Úloha .E ... *copak nám to tady smrdí?*

Změřte rozdíl hustot čerstvého a zkaženého vejce a zjistěte i její časovou závislost! Pokuste se také vysvětlit své výsledky a zvažte užití statistického zpracování.

Tip: Vejce se rychle zkazí například na sluníčku.

Na zajímavou vlastnost upozornil Kája Tůma. Pokud potřebujete zkažené vejce, napište mu.

Teorie

Při snášce se sníží teplota vejce asi o dvacet stupňů, takže objemovou kontrakcí vody se uvnitř vytvoří podtlak a vejce nasaje vzduch. Vzniklá vzduchová bublina se časem zvětšuje, protože se vypařují plyny (vodní pára, oxid uhličitý). Plyny unikají pórovými kanálky, jichž se ve skořápce nachází na 10 tisíc, ale kapaliny jimi neproniknou. Změny teploty a vlhkosti neovlivňují pevnou skořápku; objem vejce se zachovává. Nepropustnost skořápky pro kapalnou vodu dovoluje měřit objem ponořením do vody, protože si můžeme být jisti, že nevnikne do vejce, a nezmění tak měřenou hustotu. Povrch vejce a pórové kanálky pokrývá vrstvička lipidů a bílkovin – kutikula, která částečně chrání vejce před mikroorganismy. Umytí vejce, které kutikulu setře, zvyšuje kazivost a vypařování vody (viz tabulka). Proto se vejce někde po umytí olejují.

Zvyšování hmotnostního rozdílu oproti čerstvému vejci: Úprava povrchu snižuje změnu hmotnosti až dvojnásobně, stejně jako teplota a vzdušná vlhkost. Podle W. J. Stadelmana: *Egg Science and Technology*.

čas	10 °C vysoká vlhkost		24 °C nízká vlhkost	
	olej [g]	mytá [g]	olej [g]	mytá [g]
2 h	0,018	0,025	0,029	0,041
4 h	0,032	0,048	0,060	0,085
6 h	0,042	0,064	0,077	0,113
1 d	0,107	0,172	0,197	0,328
2 d	0,167	0,228	0,313	0,572
3 d	0,212	0,374	0,411	0,795
4 d	0,260	0,469	0,506	1,017
5 d	0,309	0,575	0,604	1,256

V otázce vypařování vody odkazujeme na úlohu 14. III. 4 a také 16. VI. E, k níž podotýkáme, že měříme vajíčko a nikoliv chrastící krabičku, takže předpokládáme lineární závislost.

Ujasněme si ještě, že z nízké hustoty vejce obecně nelze dovozovat jeho zkaženost, stejně jako z faktu zkaženosti nevyplývá, jakou má hustotu. Pokud pravidelně měříme hustoty zkaženého a poživatelného vejce, nemusíme pozorovat rozdíl přesahující nejistotu měření.

Nejistotu měření veličiny m značíme Δ_m, relativní nejistotu $\delta_m \equiv \Delta_m/m$. Průměrná hustota se vypočítá jako podíl hmotnosti a objemu $\varrho = \varrho(m, V)$. Uvažujme zcela přesné měření hmotnosti $\Delta_m = 0$; pak se nejistotu výsledné funkce odhadneme pomocí prvního diferenciálu

$$\Delta_\varrho = \frac{\mathrm{d}\varrho(V)}{\mathrm{d}V}\,\Delta_V\,,$$

tedy v okolí měření nahradíme funkci její tečnou. Analogicky postupujeme pro m. Zásadní tvrzení, které dovoluje vůbec odhadnout nejistotu funkce více proměnných, tvrdí, že nejistoty se sčítají kvadraticky. Pro součet dvou veličin jsou příslušné derivace jednotkové, takže $\Delta_{f(x,y)} = \sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2}$. Pro podíl $\varrho = m/V$ z toho plyne

$$\delta_\varrho = \sqrt{\delta_V^2 + \delta_m^2}\,.$$

Obvykle má nejistota dvě části: chybu měřidla (tu u hmotnosti neuvažujeme) a chybu statistickou $\Delta_y^2\,(n-1) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2$, které se opět sčítají kvadraticky.

Měření

Měřili jsme nečištěná vejce Kaufland, z podniku živočišné výroby Ovus. Jedno vejce mělo od počátku měření puklinu, která se projevila na dvojnásobném výparu. Některá vejce obkružovaly „rýhy“ ztenčené skořápky.

Hmotnost jsme měřili na digitální váze s přesností 0,01 g, kterou vzhledem k statistické nejistotě a nejistotě objemu neuvažujeme. K měření objemu menších těles se používá zařízení zvané pyknometr; skládá se z dvou nádob zabroušených přesně tak, aby do sebe zapadly. Z vrchní nádoby při šroubování vytéká voda ocejchovanou trubičkou. Pokud měříme hmotnost pyknometru nejprve jen s kapalinou známé hustoty a poté s měřeným tělesem, jednoduše vypočítáme objem s vysokou přesností. To však patří do říše divoké fantazie, protože se musíme spokojit s odměrným válcem přesnosti 1 ml.

Měřili jsme 10 vajec po dobu osmi dní v rozmezí teplot 16–24 °C (viz tabulka). Za veličinu vyjadřující úbytek hmotnosti jsme vybrali relativní úbytek $\mu \equiv 1 - m(t)/m(0)$, kterou ve smyslu výše uvedeného nezatěžuje žádná chyba.

