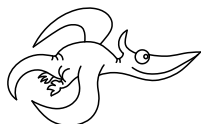


**Milí řešitelé FYKOSu!**

Máte v rukou poslední sérii, tedy poslední možnost, jak si ve výsledkové listině ještě trochu (ale i výrazně) polepšit (nebo se naopak nechat někým předběhnout :-)). Úlohy jsme pečlivě vybírali, snad vás zvědavost podnítl se do nich pustit. Opravená řešení dostanete společně s řešením 5. série a závěrečnou výsledkovou listinou během června.

Přejeme vám hodně úspěchů v závěrečném období školního roku.

**Organizátoři**

**Zadání VI. série**

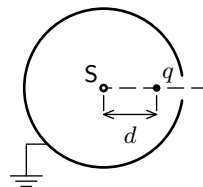
**Termín odeslání: 11. května 2008**

**Úloha VI.1 ... odpor je marný**

Vypočítejte odpor  $n$ -rozměrné krychle mezi dvěma nejvzdálenějšími vrcholy (ty o souřadnicích  $(0, 0, \dots, 0)$  a  $(1, 1, \dots, 1)$ ). Zkuste začít od trojrozměrné a použijte stejný postup.

**Úloha VI.2 ... útěk z koule**

V uzemněné kouli z vodivého materiálu je vyvrtán malý otvor, tak akorát, že ním projde malá nabitá částice. Umístíme ji do vzdálenosti  $d$  od středu koule na spojnici jejího středu a otvoru (viz obrázek 1). Náboj pustíme. Jak daleko z koule vyletí ven? Zkuste využít metodu zrcadlového potenciálu.



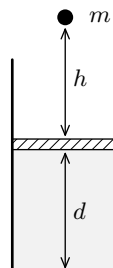
Obr. 1. Koule s částicí

**Úloha VI.3 ... relativistická koule**

Při pohybu rychlostí srovnatelnou s rychlostí světla dochází ke kontrakci délek, ale zároveň se nám předmět zdá delší než ve skutečnosti je (zkuste sledovat paprsky světla vyslané z bližšího a vzdálenějšího konce tělesa). Vypočítejte, jestli se u relativistické koule tyto efekty nevyruší.

**Úloha VI.4 ... kámen na pístu**

Marek má píst o rozměru  $S$  s ideálním plynem v rovnovážném stavu ( $p, V$  a  $T$ ). Na tento píst z výšky  $h$  pustí kámen o hmotnosti  $m$  (viz obr. 2). Píst se stlačí a opět vrátí do nějaké polohy zpět. Jak závisí tato poloha na hmotnosti kamene a výšce, ze které byl upuštěn? Je možné, že se píst ustálí ve vyšší poloze než byl prve? Jak se změní teplota plynu v pístu?



Obr. 2. Píst před dopadem kamene

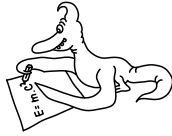
**Úloha VI.P ... lidští ptáci**

Titan – družice Saturnu – je mrazivý svět (povrchová teplota asi 94 K) s mohutnou dusíkovou atmosférou, s ledovým povrchem a uhlovodíkovými jezery. Poloměr Titanu je 5150 km, hmotnost je  $1/45$  hmotnosti Země, tloušťka jeho atmosféry je 200 km a tlak na jeho povrchu je 1,5 atmosféry.

Na základě předložených údajů určete gravitační zrychlení na povrchu a odhadněte hustotu atmosféry. Srovnáním s parametry ptáků v pozemských podmínkách rozhodněte, zda by opeřený člověk mohl na Titanu létat.

## Úloha VI. E ... vratné lahve

Kupte si standardní skleněnou lahev od piva nebo minerálky a změřte, jak závisí výška tónu vydaného po fouknutí na hrdlo na výšce vodní hladiny v lahvi.



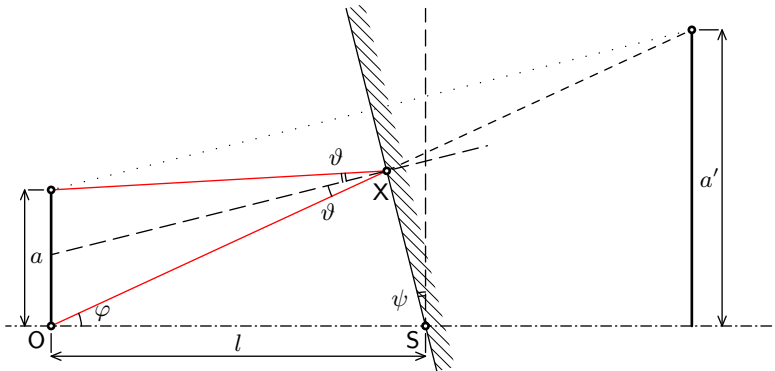
## Řešení IV. série

## Úloha IV. 1 ... kyklopovo zrcadlo (4 body; průměr 1,50; řešilo 12 studentů)

Zkuste vypočítat, jaký tvar by mělo mít zrcadlo, tak, aby se v něm kyklopova hlava jevila jako čtverec. Kyklop má hlavu ve tvaru koule s okem uprostřed.

Při pohledu do zrcadla uviděl Mára.

Chceme-li zobrazit kouli na čtverec, musíme každý okrajový bod (o konstantní vzdálenosti od optické osy) promítnout do proměnné vzdálenosti – na obvod čtverce.



Obr. 3. Schéma situace

Označme  $a$  velikost vzoru, v tomto případě poloměr kyklopovy hlavy,  $a'$  velikost obrazu a  $l$  vzdálenost kyklopa od zrcadla, viz obrázek 3.

Naopak z obrázku 4, který zobrazuje celou situaci zepředu, získáme snadno rovnost

$$\cos \alpha = \frac{a}{a'} . \quad (1)$$

Budeme předpokládat, že kyklop stojí daleko od zrcadla, a proto lze úhly  $\varphi$ ,  $\vartheta$  a  $\psi$  považovat za malé. Z trojúhelníku OXS (opět obrázek 3) každý snadno nahlédne, že platí

$$\varphi = \psi + \vartheta . \quad (2)$$

Obr. 4. Rozdělení zrcadla

S užitím přibližných vzorců pro sinus a kosinus malých úhlů a protože  $l \gg a$ , můžeme napsat přibližné rovnosti

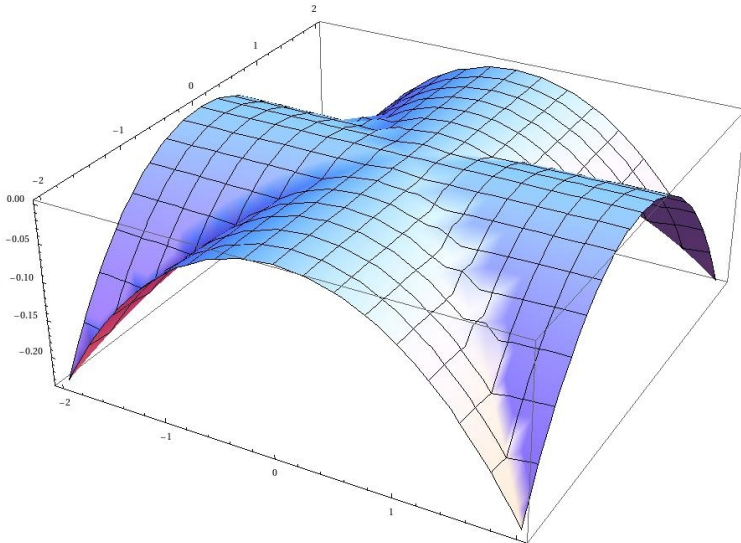
$$a \approx 2l\vartheta , \quad (3)$$

$$a' \approx 2l\varphi . \quad (4)$$

Dosazením (3) a (4) do (2) a použitím identity (1) pak pro jednotlivé úhly dostáváme

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{a' - a}{2l} = \frac{a}{2l} \left( \frac{1}{\cos \alpha} - 1 \right), \\ \vartheta &= \frac{a}{2l}, \\ \varphi &= \frac{a}{2l \cos \alpha}.\end{aligned}\quad (5)$$

Je vidět, že pokud bude kyklop dostatečně daleko od zrcadla vzhledem k rozměru své hlavy, tak byly aproximace správné, protože úhly  $\psi$ ,  $\vartheta$ ,  $\varphi$  vyjdou malé.



Obr. 5. Tvar kyklopora zrcadla

Víme, že  $\operatorname{tg} \psi$  je roven derivaci deviace zrcadla od roviny. Tedy označíme-li  $\Delta(r, \alpha)$  funkci popisující tvar zrcadla, platí pro radiální souřadnici

$$r = l\varphi.$$

Dosazením tohoto výrazu do (5) získáme

$$\frac{\partial \Delta(r, \alpha)}{\partial r} = \psi = \frac{r}{l} (1 - \cos \alpha),$$

odkud integrováním plyne

$$\Delta(r, \alpha) = \frac{r^2}{2l} (1 - \cos \alpha).$$

Podle toho, jak jsme definovali úhel  $\alpha$ , můžeme za něj dosazovat pouze hodnoty z intervalu  $[-\pi/4, \pi/4]$ . Celkový tvar zrcadla získáme použitím rotačních symetrií.

Zrcadlo si lze představit jako strop křížení dvou románských chodeb, kde odrazivá plocha je nanesena shora. Výsledný tvar zrcadla je na obrázku 5.

*Lukáš Ledvína*

lukasl@fykos.mff.cuni.cz

#### Úloha IV.2 ... na tenkém ledě (3 body; průměr 1,80; řešilo 30 studentů)

*Je známo, že led vystavený většímu tlaku snižuje svou teplotu tání. Funguje tento jev při bruslení (tedy je tlak brusle dostatečný, aby se led rozpustil i při nízkých teplotách)? Pokud ne, co jiného zaručuje hladký skluz? Při návštěvě kluziště si počítal Dan.*

Nejprve se pokusme odpovědět na první otázku, tedy jestli tzv. regelace ledu souvisí s hladkým skluzem při bruslení. U ledu se v praxi projevuje tak, že na každou přidanou atmosféru klesne teplota tání o  $0,0072\text{ }^\circ\text{C}$ . Tedy na snížení teploty tání o pouhý  $1\text{ }^\circ\text{C}$  potřebujeme vyvolat tlak  $139\text{ atm}$ , což je přibližně  $14\text{ MPa}$ . Otázkou zůstává jaký tlak vyvolá bruslař jedoucí po ledu na jedné brusli. Ze základního definičního vztahu

$$p = \frac{F}{S},$$

kde za sílu přitlačnou považujeme tíhovou sílu, dostaneme po dosazení běžných hodnot  $m = 80\text{ kg}$ ,  $g = 10\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ ,  $S = 6 \cdot 10^{-4}\text{ m}^2$  tlak  $1,33\text{ MPa}$  ( $13\text{ atm}$ ). Vidíme, že tento tlak je řádově nižší, než je tlak potřebný k roztavení ledu o teplotě  $-1\text{ }^\circ\text{C}$ . Představíme-li si navíc teplotu  $-10\text{ }^\circ\text{C}$ , při které se jistě také dá bruslit a zjistíme, že regelace ledu hladký skluz nezpůsobuje. Někdo by mohl namítnout (a také to mnozí z řešitelů poznamenávali), že nůž brusle má buď jedno mnohem užší ostří uprostřed, nebo dvě po stranách, čímž se tlak řádově zvětší, ale musíme si uvědomit, že v takovém případě se brusle trochu zaboří, a síla se tudíž opět rozloží na větší plochu. Ostří slouží spíše k lepší ovladatelnosti brusle, umožňuje projíždět zatáčky ve větší rychlosti a také pomáhá při prudkém brzdění.

