

21. ročník, úloha III. 1 ... Angličani a Skoti (3 body; průměr 1,62; řešilo 42 studentů)

Předmětem této úlohy je, abyste odhadli, jak by se změnila rychlost rotace Země, kdyby Angličani a Skoti začali jezdit vpravo místo vlevo. Úlohu zaslechl Aleš Podobník.

Mohlo by se zdát, že to, jestli Angličani a Skoti jezdí vpravo nebo vlevo, rotaci Země vůbec neovlivní. Vždyť pokud předpokládáme, že na každé silnici jezdí auta oběma směry ve stejném počtu, musí se tyto vlivy vyrušit. Podrobnější rozbor však ukazuje opak. Žijeme totiž na velké rotující kouli, nestačí proto počítat hybnosti aut (celková hybnost je skutečně průměrně nulová, pokud lidé nemigrují), nýbrž momenty hybnosti.

Příčina změny tkví v tom, že mezi protijedoucími auty je jistá vzdálenost, označme ji d . Uvažujme tedy dvě protijedoucí auta o hmotnosti m jedoucí rychlostí o velikosti v v západovýchodním směru. Jejich celkový moment hybnosti ΔL vzhledem k zemské ose je (viz obr. 1)

$$\Delta L = mv(r_1 - r_2) = mvR(\cos(\varphi + \Delta\varphi) - \cos\varphi),$$

kde R je poloměr Země, φ je zeměpisná šířka a pro $\Delta\varphi$ platí d/R . Pro kosinus uijeme součtový vzorec a přibližné vztahy $\sin\Delta\varphi \approx \Delta\varphi$, $\cos\Delta\varphi \approx 1$ (platící pro malé $\Delta\varphi$, v našem případě $\Delta\varphi \approx 10^{-6}$)

$$\begin{aligned} \Delta L &= mvR(\cos\varphi \cos\Delta\varphi - \sin\varphi \sin\Delta\varphi - \cos\varphi) \approx mvR(\cos\varphi - \sin\varphi\Delta\varphi - \cos\varphi) = \\ &= -mvR \sin\varphi\Delta\varphi. \end{aligned}$$

Pokud začnou obyvatelé Spojeného království jezdit vpravo (formální záměna $v \rightarrow -v$), změní se moment hybnosti zobrazené dvojice aut o

$$-2\Delta L = 2mvR \sin\varphi\Delta\varphi.$$

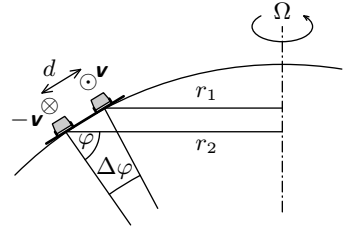
Změnu momentu hybnosti všech aut pohybujících se v daném okamžiku po silnicích Spojeného království, určíme sečtením odvozeného příspěvku pro všechny dvojice aut. Nechť se v průměru po silnicích pohybuje N aut, v každém směru $N/2$, pak celková změna momentu hybnosti bude

$$\Delta L_{\text{celk}} \sim NmvR \sin\varphi\Delta\varphi.$$

Jistě jste si všimli, že jsme nebrali v úvahu fakt, že ne všechny silnice směřují podél rovnoběžek. Pokud bychom odklon silnice od západovýchodního směru označili α a předpokládali, že silniční síť je dostatečně hustá, a tedy více méně náhodná, museli bychom počítat přes všechny různé směry α , což by vedlo na nějaký číselný faktor v předchozím vztahu¹. Ten však zanedbáme, jelikož si ve výsledku neděláme ambice vyšší než na řádový odhad.

Celkový moment hybnosti Země včetně všeho, co se nachází na jejím povrchu, se zachovává (neuvažujeme slapové působení Slunce a Měsíce). Změna momentu hybnosti zeměkoule tedy je $\Delta L_Z = -\Delta L_{\text{celk}}$. Moment hybnosti zeměkoule můžeme vyjádřit pomocí její úhlové rychlosti $L_Z = J\Omega$, kde $J \approx 2MR^2/5$ je moment setrvačnosti, M je hmotnost Země. Tedy

¹ Konkrétně bychom dostali střední hodnotu $\sin^2\alpha$ čili 1/2.



Obr. 1. Výpočet momentu hybnosti aut na silnici

$\Delta L_Z = J\Delta\Omega$. Nyní již můžeme vyjádřit změnu úhlové rychlosti rotace Země způsobené novými pravidly silničního provozu

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta L_Z}{J} \sim -\frac{5NmvR \sin \varphi \Delta\varphi}{2MR^2}.$$

Názornější bude znát změnu délky dne $T = 2\pi/\Omega$. Ze vztahu $\Delta T/T = \Delta\Omega/\Omega$ dostáváme

$$\Delta T = \Delta\Omega \frac{T}{\Omega} = \frac{T^2}{2\pi} \Delta\Omega \sim -\frac{5T^2 Nmv \sin \varphi \Delta\varphi}{4\pi MR} \sim -\frac{T^2 Nmv d}{3MR^2}.$$

Zbývá dosadit číselné hodnoty: $T = 1 \text{ den} \sim 9 \cdot 10^4 \text{ s}$, $N \sim 10^7$, $m \sim 10^3 \text{ kg}$, $v \sim 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, $R \sim 6 \cdot 10^6 \text{ m}$, $\varphi \sim 50^\circ$, $d \sim 10 \text{ m}$, $M \sim 10^{25} \text{ kg}$ a získáme výsledek

$$\Delta T \sim -10^{-17} \text{ s}.$$

Rychlost rotace Země by se zpomalila řádově o sekundu za jednu miliardu let. Jak se dalo očekávat, směšně malá hodnota, žádným způsobem změřitelná, dá-li se vůbec mluvit o nějaké změně.