Relativní úbytek hmotnosti a jeho nejistota v čase.

t/d	$\mu(t)/10^{-3}$	$\Delta_{\mu(t)}/10^{-3}$	t/d	$\mu(t)/10^{-3}$	$\Delta_{\mu(t)}/10^{-3}$
0,00	0,00	0,00	3,73	6,1	0,8
0,15	0,42	0,13	4,04	6,4	0,9
0,61	1,24	0,20	4,75	7,2	1,0
0,75	1,44	0,18	5,11	8,3	1,2
0,98	1,68	0,21	5,75	9,4	1,3
1,23	1,88	0,26	5,91	9,8	1,4
1,63	2,38	0,33	6,18	10,2	1,5
1,87	2,61	0,37	6,73	11,2	1,6
2,21	2,87	0,38	6,90	11,6	1,6
2,57	3,97	0,58	7,19	12,2	1,7
2,92	4,64	0,66	7,61	12,9	1,7
3,29	5,33	0,72	7,88	13,3	1,8

Lineární regrese

Za předpokladu, že v lineární závislosti $y = kx$ veličinu x_i měříme přesně a veličině y_i odpovídá rozptyl σ_i^2, můžeme se domnívat, že součet odchylek

$$S(k) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - y)^2$$

nabývá minimální hodnoty[1]. Tím bychom přiznali všem výsledkům stejnou váhu, nicméně bychom samozřejmě chtěli, aby přesnější výsledky měly váhu větší, a proto zavedeme „přirozený“ váhový faktor $w_i = 1/\sigma_i^2$. Funkce

$$S(k) = \sum_{i=1}^{n} w_i (y_i - kx_i)^2$$

nabývá minima pro

$$k = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i^2}$$

a rozptyl určíme podle vztahu

$$\sigma_k^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i^2}\,.$$

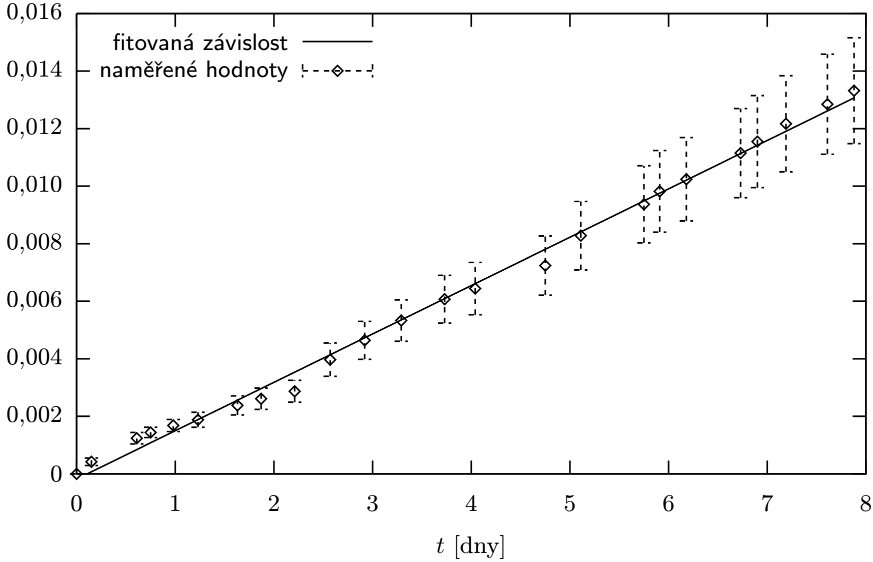
Tento postup také vysvětluje, proč tzv. linearizace grafu závislosti má pouze informativní hodnotu. Při prokládání přímky podle oka přece neuvažujeme váhové faktory!

Dosazením získáme výsledek

$$k = \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\mu_i t_i}{\Delta_{\mu_i}^2}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{t_i^2}{\Delta_{\mu_i}^2}} \pm \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{t_i^2}{\Delta_{\mu_i}^2} \right)^{-1/2} \right) = (1{,}61 \pm 0{,}05) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{d}^{-1}\,.$$

[1] Předkládaný postup má hlavně didaktický cíl. Míjíme podrobnosti, např. pokud bychom měřili nepřesně i x_i, počítali bychom vzdálenost bodu (x_i, y_i) a přímky $y = kx$ pod úhlem daným nejistotami.

Z měření objemu pak snadno dopočítáme, že se hustota snížila z $\varrho(0) = (1058 \pm 22)\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ na $\varrho(8\,\mathrm{d}) = (1043 \pm 23)\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, přičemž největší nejistota pochází z nepřesného měření objemu.



Obr. 1. Graf závislosti relativního úbytku hmotnosti na čase

Poznámky k došlým řešením

Podotýkáme, že narozdíl od řešitelů měřících jedno určité vejce, se tento výsledek vztahuje na „standardní vejce“. To také opravňuje opravování výsledků řešitelů: při stejných podmínkách (teplota a vlhkost) můžeme zavrhnout nepřesná měření řešitelů, pokud se liší víc než krajní chybou $3\sigma_\varrho$.

Autor děkuje panu Ing. L. Němcovi z KDF MFF UK za zapůjčení váhy.

Jakub Michálek
jmi@fykos.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.