsem se, neb dorazila pouze tři bezezbytku správná řešení (*Dalimil Mazáč*, *Martin Výška* a *Hanka Šírová*). Je mrzuté, že jen výjimečný gymnazista umí vyřešit úlohu o statice, což patří k úplně prvním a nejjednodušším věcem vyučovaným ve fyzice.

Honza Prachař
`honzik@fykos.mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.