22. ročník, úloha I . S ... *princip ekvivalence* *(6 bodů; průměr 2,15; řešilo 13 studentů)*

a) Jaké by musely nastat podmínky, aby Galileův pokus nevyšel? Šikmá věž v Pise je vysoká $h = 55$ m, předpokládejte, že obě koule mají poloměr $R = 8$ cm a že jedna koule je vyrobena z olova o hustotě $\varrho = 11300\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Jakou hustotu by musela mít druhá koule, aby rozdíl v časech dopadu obou koulí byl větší než $\Delta T = 0{,}3$ s?

b) S jakou přesností ověřuje původní Eötvösovo měření rovnosti poměru pro neutrony a protony, pokud ve dřevě tvoří neutrony 50 procent hmotnosti, zatímco v platině 60 procent hmotnosti? Zanedbejte hmotnost elektronů a vazebné energie.

c) Ověřte užívaný předpoklad o tom, že v Budapešti je g_s' v porovnání s g zanedbatelné.

Zadali autoři seriálu.

Galileova chyba

Rozdílná doba dopadu je způsobena rozdílným odporem vzduchu, který působí na obě koule. Napíšeme-li si pohybovou rovnici koule, na kterou kromě gravitační síly působí ještě odporová síla prostředí daná klasickým Newtonovým vztahem, dostáváme

$$m\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - \frac{1}{2}CS\varrho_{\mathrm{v}}v^2\,, \tag{1}$$

kde m značí hmotnost koule, v její rychlost, g gravitační zrychlení, C součinitel odporu, S plochu průřezu koule a ϱ_{v} odpor prostředí (vzduchu).

Podělením hmotností a vyjádřením průřezu koule a jejího objemu pomocí poloměru koule R a její hustoty ϱ dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \frac{3C\varrho_{\mathrm{v}}v^2}{8R\varrho}\,. \tag{2}$$

Máme v podstatě dvě možnosti, jak tuto rovnici řešit – jednou z nich je numerické řešení, které jsme měli možnost vyzkoušet si v minulém ročníku seriálu. Touto cestou se (až na jednu výjimku) ubírala všechna principiálně správná řešení. Ukažme si tedy druhou možnost.

Získanou diferenciální rovnici můžeme řešit separací proměnných. Derivaci rychlosti podle času $\mathrm{d}v/\,\mathrm{d}t$ chápeme jako „zlomek“, rovnici vhodně „upravíme“ na

$$\frac{\mathrm{d}v}{g - \dfrac{3C\varrho_{\mathrm{v}}v^2}{8R\varrho}} = \mathrm{d}t \tag{3}$$

a nyní obě dvě strany integrujeme – levou podle rychlosti, pravou podle času, tedy tak, jak nám to naznačují diferenciály (členy $\mathrm{d}v$ a $\mathrm{d}t$). Dostáváme

$$\frac{\operatorname{argtgh}\left(\sqrt{\dfrac{3C\varrho_{\mathrm{v}}v}{8gR\varrho}}\right)}{\sqrt{\dfrac{3C\varrho_{\mathrm{v}}g}{8R\varrho}}} = t\,. \tag{4}$$

Z této rovnice můžeme vyjádřit rychlost jako funkci času

$$v(t) = \sqrt{\frac{8gR\varrho}{3C\varrho_{\mathrm{v}}}}\ \mathrm{tgh}\left(t\sqrt{\frac{3C\varrho_{\mathrm{v}}g}{8R\varrho}}\right)\,. \tag{5}$$

Integrací podle času dostáváme závislost polohy koule na čase

$$x(t) = \frac{8R\varrho}{3C\varrho_\mathrm{v}} \ln\cosh\left(t\sqrt{\frac{3C\varrho_\mathrm{v}g}{8R\varrho}}\right) . \qquad (6)$$

Zpětným přechodem pak dostáváme závislost *času na poloze koule*

$$t = \sqrt{\frac{8R\varrho}{3C\varrho_\mathrm{v}g}} \operatorname{argcosh}\exp\left(\frac{3C\varrho_\mathrm{v}x}{8R\varrho}\right) . \qquad (7)$$