Nesmíme zapomenout, že dobře klouže také puk a na hladkém ledě i boty bez vzorku. Jaké další efekty tedy připadají v úvahu?

Nejprve probereme nízký koeficient smykového tření, ten samozřejmě za bruslením stojí, ale musíme si uvědomit, že není argumentem proti výše a níže podaným vysvětlením, nýbrž jejich důsledkem. Jak od začátku naznačujeme, za nízkým třením mezi ledem a ocelí stojí malá vrstva vody na povrchu ledu, pro níž jsou dvě možná vysvětlení. Prvním vysvětlením je prostá existence takové vrstvy na povrchu ledu, protože molekuly vody nejsou zcela vázány a mají tedy dostatečnou volnost. Tento jev poprvé objevil Faraday již v roce 1840, když k sobě přiložil dvě kostky ledu, a tím je spojil. Původně povrchovým molekulám přidal potřebné vazby. Důkladné měření na sebe nechal čekat až do roku 1996, kdy v Lawrence Berkeley National Laboratory rentgenovou fotoelektronovou spektroskopii vyvodili jednoznačný závěr. Tenká vrstva vody na povrchu ledu skutečně existuje při teplotách nad  $-20\text{ }^\circ\text{C}$ . Při  $-2\text{ }^\circ\text{C}$  je její tloušťka  $20\text{ \AA}$ . Když ke stejnému výsledku došli o pár let později i v Německu, zdála se kluzkost ledu objasněná.

V roce 2002 Miquel Salmeron, taktéž z Lawrence Berkeley, přišel s novým měřením. Nezpochybnil výsledky svých kolegů, ale vyslovil domněnku, že přirozená povrchová vrstva vody na ledu není dostatečně tlustá na to, aby měla nějaký vliv na kluzkost ledu při teplotách různých od bodu tání. Po experimentu s AFM<sup>1</sup> dokonce tvrdil, že led klade proti pohybu velký

---

<sup>1)</sup> Atomic Force Microscope

odpor. Podle něj v běžném měřítku tloušťka vrstvy vody vzroste jako důsledek zahřívání třením. Svým experimentem to ale dokázat nemohl, protože hrot mikroskopu byl natolik malý, že voda okamžitě zamrzala. Tuto teorii podporují i starší měření z počátku 90. let, při nichž byly použity speciální brusle schopné měřit třecí sílu. Podle jejich autorů je kapalině podobný povrch skutečnou příčinou nízkého tření ledu s bruslí. Teplu vzniklé třením je dostatečné pro roztání tenké vrstvy ledu. Pro třecí sílu platí vztah

$$F_t = f F_n.$$

Při 100% účinnosti bychom roztavili vrstvu tlustou zhruba  $30\ \mu\text{m}$ . Použitý vztah však není použitelný pro případy, kdy se jeden materiál boří do druhého, a po započítání dalších faktorů včetně vedení tepla se výsledek posune opět k vrstvám řádově tenčím.

Kupodivu jednoznačné řešení našeho problému v 21. století stále neexistuje. Nakonec už jen uvedme, že nejmenšího tření nedosáhneme při teplotách okolo nuly, kdy je sice vrstva vody nejtlustší, ale zároveň se do ledu více boříme. Jako optimální se z experimentů ukazuje teplota kolem  $-7\ ^\circ\text{C}$ , na kterou také mnohá kluziště svůj led chladí.

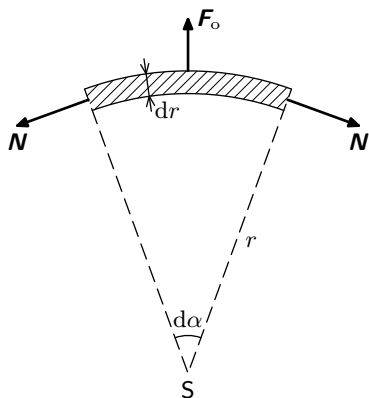
**Kryštof Touška**

krystof@fykos.mff.cuni.cz

### Úloha IV.3 ... vlček neboli káča (4 body; průměr 3,15; řešilo 13 studentů)

Inženýři v NASA chtějí využít setrvačníků jako úložiště energie pro družice. Poradte jim, jakou maximální energii mohou uložit do rotujícího válce o poloměru  $r$ . Na jakou maximální úhlovou rychlost  $\omega$  lze roztočit setrvačník, než praskne?

Na podobný problém narazil Robin.



Obr. 6. Působení sil na vrstvičku setrvačniku

Vyřešení této úlohy spočívá v nalezení mezní odstředivé síly, aby nebyla překročena mez pevnosti materiálu v tahu. Komplexní řešení není snadné.

Nejdříve je dobré se podívat, co se stane, pokud překročíme mezní úhlovou rychlost. Po překročení mezní úhlové rychlosti dojde ke vzniku praskliny na obvodu válce. Tím se celý válec dostane do nestabilního stavu a prasklina se začne šířit směrem ke středu, až celý setrvačník praskne.

Chceme-li vypočítat spodní odhad energie uložitelné do setrvačnicku, je možné zanedbat radiální napětí. V tomto modelu rozřežeme setrvačník na tenké válcové slupky. Na každou slupku působí jednak odstředivá síla, dále pak také tangenciální napětí a nakonec také nenulová radiální síla. Pro tento dolní odhad zanedbáváme výše uvedenou radiální sílu.

Je zřejmé, že výsledná uložitelná energie bude větší než tento odhad, protože radiální složka napětí by pomohla udržení válce v celistvosti.

Označme  $l$  výšku válce,  $R$  poloměr válce,  $r$  aktuální poloměr slupky respektive integrační proměnnou,  $\rho$  hustotu materiálu,  $\sigma_m$  mez pevnosti v tahu a  $\omega$  úhlovou rychlost rotujícího setrvačnicku.

Nyní budeme uvažovat pouze výsek z pláště válce odpovídající úhlu  $d\alpha$  (viz obrázek 6. Na vyšrafovanou část působí odstředivá síla o velikosti

$$dF_o = \omega^2 r dm, \quad dm = \rho l r d\alpha dr,$$

kde  $\omega$  je úhlová rychlost setrvačnicku. Dále na tento element působí tahová síla  $N$  v tangenciálním směru. Ze silového trojúhelníku je vidět

$$dF_o = N d\alpha.$$

Odtud můžeme odvodit výraz pro tahovou sílu ve slupce

$$N = \omega^2 r^2 \rho l dr.$$

Nás ovšem zajímá napětí  $\sigma = N/S$ , kde  $S = l dr$  je průřez uvažované slupky.

$$\sigma = \omega^2 r^2 \rho. \quad (6)$$

Zde již stačí pouze dosadit za  $\sigma$  mezní napětí  $\sigma_m$ . Z výrazu (6) je vidět, že napětí s rostoucí vzdáleností od středu roste. Protože nás zajímá, kdy se roztrhne vnější plášť, dosazujeme  $r = R$ .

Víme, že pro energii setrvačnicku platí  $E = I\omega^2/2$  a pro moment setrvačnosti válce  $I = mR^2/2$ . Celková energie uložitelná do setrvačnicku je

$$E = \frac{1}{4} m R^2 \omega^2. \quad (7)$$

Za  $\omega^2$  lze dosadit ze vztahu (6) a uvážíme-li navíc, že  $V = m/\rho$ , můžeme výsledek psát v elegantním tvaru

$$E_{\min} = \frac{1}{4} V \sigma_m,$$

kde  $V$  je objem setrvačnicku.

Druhé možné řešení spočívá ve vnímání válce jako dvou polovin, které se od sebe snažíme odtrhnout. Vypočteme celkovou sílu, jakou jsou od sebe při rotaci odtrhávány obě poloviny. Zde provedeme krok, který zaručí, že půjde o horní odhad. Budeme předpokládat, že síla je po celém průřezu konstantní, což nejspíše není pravda, protože u středu bude válec namáhán méně než na obvodu.

Další postup je zřejmý. Nejdříve vypočteme odstředivou sílu působící na jednotlivý trojúhelníkový element. To je integrál z odstředivých sil působících na jednotlivé slupky. Vypočteme proto nejdříve diferenciál síly

$$d^2 F_o = \omega^2 r dm, \quad dm = \rho l r d\alpha dr.$$

Chceme-li vypočítat sílu působící na výše zmíněný trojúhelníkový element středového úhlu  $d\alpha$ , uvědomíme si, že platí  $dF_o = \int d^2 F_o$  a můžeme psát

$$dF_o = \rho \omega^2 l d\alpha \int_0^R r^2 dr = \frac{1}{3} \rho \omega^2 l R^3 d\alpha.$$

Tím jsme vypočetli velikost odtrhávající síly působící na smyšlenou rovinu  $\chi$ . Síla  $dF_o$  však svírá s touto rovinou úhel  $\alpha$ . Skutečná síla odtrhávající dvě poloviny válce je však pouze průmět  $dF_o$  do směru kolmého na  $\chi$ . Musíme tedy integrovat průmět síly  $dF_o$  do roviny kolmé na  $\chi$  přes celý objem válce. Tím nám vyjde celková síla odtrhávající obě poloviny válce od sebe.

$$F_o = \int_0^\pi \sin \alpha \, dF_o = \frac{1}{3} \rho \omega^2 l R^3 \int_0^\pi \sin \alpha \, d\alpha = \frac{2}{3} \rho \omega^2 l R^3.$$

Protože předpokládáme konstantní napětí na rovině  $\chi$ , můžeme položit  $\sigma_m = F_o/S$ , kde  $S = 2Rl$  je plocha roviny  $\chi$ .

$$\sigma_m = \frac{1}{3} \rho \omega^2 R^2 \Rightarrow \omega^2 R^2 = \frac{3\sigma_m}{\rho}.$$

Toto můžeme rovnou dosadit do vztahu pro energii (7). Využijeme-li dále  $V = m/\rho$ , dostáváme

$$E_{\max} = \frac{3}{4} V \sigma_m.$$

Do setrvačnicku lze uložit energii  $E$ , pro kterou platí

$$\frac{1}{4} V \sigma_m < E < \frac{3}{4} V \sigma_m.$$

Pro celkové řešení problému by bylo nutné zavést vektorové pole posunutí, což jsou vektory, které mají počátek v klidové poloze nějakého bodu a koncový bod je totožný s polohou bodu po deformaci. Dále ze znalosti tohoto pole posunutí lze jeho derivací získat radiální a tečnou složku deformace. Toto již tensorové pole lze přetransformovat pomocí tensoru pružnosti na tensor napětí a zkoumat, kdy složky tensoru napětí přesáhnou mez pružnosti a setrvačnick praskne. Toto řešení je však složité a ne vždy intuitivní.

