22. ročník, úloha I . 3 ... už mě nehoupej *(4 body; průměr 1,10; řešilo 21 studentů)*

Kačenka se rozhoupává na houpačce následujícím způsobem. Při největší výchylce houpačky se přikrčí, a když je houpačka v nejnižším bodě, opět se postaví. Tyto pohyby neustále opakuje. Poměr vzdálenosti těžiště Kačenky od osy otáčení při pokrčení a při stání je $\sqrt[12]{2} \doteq 1{,}06$. *Kolikrát se Kačenka zhoupne, než se amplituda houpání zdvojnásobí?*

Z asijské olympiády přinesl Honza Prachař

Jak se bude Kačenka pohybovat? Ze zadání víme, že Kačenka začíná svůj pohyb v nejvyšší poloze, kde se přikrčí. Zhoupne se, v dolní úvrati se postaví a vychýlí se do nové, snad vyšší polohy. Nyní by bylo užitečné si uvědomit, co se zachovává v různých částech trajektorie.

Kačenku budeme považovat za hmotný bod ve vzdálenosti r od osy otáčení o. Při cestě Kačenky z nejvyšší polohy (tj. z bodu A do bodu B) se jistě bude zachovávat energie, jelikož se Kačka ani nezvedá ani si nesedá. Označíme-li úhel původního vychýlení Kačky od svislé roviny ϑ_1, můžeme napsat zákon zachování energie ve tvaru

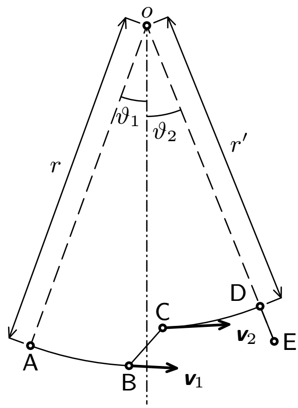
$$mgr\,(1 - \cos\vartheta_1) = \tfrac{1}{2}mv_1^2\,,$$

odkud můžeme vyjádřit v_1 jako

$$v_1 = \sqrt{2gr\,(1 - \cos\vartheta_1)}\,. \tag{1}$$

V dolní úvrati (mezi body B a C) ale již není možno použít zákon zachování energie, resp. bylo by to možné, ale musela by se započítat také práce vykonaná proti odstředivé síle. Naopak veškeré síly, kterými Kačka působí na houpačku, a taktéž i síly tíhové mají nyní nulový moment vzhledem k ose otáčení, proto platí zákon zachování momentu hybnosti. Můžeme tedy psát

$$v_1 r = v_2 r'\,. \tag{2}$$



Obr. 1. Kačenčino houpání

Ve vzestupné části trajektorie (mezi C a D) Kačka nekoná žádnou práci, a proto bude platit analogicky k sestupné části

$$v_2 = \sqrt{2gr'\,(1 - \cos\vartheta_2)}\,, \tag{3}$$

a tak se Kačka odchýlí o úhel ϑ_2. V krajní poloze (cesta z bodu D do E) se nemůže měnit výchylka, protože Kačka silově působí v ose závěsu.

Pokud se nám podaří nalézt vztah pro změnu výchylky během jednoho kyvu, neměl by být problém zjistit, po kolika zhoupnutích se zdvojnásobí počáteční výchylka. Dosazením z (1) a (3) do (2) dostáváme

$$\sqrt{2gr\,(1 - \cos\vartheta_1)} \cdot r = \sqrt{2gr'\,(1 - \cos\vartheta_2)} \cdot r'\,.$$

Nyní provedeme aproximaci $\cos x \approx 1 - x^2/2$, budeme tedy uvažovat menší výchylky. Aproximace je oprávněná, protože pro výchylku 45° je chyba menší než 5 %.

Jednoduchou úpravou se dostáváme k rovnici

$$\vartheta_2 = \left(\frac{r}{r'}\right)^{3/2} \vartheta_1\,.$$

My však víme, že $r/r' = \sqrt[12]{2}$, po dosazení vychází vztah

$$\vartheta_2 = \sqrt[8]{2}\,\vartheta_1\,,$$

a protože jde o geometrickou řadu, víme, že se po osmi zdvizích v dolní úvrati výchylka zdvojnásobí.

Kačenka tedy zdvojnásobí svou maximální výchylku po čtyřech periodách.

Lukáš Ledvina
`lukasl@fykos.mff.cuni.cz`