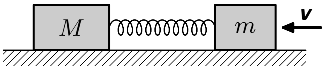
22. ročník, úloha I.1 ... *klouzání a kmitání* *(4 body; průměr 1,69; řešilo 29 studentů)*

Dvě závaží o hmotnostech m a M jsou spojena pružinou o tuhosti k a leží na hladké podložce (tření můžeme zanedbat). Tělesu m udělíme rychlost v (viz obrázek 1). Jaká bude nejkratší vzdálenost mezi tělesy a kdy jí dosáhnou?



Obr. 1

V ročenkách kanadské FO našel Honza Prachař.

Protože na soustavu nepůsobí žádné vnější síly, bude se její hmotný střed pohybovat konstantní rychlostí a soustava s ním spojená je tedy inerciální. A protože v tomto vztažném systému kmitá soustava na místě, budeme problém řešit právě v ní.

Hmotný střed se pohybuje takovou rychlostí v', že

$$(m+M)\,v' = mv\,, \qquad v' = \frac{mv}{m+M}\,.$$

V této nové vztažné soustavě budou rychlosti obou těles

$$v'_m = v - v' = \frac{Mv}{m+M} \qquad \text{a} \qquad v'_M = v' = \frac{mv}{m+M}\,.$$

V okamžiku udělení rychlosti menšímu tělesu je potenciální energie soustavy nulová a kinetická maximální. V okamžiku, kdy budou k sobě tělesa nejblíže, bude naopak kinetická energie nulová a potenciální maximální.

Pro kinetickou energii soustavy na začátku máme

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}\,m{v'_m}^2 + \frac{1}{2}\,M{v'_M}^2 = \frac{1}{2}\,\frac{mMv^2}{m+M}\,.$$

Pokud je y_0 klidová délka pružiny a y_min hledaná minimální, potom ze zachování energie plyne

$$E_\mathrm{k} = \tfrac{1}{2}k(y_0 - y_\mathrm{min})^2\,,$$

$$y_\mathrm{min} = y_0 - v\sqrt{\frac{mM}{k\,(m+M)}} = y_0 - v\sqrt{\frac{\mu}{k}}\,,$$

kde $\mu = mM/(m+M)$ je tzv. redukovaná hmotnost. Ta nám umožní řešit druhou část úlohy jako problém jednoho tělesa.

Označme polohy hmotných středů obou těles v těžišťové soustavě x_m a x_M. Tedy $mx_m = Mx_M$. Síla působící na těleso je úměrná protažení pružiny $F = k(x_m + x_M)$. Z druhého Newtonova zákona máme

$$m\ddot{x}_m = -k\,(x_m + x_M) = -kx_m\left(1 + \frac{m}{M}\right)\,,$$

$$\mu\ddot{x}_m = -kx_m\,,$$

což je rovnice jednoduchého harmonického oscilátoru. Námi hledaný čas je zřejmě čtvrtina periody jeho kmitu, tedy

$$t = \frac{1}{4}\cdot 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{k}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{mM}{k(m+M)}}\,.$$

Jan Hermann
`honzah@fykos.mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.