Ještě pár poznámek k došlým řešením. Všechna řešení byla v podstatě správně. Chyběl v nich jedině rozbor, zdali jde o horní, či dolní odhad uložitelné energie respektive poznámka o zanedbáních, neuvažovaných vlivech a jiných předpokladech.

**Lukáš Ledvina**

lukas1@fykos.mff.cuni.cz

#### Úloha IV.4 ... šachovnice (4 body; průměr 3,17; řešilo 23 studentů)

Jistě znáte pohádku o chytrákovi, který si udělal legraci z krále tím, že mu dal za úkol na políčka šachovnice vyskládat postupně 1, 2, 4, 8, 16, ...,  $2^{63}$  zrníček rýže po řádcích zleva doprava. Většinou se ale nedodává, že se chytrák velmi podivil, když král šachovnicový stůl nechal přinést. Vypočtete, kde byl vypodložen, aby zrníčka nespadla. Zrníčka jsou hmotné body umístěné ve středu polí. (Přesněji řečeno nás zajímá poloha těžiště šachovnice s rýží.)

*Několik vagónů rýže si objednal Jakub Michálek.*

Vyjdeme ze vzorce pro těžiště

$$x_T = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}, \quad y_T = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}.$$

Vypočítejme těžiště první řady, pro niž platí  $m_i = 2^i$ , kde indexy bereme od nuly do sedmičky. Než se však vrhneme na sumy, nahlédneme, že všechny řádky budou mít  $x$ -ovou složku těžiště

stejnou, stejně tak všechny sloupce mají stejnou souřadnici  $y$ -ovou – vždyť hmotnosti násobíme jenom nějakou mocninou konstanty  $2^8$ , čímž zlomek rozšiřujeme a jeho hodnota se nemění. Celá deska musí mít proto těžiště v bodě o souřadnicích  $(x_T, y_T)$ .

Stojíme před problémem, jak vypočítat součty typu  $\sum_{i=0}^n k^i$  a  $\sum_{i=0}^n ik^i$ . První známe, říká se mu geometrická řada. Na vzorec se přijde jednoduchou úvahou: označme  $S_n = 1 + k + \dots + k^n$ . Potom od obou stran odečteme jedničku a vydělíme  $k$ , čímž dostaneme  $(S_n - 1)/k = 1 + k + \dots + k^{n-1}$ . Pokud k oběma stranám přičteme  $k^n$ , získáme na pravé straně rovnice opět  $S_n$  a odsud vyjádříme

$$S_n = \frac{k^{n+1} - 1}{k - 1}.$$

Obdobně postupujeme pro druhou sumu. Označíme  $P_n = k^1 + 2k^2 + \dots + nk^n$ . Potom  $P_n/k = 1 + 2k + \dots + nk^{n-1}$  a z předchozího odstavce máme  $-S_{n-1} = -1 - k - \dots - k^{n-1}$ . Sečtením posledních dvou rovnic dostáváme

$$\frac{P_n}{k} - S_{n-1} = k + 2k^2 + \dots + (n-1)k^{n-1}.$$

To nás těší, protože na pravé straně nevyšlo nic jiného než  $P_n - nk^n$ . Teď už jen z rovnice

$$\frac{P_n}{k} - S_{n-1} = P_n - nk^n$$

vyjádříme

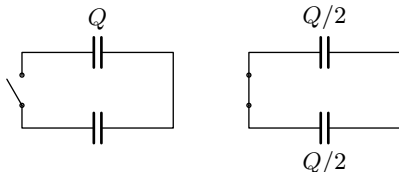
$$P_n = \frac{k}{(k-1)^2} (k^n (nk - n - 1) + 1).$$

Pokud umíte derivovat, můžete si tento vztah odvodit derivováním částečného součtu geometrické řady. My už jen dosadíme pro řádek  $k = 2$  a pro sloupec  $k = 2^8$  a  $n = 7$ . Souřadnice těžiště vycházejí přibližně (6,031; 6,996), což se shoduje s domněnkou, že těžiště bude docela blízko předposledního políčka se souřadnicemi (6, 7).

**Jakub Michálek**  
jmi@fykos.mff.cuni.cz

#### Úloha IV. P ... zachraňte fyziku (3 body; průměr 1,67; řešilo 18 studentů)

Rozpojený obvod na obrázku 7 obsahuje jeden nenabitý a jeden nabitý kondenzátor (náboj  $Q$ ). Vodiče jsou ideální, nemají žádný odpor, oba kondenzátory jsou stejné. Celková energie nábojů v obvodu tedy je  $Q^2/2C$ . Pokud se po sepnutí vypínače náboje na kondenzátorech vyrovnají, celková energie bude  $Q^2/8C + Q^2/8C = Q^2/4C$ , což je polovina oproti počáteční situaci. Vysvětlete tento rozdíl. Kde se spotřebovala polovina energie? Vypínač je vyrobený tak šikovně, že v něm vysvětlení netkví. S touhle záludností přišel Jarda Trnka.



Obr. 7. Obvod s kondenzátory před a po sepnutí vypínače



Po sepnutí spínače je obvod jistě v nerovnováze, elektrony ze záporně nabitých elektrod kondenzátorů (uvědomme si, že kladný nebo záporný potenciál získá před nabitím kondenzátoru celý vodič spojený s danou elektrodou a s ním i vodivě spojená elektroda druhého kondenzátoru) začnou být urychlovány k druhé elektrodě.

Při dosažení rovnovážného stavu, když se náboje na kondenzátorech vyrovnají, se však elektrony stále pohybují a k jejich zastavení je potřeba práce přesně opačná té, jež je urychlila. Vzhledem k symetrii to znamená, že se původně nabitý kondenzátor zcela vybije a nenabitý kondenzátor získá náboj  $Q$ ; obvod se dostal zjevně do původního stavu, jen se kondenzátory vyměnily. Tímto způsobem by měl oscilovat stále dál; zkušenost by však ukázala, že i pro obvod s ideálními součástkami by se kmity časem utlumily a na obou kondenzátorech bychom naměřili stálé hodnoty nábojů  $Q/2$ .

Vysvětlení je prosté. Pohybující se náboj (elektrony) vytváří kolem sebe magnetické pole. Jelikož rychlost elektronů se bude měnit, bude proměnlivé i vznikající magnetické pole a jak známo, při změně magnetického pole vznikají elektromagnetické vlny. Energie se tak z obvodu prostě vysvítí ve formě těchto elektromagnetických vln (při běžných kapacitách kondenzátorů půjde nejspíše o nějaké rádiové frekvence).

Stojí za zmínku, že se jedná vlastně o klasický LC oscilátor. Takový nebuzený LC oscilační obvod se obvykle skládá z cívky a předem nabitého kondenzátoru; zde je kondenzátor tvořen dvěma stejnými sériově zapojenými kondenzátory, takže celková kapacita bude  $C/2$ , původní napětí na kondenzátorech bude  $U = Q/C$ , takže výsledný kondenzátor se bude navenek tvářit, jako by měl na začátku náboj  $Q/2$ .

A co cívka? Ta přeci na schémátku není... Nebo snad ano? Běžnou značku cívky tu sice nenajdeme, ale ve skutečnosti je v obvodu „cívka“ s jedním závitem, tvořená vlastním vodičem propojujícím součástky. Tato smyčka má určitou vlastní indukčnost (její přesná hodnota závisí na tvaru a rozměrech obvodu a též na prostředí, v němž se obvod nachází), a je tedy schopna účinně indukovat napětí v obvodu a stejně tak vytváří ve svém okolí magnetické pole, jež svými změnami v důsledku konečné rychlosti šíření svých změn (rychlost světla) bude vytvářet elektromagnetické vlny.

**Marek Nečada**

marekn@fykos.mff.cuni.cz

#### Úloha IV. E ... *blowjob* (8 bodů; průměr 4,69; řešilo 13 studentů)

*Kupte si nafukovací balonek, nafoukněte jej, zavažte a proměřte, jak se jeho objem mění s časem. Pokuste se určit, kolik z plochy balonku zabírají póry, kterými vzduch uniká.*

*Před jarním soustředěním se zamyslel Aleš.*

Měřit samovolné vyfukování balonku je poměrně zdlouhavá a náročná experimentální činnost. Ale na naši obranu musíme podotknout, že existují daleko delší měření. Například měření viskozity dehtu<sup>2</sup>. Ale experiment nevyžaduje moc dozoru, takže ve volných chvílích můžeme spočítat, jak to s tím balonkem je teoreticky.

#### *Teorie*

Nejdřív odhadneme, jak se mění velikost balonku s časem. Vyjdeme z několika předpokladů.

- a) Vyfukování probíhá dostatečně pomalu a teploty uvnitř i vně balonku se stíhají vyrovnávat a jsou stále konstantní. Tedy půjde o izotermický „děj“ a bude platit stavová rovnice

$$pV = \frac{m}{M_m} kT,$$

<sup>2</sup>) Viz <http://www.smp.uq.edu.au/pitch/>.

kde  $m$  je hmotnost plynu uvnitř,  $M_m$  hmotnost jedné molekuly,  $k$  Boltzmannova konstanta a  $T$  termodynamická teplota.

- b) Plocha balonku je svázána s objemem rozměrovou konstantou  $A$  vztahem

$$S = AV^{2/3}.$$

Jde o to, že balonek není vždy přesně kulový a přepočítávání by zbytečně komplikovalo výpočet. V případě koule platí  $A = (36\pi)^{1/3}$ , což lze lehce odvodit ze vztahů pro její objem a povrch. My ji vypočteme proměřením zkoumaného balonku.

- c) Plyn v balonku je ideální a jeho molekuly mají hmotnost  $M_m = 29,2m_u$ , kde  $m_u$  je atomová hmotnostní jednotka a 30 je relativní hmotnost průměrné molekuly vzduchu (30 % kyslíku a 70 % dusíku). Dále  $Z$  je tok molekul na stěnu (počet nárazů za sekundu) určen vztahem<sup>3</sup>

$$Z = \frac{1}{4}nv_a, \quad (8)$$

kde  $v_a = \sqrt{8kT/\pi m_m}$  označuje střední aritmetickou rychlost molekul ( $k$  je Boltzmannova konstanta a  $T$  termodynamická teplota) a  $n$  je hustotu částic. Pro měření toku hmotnosti na plochu hustotu částic jednoduše nahradíme hustotou plynu. Správně bychom ovšem měli počítat s parciálními tlaky jednotlivých plynů zvlášť, ale u kyslíku a dusíku, které mají téměř stejnou hmotnost, lze počítat s „průměrnou“ molekulou.