Došlá řešení

Malá statistika: mezi řešiteli této úlohy se 16 domnívalo, že se rychlost rotace změní, 21 bylo přesvědčeno, že ne. Jako chybný důvod pro změnu rotace někteří uváděli Coriolisovu sílu, její celkový účinek je však nulový. Jediné *Katka Honzáková* a *Tereza Steinhartová* se pokusily o nějaký odhad a dospěly k hodnotě $\Delta T \sim -10^{-12} \text{ s}$, resp. $\Delta T \sim -10^{-16} \text{ s}$. Ostatní ať už správně či špatně argumentovali, proč ke změně rotace dojde či nedojde.

Lukáš Ledvina napsal, že ke změně rotace dojde, protože by Angličani nebyli na změnu jízdy zvyklí, a tak by se vyskytlo více dopravních nehod a zemřeli by při následném pohřbívání snížili těžiště Velké Británie a tímto by se zrychlila rotace Země. Pokud by však většina Britů byla zpopelněna, potom by se nejspíše celkové těžiště zvýšilo. Nebožtíci by pak způsobili zpomalení rotace.

Lada Peksová správně poznamenala, že jelikož je Velká Británie ostrov, tak nemohou Angličané ani Skoti jezdit jen na západ nebo jen na východ, přesněji řečeno mohou, ale jen krátce, protože jinak by došlo k Cimrmanovu efektu. Nehromadili by se dělníci v dole, ale Skoti na východě a Angličani na západě (vzhledem ke vzájemné nesnášenlivosti by nejspíše byli na opačných stranách).

Ján Bogár byl přesvědčen, že jediný efekt by byl, že by nastal takový chaos, až by veškerá doprava ležela v příkopu. A přiznal, že je ještě jedna možnost. Když by pán Bůh zjistil, že Angličani konečně dostali dost rozumu na to, aby začali jezdit jako normální lidi, možná by nám daroval delší dny.

Ján Bogár nás také potěšil vtípem. Volá Lord na svého sluhu: „Jamesi, co je to za hluk v knihovně?“ „Jsou tam zloději, pane.“ „Ano? A co tam čtou?“

Stejně jako *Zuzana Bogárová*. Víte, proč se Skoti nežení? Protože sukně a dudy mají vlastní.

Hana Šustková glosovala, že kvůli globálnímu oteplování možná nastane změna společenského oděvu. Budeme nosit kilt, po vzoru Skotů.

A *Veronika Paštyková* se zamýšlela nad tím, co Angličany a Skoty vedlo k tomu, že začali jezdit vpravo.

Bylo parné léto, v celé Anglii bylo sucho jako na Sahaře a Malcolm McDonald konečně úspěšně dokončil první ročník studia na Oxfordu. A protože Londýna měl už plné zuby, sbalil dudy, pár drobáků, co ještě měl, stopnul nákladák a vyrazil domů do Skotska.

Hlavní trasa z Oxfordu byla úplně přeplněná automobily, motocykly a dalšími téměř neidentifikovatelnými vozidly, a tak cesta ubíhala pomalu. Drobné praskliny na vozovce k rychlosti cesty nijak nepřispěly, a tak když asi po necelé půlhodině plynulé jízdy uvízli zase v dopravní zácpě a vypadalo to, že zde stráví mládí, Malcolm vystoupil z auta a šel se projít. To však neměl dělat!

Při vystupování z auta se stala naprosto děsivá událost. Malcolmovi vypadl z kapsy čtvrták a zakutálel se do jedné z drobných prasklin ve vozovce. A Malcolm nebyl jediný, kdo si toho všiml. Hordy Skotů se hrnuly k prasklině, aby jmění v ní ukryté bylo jejich.

Tak se stalo, že z malé praskliny vznikly praskliny gigantických rozměrů, i Grand Canyon je proti nim směšná jamka. Ovšem náhoda způsobila, že praskliny vznikly pouze po jedné straně obou šestiproudých silnic, jichž Angličané využívají jako hlavních tahů při letních vedrech, kdy cestují za trochou chladna do Skotska.

A protože v té době většina lidí cestuje stejným směrem jako Malcolm a praskliny byly po celé levé straně vozovky, usnesla se vláda Spojeného království, že se bude jezdit vpravo.

Skotové však pokračovali v hledání čtvrtáku. Nejhlouběji se dostali tři skotští kopáči, a jeden opravdu nezměrně toužící po pokladu neskonale hodnoty se zastavil teprve, když se mu krumpáč začal tavit v zemském jádře. A každý si dokáže domyslet, co může takový krumpáč v zemském jádře provést. Rotace Země byla tímto ukvapeným činem narušena a od té doby se Země točí kolem své osy mnohem pomaleji.

Honza Prachař

honzik@fykos.mff.cuni.cz