- d) Rozměry pórů jsou mnohem menší než střední volná dráha molekul vzduchu v balonku a jejich plošná hustota  $\sigma$  se nemění.
- e) Tlak v balonku během měření je přibližně konstantní, roven nějaké hodnotě  $p$ . Tento odhad ale není přesný, skutečná závislost tlaku v kulatém balonku je jiná, pro zajímavost vypadá takto

$$p(r) = 2s_0 \frac{d_0}{r_0} \left( \frac{r_0}{r} - \left( \frac{r_0}{r} \right)^\tau \right) \left( 1 - \frac{s_1}{s_{-1}} \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \right),$$

kde  $d_0$  a  $r_0$  vyjadřují klidové rozměry balonku a  $s_1$  a  $s_{-1}$  jsou materiálové konstanty. My si tuto změnu tlaku dovolíme zanedbat, protože se v tak krátkém časovém období, ve kterém měříme, balonek o moc nezmenší. Ale pro delší měření bychom potřebovali tlak odhadnout aspoň lineárně.

Když přijmeme tyto předpoklady, můžeme začít odhadovat. Nejdříve se zamyslíme nad tím, jak částice odcházejí skrz blánu. Při tak malých rozměrech pórů už totiž lze tvrdit, že částice nejsou z balonku vytlačovány ven, ale že unikají pouhou náhodou, a to, když se některá z molekul právě trefoří do póru. Proč? Protože si pórovitou stěnu v tomto extrémním přiblížení můžeme představit jako dům s okny, do kterých někdo hází tenisové míče, a nás zajímá, kolik se mu jich podaří prohodit skrz celou budovu. A to se povede jenom takovým míčům (molekulám), které letí přímo do okna (póru). Známe počet molekul dopadajících na stěnu ze vztahu (8), takže nám vlastně stačí jen dosadit

$$dm = \frac{1}{4}S_p(t) v_a \varrho(t) dt, \quad (9)$$

kde  $v_a$  je střední aritmetická rychlost a  $S_p = \sigma AV^{2/3}$  je plocha pórů určená jejich hustotou  $\sigma$  a plochou balonku. Hustota vzduchu v balonku je určena  $\varrho(t)$ . Teď si ze stavové rovnice vyjádříme  $\varrho(t)$  a  $m(t)$ . Platí

$$\varrho(t) = \frac{pM_m}{RT} \quad \text{a} \quad m(t) = \frac{pV(t)M_m}{RT}.$$

<sup>3)</sup> Odvození viz např. <http://www.kfy.zcu.cz/Rusnak/skripta.fy1.pdf>.

Dosadíme-li tedy do rovnice (9), dostaneme hodnotu pro změnu objemu za čas. Ještě také musíme zohlednit to, že stejný jev jako při prostupu vzduchu z balonku ven funguje i v opačném směru. Pak počet částic prošlých stěnou ven nebude úměrný jen tlaku uvnitř, ale rozdílu tlaků mezi balonkem a atmosférou ( $p_a$ ).

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{4} \frac{p_a - p}{p} v_a \sigma A V^{2/3}.$$

Je dobré si všimnout, že podíl  $(p_a - p)/p$  je záporný, tedy objem podle očekávání ubývá. Ted už nezbyvá nic než vyřešit tuto separovatelnou diferenciální rovnici, což není problém. Vyjde

$$V(t) = \left( \frac{1}{12} \frac{p_a - p}{p} v_a \sigma A t + V_0^{1/3} \right)^3,$$

kde  $V_0$  je integrační konstanta vypočítaná z počátečních podmínek ( $V(0) = V_0$ ). Tedy závislost objemu na čase v krátkém čase (v poměru k době vypuštění celého objemu) po nafouknutí balonku je klesající kubická funkce závislá na parametrech vzduchu a balonku.

### Experiment

U šišatého balonku je docela problém efektivně měřit objem. Abychom zamezili zanášení pórů prachem, uzavřeli jsme zavěšený balonek do krabice, vedle něj pověsili referenční třicetcentimetrové pravítko a v téměř pravidelných intervalech jsme jej z dostatečné vzdálenosti fotili (aby nedošlo ke zkreslení vlivem promítání na snímač). Ústí balonku jsme zalili lepidlem, abychom zamezili úniku částic nedokonale zavázaným otvorem.

Zpracování fotografií proběhlo následovně. Nejprve jsme každou z nich zorientovali na svislo pomocí referenčního pravítka a upravili její velikost tak, aby byla délka pravítka všude stejná. Tím jsme zjistili poměr rozměrů na obrázku a ve skutečnosti. Takto upravený snímek s balonkem a kontrastním pozadím jsme upravili filtrem Posterizovat v programu Gimp (z barevného balonku vytvoří jednolitou plochu). Objem a povrch balonku (povrch pro určení konstanty  $A = SV^{-2/3}$ ) jsme zjistili zpracováním obrázku ve formátu PPM skriptem v jazyku C++. Program postupně počítal počet barevných pixelů  $y_i$  v každém řádku a zároveň z nich určil objem i povrch balonku.

$$S = \sum_{i=1}^x 2\pi \frac{y_i}{2} \sqrt{1 + (y_i - y_{i-1})^2},$$

$$V = \sum_{i=1}^x \pi \frac{y_i^2}{4},$$

kde  $x$  je počet řádků v obrázku. Povrch vypočítáme tak, že vezmeme polovinu délky křivky ohraničující balonek a násobíme  $2\pi$ , objem je součet objemů válečků vysokých 1 px. Tyto vzorce dávají výsledek v pixelech, pro přepočítání na správné jednotky použijeme dříve určenou kalibrační konstantu.

V průběhu experimentu se měnil atmosférický tlak a teplota, pro výpočet jsme uvažovali údaje  $p_a = 101\,300$  Pa a  $T = 292$  K. Střední aritmetická rychlost tedy činí  $v_a \approx 460$  m·s<sup>-1</sup>.

Ze snímků jsme určili hodnotu konstanty  $A$ .

$$A = 5,36 \pm 0,01.$$

Ostatní konstanty –  $\sigma$ ,  $V_0$  a  $p$  určíme z fitu experimentálních dat. Chybu určení objemu balonku odhadujeme na 10 ml. Naměřená data z dvou týdnů vyfukování jsou v tabulce.

$t$ [dny]	$V$ [ml]	$t$ [dny]	$V$ [ml]
0,0	2541	8,3	2316
0,8	2657	9,1	2315
0,9	2543	9,9	2266
1,1	2480	10,3	2246
2,3	2477	11,0	2279
2,8	2421	11,4	2200
6,9	2337	11,9	2173
7,9	2298	12,9	2157

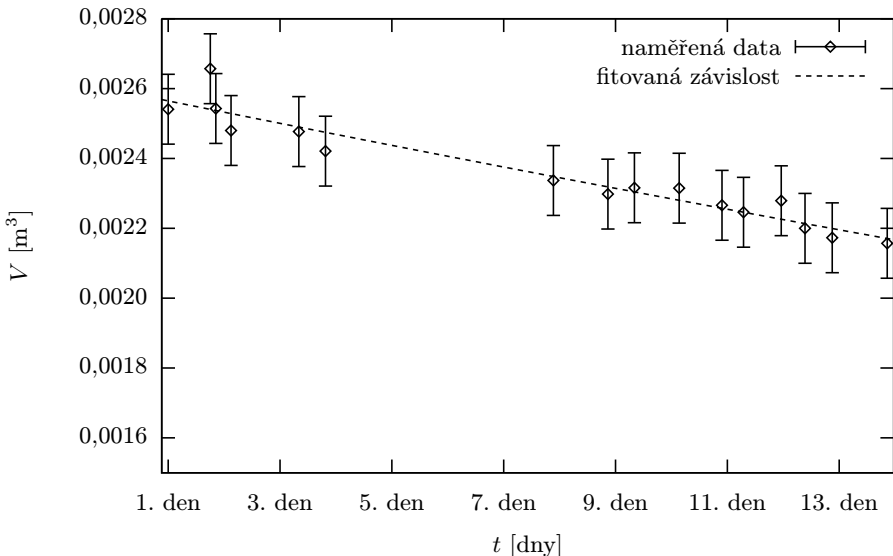
Fitování pomocí programu Gnuplot je popsáno v Sekci experimentů na FYKOSích internetových stránkách. Když postupujeme podle tamějšího návodu, dostaneme se k datům

$$V_0 = (2560 \pm 20) \text{ ml},$$

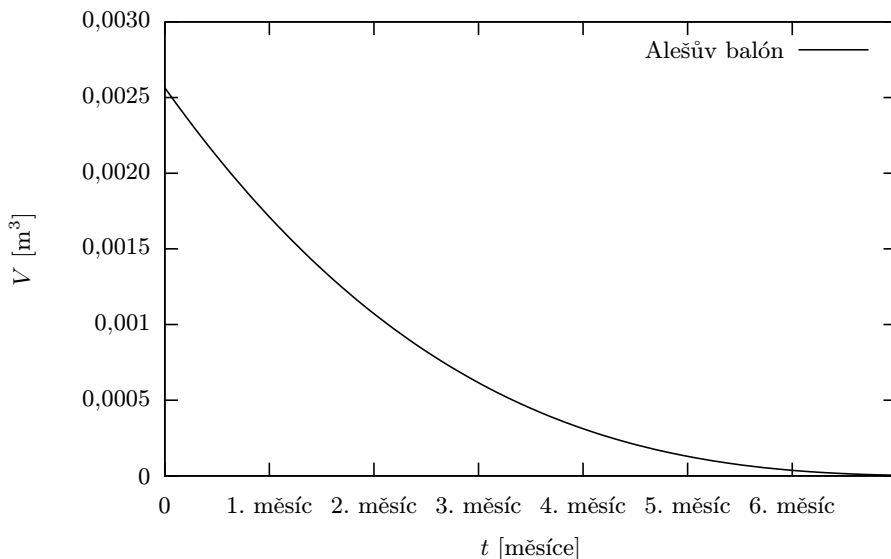
$$p = (104700 \pm 100) \text{ Pa},$$

$$\sigma = (7,6 \pm 0,7) \cdot 10^{-10}.$$

Tedy hledaná hustota pórů je asi  $(7,6 \pm 0,7) \cdot 10^{-10}$ , takže zabírají asi  $7 \cdot 10^{-8} \%$  povrchu balonku. Pokud si vykreslíme závislost objemu na čase, uvidíme, že odpovídá velmi dobře (viz obrázek 8).



Obr. 8. Graf závislosti objemu balonku na čase



Obr. 9. Předpokládaný vývoj vyfukování balónku

Ještě jednou se zamysleme nad tlakem v balonku. Od začátku uvažujeme, že je konstantní jenom v po relativně krátkou dobu našeho experimentu. Ale pokud se podíváme na jeho hodnotu, zjistíme, že se v podstatě neliší od atmosférického tlaku. Můžeme tedy zkusit odhadnout, kdy se balonek vyfoukne úplně. V grafu 9 vidíme, kdy křivka protne osu. Je to asi za půl roku od nafouknutí. Ale doba reálného vyfouknutí bude kratší, protože tlak se přece jenom zmenšuje a časem se vyrovná s vnějším tlakem atmosféry. Navíc se balonek nevyfoukne úplně. Ale za půl roku uvidíme, nakolik byl náš odhad správný.

Změřili jsme závislost objemu balonku na čase. Jeho zmenšování je způsobeno únikem vzduchu přes póry v gumě, které zabírají asi  $(7,6 \pm 0,7) \cdot 10^{-8}$  % povrchu balonku.

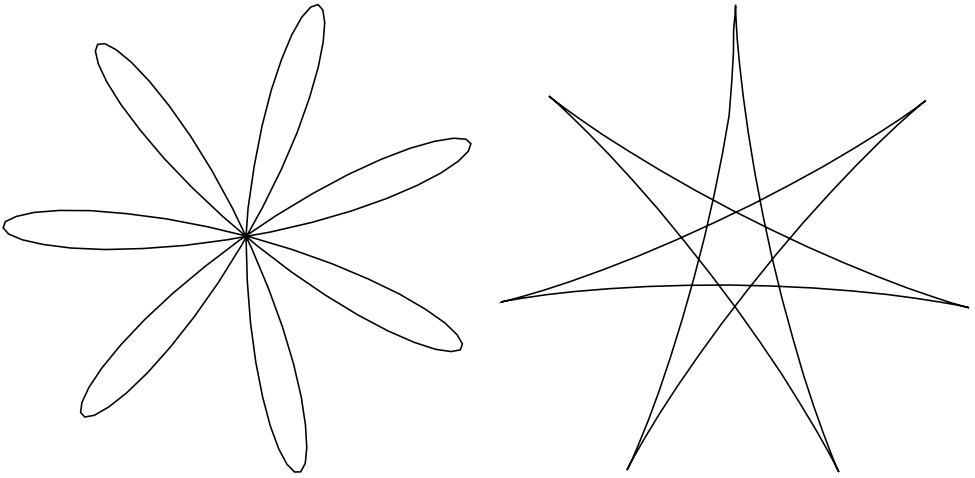
#### Komentáře k řešením

Všichni, kdo se pokoušeli vyřešit tuto úlohu, změřili aspoň vyfukování balonku. Pěkná řešení poslali Ján Bogár a Martin Výška, kteří dospěli ke správné hodnotě hustoty pórů nebo k podstatnému kroku odvození teoretické závislosti. Ale byli i tací, kteří tipovali podle oka v jednotkách procent povrchu. To je ale otvor velký asi jako dlaň!

**Aleš Podolník**  
ales@fykos.mff.cuni.cz

#### Úloha IV.S ... Foucaultovo kyvadlo a rotace Země (5 bodů; průměr 2,40; řešilo 10 studentů)

- a) Foucaultovo kyvadlo do písku nakreslilo při dvou různých demonstracích dva odlišné obrázky, oba jsou na obrázku. Rozhodněte, co způsobilo jiný tvar a také jak dlouhé by muselo být kyvadlo, aby tyto obrázky mohly na podlaze pařížské katedrály vzniknout. Kolikacípé jsou hvězdy/květy ve skutečnosti?



b) Jaký tvar bude mít hladina v kbelíku s vodou, který klidně stojí na rovném stole?

c) Ukažte, že vztah

$$\delta f = f_+ - f_- = \frac{4}{\lambda_0} \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{S}}{P}$$

pro frekvenční rozdíl (frekvenci rázů) dvou protiběžných paprsků v laserovém gyroskopu platí pro jeho libovolný rovinný tvar – tedy nejen kruhový.

Pro své milé řešitele zadali autoři seriálu.

### Foucaultovo kyvadlo

Podle teorie ze čtvrtého dílu seriálu se kyvadlo na povrchu planety v bodě P nachází v rotující soustavě s úhlovou frekvencí  $\Omega_P = \Omega_0 \sin \varphi_P$ , kde  $\Omega_0$  je rychlost rotace Země a  $\varphi_P$  zeměpisná šířka uvažovaného místa P. To znamená, že označíme-li  $T_0$  periodu rotace Země, lokální perioda rotace bude

$$T_P = \frac{T_0}{\sin \varphi_P}.$$

Když budeme prstem sledovat pohyb kyvadla znázorněný na obrázcích, všimneme si, že se sedmkrát zhouplo (tedy prodělalo  $n/2 = 3,5$  kmitů) a zároveň se rovina jeho kývání otočila o  $180^\circ$  (případně celočíselný násobek tohoto úhlu – to ale nebudeme uvažovat). Jeden kmit tak trval

$$\tau = \frac{T_P/2}{n/2} = \frac{T_0}{n \sin \varphi_P}.$$

Perioda matematického kyvadla v homogenním tíhovém poli se zrychlením  $g$  je

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

takže délku kyvadla snadno vyjádříme jako

$$l = g \left( \frac{T_0}{2\pi n \sin \varphi_P} \right)^2 \doteq 7 \cdot 10^7 \text{ m}.$$

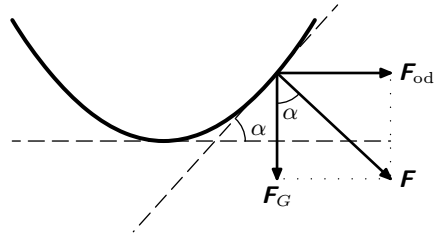
Za  $\varphi_P$  jsme dosadili zeměpisnou šířku Paříže,  $\varphi_P = 48^\circ 52'$ . Není třeba dvakrát zdůrazňovat, že ani kyvadlo ani homogenní gravitace takového rozsahu nejsou představitelné. Skutečný počet výběžků podobného obrazce při parametrech ze seriálu je o to větší

$$n = \frac{T_0}{2\pi \sin \varphi_P} \sqrt{\frac{g}{l}} \doteq 7 \cdot 10^3.$$

Příčina odlišného tvaru obrazců je prostá. Kyvadlo rozhoupáváme ve svislé rovině procházející rovnovážnou polohou. Na počátku má tedy kyvadlo jen radiální složku rychlosti; tečnou, mířící kolmo na tuto rovinu, již jsme počítali v seriálu, získává až během zhrounutí. Nulovou kolmou rychlost má kyvadlo v případě prvního záznamu, je-li uprostřed; v případě druhého je-li v amplitudě. Proto jediná odlišnost mezi znázorněnými situacemi je, že v prvním případě jsme kyvadlo vyrazili z rovnovážné polohy, zatímco v druhém případě jsme jej uvolnili z výchylky.

### Kyblíček

Jelikož se klidně stojící kyblík vlastně točí, hladina se o něco prohne. Uvažujme, že má hladina ustálený tvar, a zkoumejme rovnováhu v takovém stavu. Je jasné, že vektorový součet tíhové síly a odstředivé síly působící na malý objem vody u hladiny musí být na hladinu kolmý, neboť jinak by se tento malý objem začal po hladině přesouvat na nějaké jiné místo, dokud by nenašel polohu, pro kterou by tvrzení o rovnováze platilo. Podle obrázku bude mít výslednice správný směr, pokud bude svírat se svislicí stejný úhel  $\alpha(x)$  jako horizontála s tečnou k povrchu (hladinou) v bodě vzdáleném o  $x$  od středu. To nastane, bude-li



Obr. 10. Síly tvarující hladinu

$$\operatorname{tg} \alpha(x) = \frac{F_{\text{od}}}{F_g} = \frac{\omega^2 x}{g}.$$

Popíšeme-li rovinný osový řez hladiny křivkou  $y(x)$ , je také podle definice derivace  $y'(x) = \operatorname{tg} \alpha(x)$ , takže dostáváme

$$y'(x) = \frac{\omega^2 x}{g} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{1}{2} \frac{\omega^2 x^2}{g} = \frac{1}{2} \frac{\Omega_0^2 r^2}{g} \sin^2 \varphi.$$

Má-li kbelík poloměr  $r$ , bude uprostřed hladina o  $h$  nižší než na krajích, kde

$$h = \frac{1}{2} \frac{\Omega_0^2 r^2}{g} \sin^2 \varphi.$$

Sami si už můžete dosazením reálných hodnot ověřit, že fakt, že jste při mytí podlahy žádné promáčknutí nepozorovali, rozhodně není chyba vašeho zraku. Rozměr  $h$  vyjde řádově menší než průměr atomu.

### Gyroskop

V seriálu jsme rozebírali kruhový laserový gyroskop, v němž vznikají a zanikají fotony o frekvenci  $f_0$ , které se však díky rotaci celého zařízení dopplerovsky posouvají vůči vnějšímu pozorovateli na frekvence

$$f_{\pm} = f_0 \left( 1 \pm \frac{\omega r}{c} \right),$$

kde  $\omega = \Omega_0 \sin \varphi$  je úhlová frekvence rotace soustavy,  $r$  poloměr prstence laseru a  $c$  rychlost světla. Tento vztah lze přepsat použitím tečné rychlosti  $v_t = \omega r$  do obecnějšího tvaru

$$f_{\pm} = f_0 \left( 1 \pm \frac{v_t}{c} \right).$$

Pokud se nejedná o kruhový laser, není rychlost  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$  obecně rovnoběžná s elementem laserového gyroskopu v místě  $\mathbf{r}$  a pro dopplerovský posun se uplatní jen její průmět do směru trubice (daného jednotkovým vektorem  $\mathbf{t}$ )

$$v_t = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{t} = \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{t}) = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} r \sin \vartheta,$$

kde  $\mathbf{n}$  je jednotkový vektor kolmý na plochu tvořenou rovinnou trubicí (kolmý proto, že  $\mathbf{r}$  i  $\mathbf{t}$  v této rovině leží) a  $\vartheta$  je úhel mezi vektory  $\mathbf{r}$  a  $\mathbf{t}$ . Tečné rychlosti mohou být podél křivé trubice různé a také frekvenční posuny způsobené rotací budou různé, ale protože částic plynu i fotonů je spousta, lze jejich chování popsat statisticky. V průměru bude mít největší vliv střední hodnota vyzářovaných frekvencí. Budeme proto pracovat i se střední hodnotou  $\langle v_t \rangle$  podél obvodu,

$$\langle v_t \rangle = \frac{1}{P} \int_P v_t dl = \frac{1}{P} \int_P \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} r \sin \vartheta dl.$$

Symbolem  $P$  značíme celou délku obvodu,  $dl$  je délka jeho malého lineárního úseku. Předchozí vztah můžeme upravit na

$$\langle v_t \rangle = \frac{2}{P} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} \int_P \frac{r \sin \vartheta}{2} dl.$$

Výraz  $(r/2) \sin \vartheta dl$  je ale obsah trojúhelníku napnutého mezi počátkem souřadnic a dvěma body na okrajích úseku  $dl$ , tedy uvedený integrál není nic jiného než plocha obepnutá celým gyroskopem. Máme proto, při značení  $\mathbf{S} = \mathbf{nS}$ ,

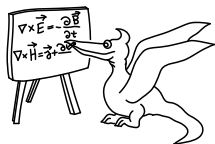
$$\langle v_t \rangle = \frac{2}{P} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{S}.$$

Rozdíl frekvencí pak vyjde

$$\delta f = f_+ - f_- = 2 \frac{f_0}{c} \langle v_t \rangle = \frac{2}{\lambda_0} \langle v_t \rangle = \frac{4}{\lambda_0} \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{S}}{P}.$$

**Jakub Benda**

[jakub@fykos.mff.cuni.cz](mailto:jakub@fykos.mff.cuni.cz)



**Seriál na pokračování**

## Kapitola 6: Devatero atomových modelů

Ačkoliv to dlouho vypadalo, že atomy jsou skutečně nejmenší a nejjednodušší složkou všech materiálů, ke konci devatenáctého století se začalo ukazovat, že pravděpodobně i ony mají jakousi vnitřní strukturu a ji dané vlastnosti. Vedly k tomu zejména následující tři experimentální poznatky.



- a) *Spektrální čáry* (J. von Fraunhofer, 1814): Fraunhofer sestrojil první spektroskop a zaměřil ho na Slunce. Zjistil, že v jinak spojitém spektru (tj. všechny barvy zastoupeny) se tu a tam objevila černá, tzv. *absorpční čára* značící, že atomy ve svrchních vrstvách Slunce pohlcují světlo příslušné vlnové délky. To naznačovalo přítomnost vnitřní struktury, která by takové vlnové délky předepisovala. Jakýsi systém v těchto čarách našel až roku 1885 Johann Balmer a o tři roky později Johannes Rydberg jeho vzorec zobecnil do finální podoby ( $\lambda$  je přípustná vlnová délka pohlceného nebo vyzářeného světla)

$$\frac{1}{\lambda} = 1 \text{ Ry} \cdot \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right), \quad (10)$$

kde  $m, n$  jsou přirozená čísla a 1 Ry (jeden Rydberg) experimentální konstanta různá pro různé atomy. Pro vodíku podobný atom je její hodnota řádu  $10^7 \text{ m}^{-1}$ .

- b) *Struktura periodické tabulky* (D. I. Mendělejev, 1869): Díky Mendělejevově tabulce, v níž seřídil známé atomy podle hmotnosti a vlastností, vyšlo najevo, že počet stavebních elementů atomu, respektive elementů, jejichž přítomnost se odráží na jeho fyzikálních a chemických vlastnostech, musí být poměrně malý.
- c) *Přítomnost elektronů v atomech* (J. J. Thompson, 1897): Jak jste se dočetli v páté kapitole seriálu, Thompson prováděl experimenty s katodovými paprsky a jasně prokázal, že se jednalo o proud nabitých částic vycházejících z atomů.

Nápadů, jak tyto vlastnosti vysvětlit, vznikla celá řada; proberme nyní většinu těch nejznámějších.

#### *Lenardův dynamický model (1903)*

S prvním propracovaným modelem přišel maďarsko-německý fyzik<sup>4</sup> Philipp Lenard. Při pokusech s katodovými paprsky (za něž dostal i Nobelovu cenu) zjistil, že schopnost materiálu pohlcovat elektrony závisí jen na hmotnosti atomů. To implikovalo, že jednotlivé prvky se liší jen počtem určitých elementárnějších subatomů, dvojic elektron-kladný náboj. Takovou dvojici nazval *dynamid*. Model měl nicméně problém vysvětlit, proč se z atomu (z dynamidu) nemohla nikdy uvolnit kladná složka, zatímco záporná ano, a také nedával možnost určit Rydbergovu konstantu, což ostatně byl problém i u všech následujících.

#### *Pudinkový model (1904)*

Nejznámější neúspěšný model je dílem J. J. Thompsona (nicméně základní myšlenka pochází od Williama Thompsona – lorda Kelvina). Byl odpovědí na objevující se planetární modely (elektrony obíhají kolem jádra), které trpěly jedním společným neduhem, totiž nestabilitou orbit. Z klasické teorie elektromagnetizmu plyne, že dostředivě zrychlující elektron na kruhové dráze kolem jádra vyzařuje elektromagnetické vlny o frekvenci přibližně rovné frekvenci jeho oběhu, čímž ztrácí energii, přibližuje se k jádru a nakonec na něj dopadne. Pudinkový model naproti tomu znázorňuje atom jako homogenní kouli kladného nábojového rozložení, v níž se (bez odporu) pohybují jednotlivé elektrony. Zatímco tedy v planetárních modelech působí na elektron síla úměrná  $r^{-2}$ , v Thompsonově atomu je úměrná  $r$ , tedy i zrychlení elektronu klesá při přibližování k jádru k nule – a tedy vyzařuje stále pomaleji. Důsledným výpočtem zahrnujícím i vliv ostatních elektronů Thompson zjistil, že při dosažení určité minimální rychlosti se stabilita modelu poruší a některý elektron, případně i s částí „pudinku“, vyletí z atomu. Tento jev interpretoval jako radioaktivitu.

<sup>4)</sup> a hlasitý zastánce hnutí *Deutsche Physik* v nacistickém Německu o několik desítek let později

### *Saturnský model (1904)*

Inspiraci v Saturnových prstencích hledal japonský fyzik Nagaoka. V roce 1859 J. C. Maxwell ukázal, že Saturnovy prstence jsou stabilní útvary v tom smyslu, že malá porucha vyvolá oscilace ale ne destrukci. Nagaoka provedl podobný výpočet pro prstenec složený z elektronů rotující kolem nabitého jádra a zjistil, že spektrum frekvencí má jak izolované čáry, tak i spojité pásy. Dokonce ukázal, že při přiložení vnějšího magnetického pole by docházelo k rozštěpení těchto čar, tedy k pozorovanému Zeemanově jevu. Pokusil se i vysvětlit radioaktivitu jako ničivou rezonanci mezi sousedícími atomy. Tento model příliš neprorazil, ale jako jeden z mála uvažoval husté kompaktní jádro uprostřed atomu a díky tomu ho Rutherford po provedení svého experimentu vyzdvihl.

### *Rayleighův spojitý model (1906)*

Originální model lorda Rayleigha navazoval na Thompsonův pudink. Dokonce i jednotlivé elektrony zde nahradil jiným žele, nerotující a nestlačitelnou elektronovou tekutinou, která v klidovém stavu zaujímal přesně stejný prostor jako kladně nabitá hmota. Působením vnějších vlivů na ní mohly vznikat (nabitě) vlny, které kvůli svým oscilacím produkovaly elektromagnetické vlny o frekvenci příslušného modu kmitání, dokud se neutlumily. Stabilita takového atomu zjevně vůbec nezávisí na rozměrech, a tak spojitý model nevysvětluje velikosti atomů a navíc se vzdává představy elektronu jako izolované celistvé částice. Rayleigh první nedostatek s rozpaky „vyřešil“ zavedením univerzální atomové nábojové hustoty  $\rho_0$ , druhého se však nezbavil.

### *Model vibrujících elektronů (1906)*

J. H. Jeans byl hlasitým kritikem planetárních modelů: Zdůraznil, že „i pokud odhlédneme od problémů s vyzařováním, klasická fyzika dovoluje libovolnou orbitu elektronu, která se projeví spojitou škálou prvků s pozvolna se měnícími vlastnostmi,“ což by samozřejmě bylo v rozporu s Mendělejevovým periodickým zákonem. Obrátil tedy svůj pohled do oblasti úplně nové – postuloval *strukturovaný elektron*, nebodovou částici a navíc s proměnným poloměrem. V jeho atomu pak nevzayařovaly pohybující se elektrony jako v ostatních, nýbrž elektrony oscilující.

### *Model expandujících elektronů (1906)*

Podobný návrh publikoval G. A. Schott, mimořádně schopný matematický fyzik, který se celý život zabýval elektromagnetizmem pohybujících se nábojů a jenž přišel s komplikovaným modelem založeným částečně na Jeansových myšlenkách. Také uvažoval elektrony s vnitřní strukturou a podobně jako Jeans je nechal rozpínat. Zahrnutím napětí v éteru obklopujícím takovou soustavu došel k závěru, že se elektrony, byť souhlasně nabitě, budou v určitých uspořádáních přitahovat. Tuto zvláštní sílu interpretoval jako gravitaci.

### *Archionový model (1910)*

J. Stark se na rozdíl od předchozích autorů přednostně věnoval kladným nábojům v atomu. Na začátku dvacátého století se už vědělo o relativně silných magnetických momentech subatomárních částic (tj. že se chovají jako malé magnety). *Archiony* byly kladně nabitě částice se severním a jižním magnetickým pólem, uspořádané do kruhu právě podle orientace jejich magnetického pole. Protože elektrostatická odpudivá síla mezi nimi byla mnohonásobně větší než magnetické přitahování, Stark mezi archiony vložil elektrony, které toto odpuzování kompenzovaly a dohromady vznikl uzavřený řetízek, v němž se střídaly elektrony a archiony. Jako žádný z předchozích ani tento nedokázal předpovědět hodnotu Rydbergovy konstanty a ještě

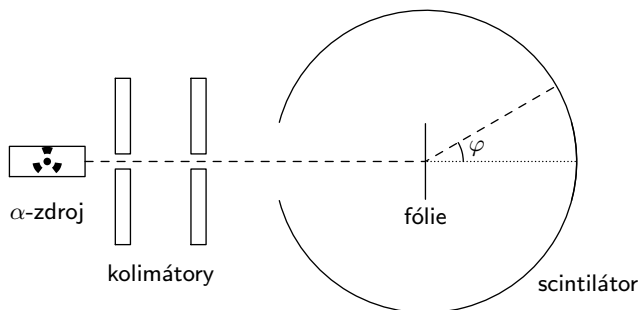
než se o něm stihlo začít mluvit, archionový model byl – jako ostatní – smeten ze stolu modelem Bohrovým.

### Rutherfordův experiment (1909)

V roce 1909 provedl Rutherford se svými studenty proslavený experiment, dnes známý jako Geiger-Marsdenův. Jednalo se o bombardování tenké zlaté fólie  $\alpha$ -částicemi. Zlato bylo použito kvůli své čistotě, přehledné krystalové struktuře (jako většina kovů) a snadnému zpracování; tenkost měla zajistit, že se ve vzorku nacházelo jen několik vrstev atomů. Pokud by atomy byly skutečně podobné některému z pudinkových modelů, obsahujícímu lehké elektrony a spojitě rozložený kladný náboj nekladoucí žádný mechanický odpor, kolmo nastřelená těžká jádra helia by prolétla skrz fólii bez větších odchylek. Rutherfordův tým pomocí detektoru proměřoval četnost dopadů prolétnuvších  $\alpha$ -částic v závislosti na úhlu odchýlení a byl velice překvapený, když se ukázalo nejen to, že mnoho částic se trochu odchýlilo, ale dokonce některé se odrazily od fólie zpět ke zdroji radioaktivního záření. Rutherford to tehdy komentoval slovy:

*It was almost as incredible as if you fired a fifteen-inch shell at a piece of tissue paper and it came back and hit you.*

Aparatura vypadala jako na obrázku 11. Svazek  $\alpha$ -částic byl zaostřený průchodem skrze dvě štěrbiny (kolimátory) a po rozprášení přes fólii dopadal do některého místa kulového stínítka fosforeskujícího při zásahu (scintilátoru). Dopady se registrovaly a zaznamenávaly spolu s úhlem  $\phi$  odklonu od původního směru.



Obr. 11. Rutherfordova aparatura

Rozmysleme si tu nyní, jakou úhlovou závislost Rutherfordovi studenti získali. Uvažujme atom jako bodové, elektricky nabitě jádro obklopené elektrony. Protože jsou elektrony úžasně lehké, pohyb  $\alpha$ -částice téměř neovlivní a ta pocítí až koncentrované pole jádra. Jako rozumné přiblížení tak můžeme průlet atomem považovat za pohyb  $\alpha$ -částice v radiálním elektrickém poli jádra. Takový pohyb se odehrává po kuželosečkách, stejně jako v případě gravitačních sil. Kuželosečka přicházející v úvahu v našem případě je hyperbola, protože částice do atomu přichází s nenulovou (a dokonce poměrně velkou) rychlostí. Schéma průletu je na obrázku 12.

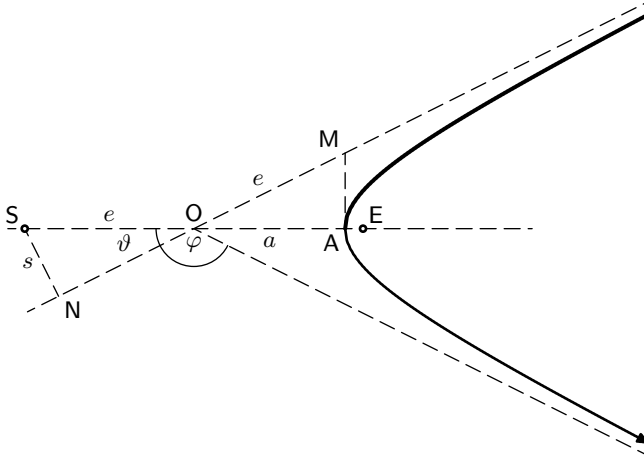
Jádro je v bodě S, vnějším ohnisku větve hyperboly. Pokud by jádro bylo záporně nabitě, příliš by se toho nezměnilo, jen by se na obrázku objevilo v ohnisku protějším, totiž bodě E; geometrie by však zůstala stejná a tedy i experimentální výstup. Veličina  $s$  se nazývá záměrný parametr a udává vzdálenost, o jakou by nalétávající částice minula cíl, kdyby mezi nimi žádná síla nepůsobila Rovnost  $|SO| = |OM|$  plyne z vlastností hyperboly. Ze zákona zachování energie

a zákona zachování momentu hybnosti pro  $\alpha$ -částici o hmotnosti  $m$  a náboji  $Q$  plynou rovnice

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ZeQ}{a+e},$$

$$sv_0 = (e+a)v_m,$$

v nichž  $v_0$  je počáteční rychlost a  $v_m$  minimální rychlost (v bodě A), resp. maximální, je-li v E záporné jádro a  $Ze$  celkový náboj jádra (atomové číslo krát elementární náboj). Ostatní



Obr. 12. Hyperbolická trajektorie částice

veličiny jsou vyznačeny na obrázku 12. Možnost předání energie jádru zanedbáme, což při poměru hmotnosti atomu Au proti iontu  $\text{He}^{2+}$  je rozumný krok. Z těchto rovnic jsme schopni vyčíslit parametr  $s$ ,

$$s^2 = (e+a)(e+a-R_m), \quad (11)$$

kde konstanta  $R_m$  má hodnotu

$$R_m = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ZeQ}{\frac{1}{2}mv_0^2}$$

a význam nejmenší vzdálenosti, na niž se  $\alpha$ -částice maximálně přiblíží k souhlasně nabitému jádru, (pro  $s=0$  jsme ji nastřelili čelně na jádro). Z  $\triangle SON$  plyne, že  $s = e \sin \theta$ , a z  $\triangle MOA$ , máme  $a = e \cos \theta$ . Hledaný součet  $e+a$  je pak

$$e+a = e(1+\cos\theta) = s \cotg \frac{\theta}{2}. \quad (12)$$

Vyčíslíme-li nyní  $s$  z rovnic (11) a (12), získáme

$$s = \frac{1}{2}R_m \operatorname{tg} \theta = \frac{1}{2}R_m \cotg \frac{\phi}{2}. \quad (13)$$

Pravděpodobnost  $p$ , že částice poletí se záměrným parametrem menším nebo rovným  $s_0$  vůči konkrétnímu osamělému jádru, je úměrná ploše kruhu, do nějž se v tom případě musí trefit,

$$p(s \leq s_0) \sim \pi s_0^2,$$

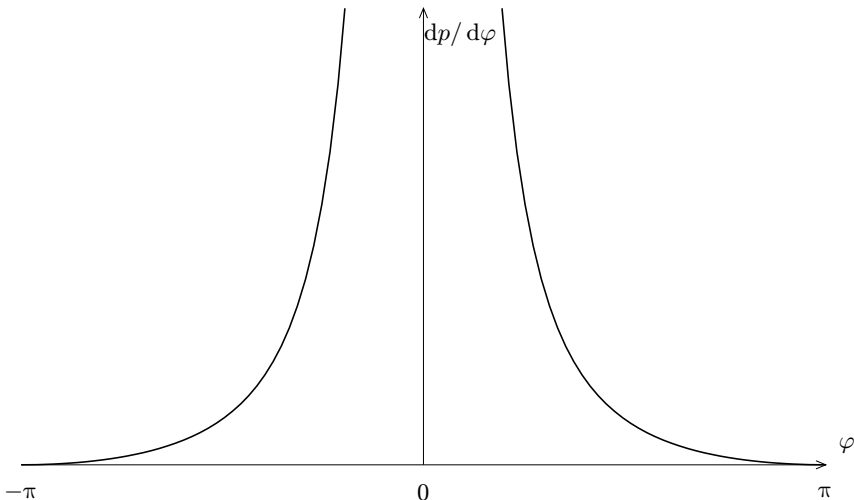
a tudíž podle (13)

$$p(\phi \geq \phi_0) \sim R_m^2 \cotg^2 \frac{\phi_0}{2}.$$

Znaménko nerovnosti se obrátilo, protože  $\cotg$  je klesající funkce. Konečně tak získáváme pravděpodobnost (relativní zastoupení) rozptýlů  $\alpha$ -částice na kompaktním těžkém jádru pod určitým úhlem  $\phi \in (\phi_1, \phi_2)$ .

$$dp(\phi_2 \geq \phi \geq \phi_1) = p(\phi_2 \geq \phi) - p(\phi \geq \phi_1) \sim R_m^2 \left( \cotg^2 \frac{\phi_1}{2} - \cotg^2 \frac{\phi_2}{2} \right). \quad (14)$$

Použijeme-li  $\phi_1 = \phi$  a  $\phi_2 = \phi + d\phi$  (a  $d\phi$  je malé), dostaneme pro podíl  $dp/d\phi$  graf na obrázku 13.



Obr. 13. Výsledný graf

Vidíme tu, že u planetárního modelu drtivá většina nalétávajících  $\alpha$ -částic prolétne skrz bez velkých obtíží. Ale přesto se skutečně některé z nich podstatně odchýlí – byť jejich počet s každým stupněm rychle klesá. Pro malé úhly nám  $dp/d\phi$  odlétá do nekonečna, my tu – jako Rutherford – jen stručně poznamenejme, že se to děje přibližně jako  $\phi^{-4}$  a že je to vina zjednodušujících předpokladů, které jsme využili, zejména představa jediného izolovaného jádra. Pro úhly kolem  $\pi$  jsou však předpovědi poměrně přesné (vliv uvažovaného jádra je dominantní); platí tu, jak si můžete ověřit úpravou rovnice (14),

$$dp(\phi \approx \pi) \sim R_m^2 (\pi - \phi) d\phi. \quad (15)$$

### Bohrův model (1913)

Geigerův-Marsdenův-Rutherfordův objev nebyl úplně vítaný, jakkoliv uznávaný a právem považovaný za přelomový. Znamenal definitivní návrat ke z klasického pohledu podivným planetárním modelům. Prvním člověkem, kterému se podařilo shrnout požadavky na atom do funkčního atomového modelu (byť jen pro atom s jedním elektronem), byl dánský praotec

kvantové mechaniky Niels Bohr. Postuloval existenci *stacionárních stavů* elektronu v atomu, totiž existenci sady přípustných orbit, po nichž se elektron mohl pohybovat. Mechanismus pohybu mezi orbitami neznal, ale navrhl, že frekvence záření vzniklého při takovém přechodu je rovna rozdílu energií dělenému Planckovou konstantou,  $f = \Delta E/h$ . Srovnáním s Rybergovým vzorcem (10) dospěl k vzorci pro energii  $n$ -tého stacionárního stavu ( $n$ -té povolené orbity)

$$E_n = -\frac{hcR}{n^2}.$$

Využitím klasických vztahů získal vztah pro poloměr této dráhy,  $r_n$  a také frekvenci oběhu  $f_n$ . Konečně jako první dokázal určit i přibližnou hodnotu Rydbergovy konstanty. Požadoval tzv. *princip korespondence*, totiž aby systém jinak podřízený neintuitivním zákonům mikrosvětla a stacionárních stavů při zvyšování rozměrů postupně přecházel do klasicky popsatelné oblasti. Pak muselo platit, že pro velká  $n$  (elektron hodně daleko od jádra) byla vyzářená frekvence rovna frekvenci oběhu, přesně jak požadovala klasická elektrodynamika. Opět srovnáním s (10) pak dostal Rydbergovu konstantu pro vzdálený elektron ( $R_\infty$ ). Snadno si dopočítáte, že mu vyšlo

$$R_\infty = \frac{2\pi^2 k^2 m Z^2 e^4}{h^3 c},$$

což bylo ve velmi dobré shodě s experimenty. A tak se téměř na rok přesně po celém století uzavřela jedna kapitola, která začala kdesi ve Fraunhoferově soukromé observatoři. Zároveň se otevřela jiná, snad ještě napínavější, která fyzikům vydržela zas na další století – až dodnes.

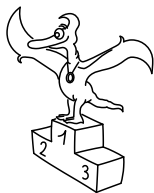
### *Současný kvantověmechanický model*

Po dalším rozvinutí kvantové mechaniky byl Bohrovův model v některých ohledech oprávněn a ve zbylých opraven. Podstatnou změnou oproti Bohrovým myšlenkám bylo rozmazání ostře určených elektronových orbit do většího prostoru<sup>5</sup>, v němž už není předpověditelná přesná poloha elektronu, stanovitelné jsou jen pravděpodobnosti výskytu v nějaké podoblasti. Ukazuje se nicméně, že maximální hustota pravděpodobnosti výskytu je právě na Bohrových orbitách, alespoň co se týče radiální části vlnové funkce. Ale o tom někdy jindy.

### **Úloha VI. S ... atomové modely a Rutherfordův experiment**

- Rozhodněte, zda stabilita (popř. rozměr) saturnského atomového modelu závisí na atomovém čísle  $Z$ .
- Upravte vzorec (15) pro pravděpodobnost rozptylu  $\alpha$ -částice pod velkým úhlem  $\phi$  tak, abyste dostali praktičtější vztah pro pravděpodobnost dopadu na jednotku plochy scintilátoru, a uvažte, jak byste ho využili k určení materiálu ostřelovaného vzorku. Dále odhadněte, jak by se vzorec změnil, pokud bychom neuvažovali centrální náboj  $Ze$  nýbrž  $Z$  rozptýlených elementárních nábojů  $e$  jako třeba v Lenardově modelu.
- V roce 1896 objevil astronom E. C. Pickering ve světle hvězdy  $\zeta$  *Puppis* čáry, které splňovaly vztah (10) pro  $n = 2$  a  $m = 2,5; 3; 3,5; 4; 4,5; \dots$ , tedy i pro polocelá čísla! Vysvětlete tuto zdánlivou nesrovnalost s Bohrovým modelem.
- (Bonus.)** Najděte závislost analogickou rovnicí (14) pro Thompsonův pudinkový model a okomentujte rozdíly. Nebo zkuste (14) upravit tak, aby zahrnovala působení jader všech atomů v tenké fólii. Zkrátka si trochu vyhraje.

<sup>5)</sup> technicky vzato do *celého* prostoru



## Pořadí řešitelů po IV. sérii



### Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	IV	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	3	4	4	3	8	5	31	100	130
1. <i>Patrik Švančara</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	3	–	1	–	4	1	9	59	51
2. <i>Peter Kosec</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	1	–	–	–	4	1	6	59	48
3. <i>Stanislav Fořt</i>	G P. de Coubertina, Tábor	–	–	–	–	–	–	–	0	44	25
4. <i>Tomáš Trégnér</i>	G J. Heyrovského, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	28	14
5. <i>Ondřej Beneš</i>	SPŠ, Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	57	8
6.–7. <i>Alena Harlenderová</i>	Slovanské G, Olomouc	–	–	–	–	–	–	–	0	100	6
<i>Adam Chlapečka</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	86	6
8.–9. <i>Martina Štarhová</i>	G, Šumperk	–	–	–	–	–	–	–	0	45	5
<i>Markéta Švecová</i>	G, Havlíčkův Brod	–	–	–	–	–	–	–	0	50	5

### Kategorie třetích ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	IV	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	3	4	4	3	8	5	31	100	130
1. <i>Petr Ryšavý</i>	G J. Heyrovského, Praha	0	3	4	4	–	6	5	22	69	75
2. <i>Miroslav Rapčák</i>	G, Orlová	1	1	4	4	1	5	–	16	58	69
3. <i>Ján Bogár</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	4	2	4	4	1	7	–	22	72	66
4. <i>Zuzana Dočekalová</i>	G, F. Hajdy, Ostrava	–	3	–	–	2	4	3	12	70	62
5. <i>Veronika Paštyková</i>	G J. Orteny, Kutná Hora	0	1	3	1	2	4	–	11	47	52
6. <i>Tereza Jeřábková</i>	SPŠ a SOU Letohrad	–	3	–	4	4	–	3	14	82	41
7. <i>Jana Bazová</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	1	1	2	–	–	5	–	9	59	40
8. <i>Jakub Klemsa</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	2	1	3	4	3	–	–	13	67	35
9.–10. <i>Kateřina Honzáková</i>	G Jana Keplera, Praha	–	1	–	4	–	–	–	5	73	30
<i>Petra Kňážeková</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	1	1	–	–	–	2	–	4	43	30
11. <i>Tereza Steinhartová</i>	G J. K. Tyla, Hradec Králové	–	–	–	–	–	–	–	0	59	29
12. <i>Petr Cagaš</i>	G, Lesní čtvrť, Zlín	–	–	–	–	–	–	–	0	47	26
13. <i>Lada Peksová</i>	G Ch. Doppl., Zborovská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	67	24
14. <i>Pavel Novotný</i>	G P. de Coubertina, Tábor	–	3	–	–	0	–	–	3	63	17
15. <i>Stanislav Paláček</i>	G M. Kopernika, Bílovec	–	–	–	–	–	–	–	0	62	16
16. <i>Michal Husek</i>	G, Bučovice	–	1	–	1	2	–	–	4	28	15
17.–18. <i>Jan Hoďic</i>	G J. Ressela, Chrudim	–	–	–	–	–	–	–	0	31	10
<i>Viktor Jamrich</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	63	10
19. <i>Michal Müller</i>	G, Jevíčko	–	–	–	–	–	–	–	0	55	6
20. <i>Jan Nevorál</i>	G, Jana Masaryka, Jihlava	–	–	–	–	–	–	–	0	45	5
21. <i>Martin Chudjak</i>	SPŠ Martin	–	–	–	–	–	–	–	0	44	4
22.–23. <i>Vojtěch Dziewicki</i>	SG Dr. Randy, Jablonec n. N.	–	–	–	–	–	–	–	0	100	3
<i>Jiří Keresteš</i>	VOŠ a SPŠ elektrotech., Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	0	100	3
24. <i>Jaroslav Pavela</i>	G F. Palackého, Val. Meziříčí	–	2	–	–	–	–	–	2	67	2

## Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	IV	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	3	4	4	3	8	5	31	100	130
1. Lukáš Labor	G, Třinec	-	2	3	4	3	-	2	14	66	57
2. Karel Kolář	G, Špitálská, Praha	-	-	2	4	1	-	1	8	58	46
3. Lukáš Čimpl	G, Frenštát pod Radhoštěm	1	2	2	4	-	-	-	9	65	42
4. Pavel Malý	G Ch. Doppl., Zborovská, Praha	-	2	-	-	3	-	-	5	72	36
5.-7. Mária Kieferová	G Sv. Františka, Žilina	-	-	-	-	-	-	-	0	78	35
Prabhat Rao Pinnaka		-	4	-	2	3	-	-	9	80	35
Tereza Zábojníková	G, Uherské Hradiště	4	3	4	3	1	-	2	17	54	35
8. Alžběta Pechová	SPŠ strojnická, Vsetín	-	1	3	1	0	-	-	5	44	27
9. Martin Výška	G, Nad Aleji, Praha	-	1	4	5	3	7	6	26	96	26
10.-12. Jana Figulová	G Ludovíta Štúra, Trenčín	-	-	-	-	-	-	-	0	53	20
Michael Hahl	G Ch. Doppl., Zborovská, Praha	-	-	-	-	-	-	-	0	67	20
Jakub Töpfer	G Jana Keplera, Praha	2	1	-	3	0	-	-	6	59	20
13. Jan Humplík	První české G, Karlovy Vary	-	-	-	-	-	-	-	0	73	19
14. Hana Šustková	G, Trutnov	-	-	-	-	-	-	-	0	39	18
15.-16. Katarína Bazová	G Ludovíta Štúra, Trenčín	-	1	-	4	-	-	-	5	67	10
Michal Koutný	G, Masarykovo nám., Třebíč	-	3	-	-	-	-	-	3	100	10
17. Martin Polačko	G, Alejová, Košice	-	-	-	-	-	-	-	0	60	9
18. Václav Obrázek	G Jana Keplera, Praha	-	-	-	-	-	-	-	0	70	7
19.-20. Eva Hašková	G a SOŠ, Úpice	-	-	-	-	-	-	-	0	25	4
Petr Motloch	G P. Bezruč, Frýdek-Místek	-	-	-	-	-	-	-	0	80	4
21.-22. Dana Suchomelová	G Ludovíta Štúra, Trenčín	-	-	-	-	-	-	-	0	100	3
Martina Vaváčková	G P. de Coubertina, Tábor	-	-	-	-	-	-	-	0	100	3
23.-24. Barbora Hanáková		-	-	-	-	1	-	0	1	13	1
Peter Vanya	G Jura Hronca, Bratislava	-	-	-	-	-	-	-	0	17	1

## Kategorie druhých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	IV	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	3	4	4	3	8	5	31	100	130
1. Barbora Drozdová	G Ludovíta Štúra, Trenčín	1	1	-	3	-	3	-	8	53	49
2. Anna Chejnovská	G B. Němcové, Hradec Králov	-	1	-	4	-	7	-	12	68	30
3. Zuzana Bogárová	G Ludovíta Štúra, Trenčín	1	1	-	1	-	3	-	6	44	28
4. Ondřej Maslikiewicz	SPŠ, Hronov	-	-	3	4	0	-	-	7	53	27
5. Jiří Nárožný	G, Boskovice	-	-	-	-	-	-	0	0	83	15
6. Tomáš Pikálek	G, Boskovice	-	2	-	4	-	-	-	6	71	10
7. Nurullah Karakoc		-	-	-	-	-	-	-	0	60	9
8. Barbora Janů	G Jana Keplera, Praha	-	-	-	-	-	-	-	0	38	3
9. Dominika Kalasová	G, Boskovice	-	2	-	-	-	-	-	2	67	2



**FYKOS**

*UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta  
Ústav teoretické fyziky  
V Holešovičkách 2  
180 00 Praha 8*

www: <http://fykos.mff.cuni.cz>

e-mail pro řešení: [fykos-solutions@mff.cuni.cz](mailto:fykos-solutions@mff.cuni.cz)

e-mail: [fykos@mff.cuni.cz](mailto:fykos@mff.cuni.cz)

---

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.