Díky tomuto vzorci dokážeme určit, za jaký čas daná koule urazí vzdálenost x, což je přesně to, co při našem řešení potřebujeme. Protože nyní známe pro první kouli všechny konstanty (jsou uvedeny v tabulce), můžeme vypočítat čas, za který dopadne první koule, prostým dosazením a dostáváme

$$t_1 = 3{,}356\,\mathrm{s} .$$

Hodnoty konstant pro první kouli

Označení	Hodnota	Poznámka
R	$0{,}08\,\mathrm{m}$	poloměr koule
ϱ	$11300\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$	hustota koule
C	$0{,}48$	součinitel odporu
ϱ_v	$1{,}29\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$	hustota vzduchu
g	$9{,}8\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$	gravitační zrychlení
x	$55\,\mathrm{m}$	výška věže

Aby mohl Galileo zaregistrovat požadovaný rozdíl v době pádu, musí druhá koule buď mít větší hustotu, a tedy padat rychleji, nebo menší hustotu a spadnout za delší dobu.

V případě, že bychom odpor vzduchu vůbec neuvažovali, spadlo by těleso volným pádem za čas

$$t = \sqrt{\frac{2x}{g}} = 3{,}349\,\mathrm{s} .$$

Proto není možné, aby Galileo zaregistroval nějaké těleso dříve než olověnou kouli, hledaná hodnota hustoty tedy bude nižší než $11300\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$. V našem případě můžeme buď všechno počítat ručně dosazováním různých hustot do vztahu (7), nebo můžeme využít sílu některého tabulkového kalkulátoru (např. Excelu či OpenCalcu). Napíšeme si výše uvedený výraz jako funkci parametru ϱ a sledujeme chování výsledku v závislosti na zadané hustotě. Po několika málo odhadech zjistíme, že hledaná kritická hodnota hustoty, při které je rozdíl časů dopadů alespoň požadovaných $0{,}3\,\mathrm{s}$, je rovna $296\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$. Pohledem do tabulek zjišťujeme, že materiály s dostatečně malou hustotou jsou například balzové dřevo, korek či nepříliš namrzlý sníh. Galileo by tedy alespoň v principu mohl uspořádat experiment tak, aby byl schopen v čase dopadu obou koulí zaregistrovat rozdíl.

Eötvösovo měření

Pomocí horního indexu budeme rozlišovat, zdali se jedná o protony či neutrony, pomocí dolního, zdali se jedná o gravitační či inerciální hmotnost. Označme dále N_1 počet nukleonů v tělese ze dřeva a N_2 počet nukleonů v tělese z platiny.

Zanedbáváme-li hmotnosti elektronů a vazebné energie, pak jsou obě hmotnosti aditivní (tedy hmotnost dvou těles je rovna součtu hmotností obou) a naměřenou rovnost gravitační a setrvačné hmotnosti obou těles můžeme zapsat jako

$$\frac{N_1(0{,}5m_\mathrm{g}^\mathrm{p}+0{,}5m_\mathrm{g}^\mathrm{n})}{N_1(0{,}5m_\mathrm{i}^\mathrm{p}+0{,}5m_\mathrm{i}^\mathrm{n})}-\frac{N_1(0{,}4m_\mathrm{g}^\mathrm{p}+0{,}6m_\mathrm{g}^\mathrm{n})}{N_1(0{,}4m_\mathrm{i}^\mathrm{p}+0{,}6m_\mathrm{i}^\mathrm{n})}=0\pm 10^{-9}\,. \tag{8}$$

První zlomek je poměr gravitační a setrvačné hmotnosti tělesa ze dřeva, využili jsme toho, že v tomto tělese je $0{,}5N_1$ protonů, a zmíněné aditivity obou hmotností. Tuto rovnost můžeme upravit na

$$\begin{aligned}\frac{m_\mathrm{g}^\mathrm{p}+m_\mathrm{g}^\mathrm{n}}{m_\mathrm{i}^\mathrm{p}+m_\mathrm{i}^\mathrm{n}}-\frac{2m_\mathrm{g}^\mathrm{p}+3m_\mathrm{g}^\mathrm{n}}{2m_\mathrm{i}^\mathrm{p}+3m_\mathrm{i}^\mathrm{n}}&=0\pm 10^{-9}\,,\\ \frac{(m_\mathrm{g}^\mathrm{p}+m_\mathrm{g}^\mathrm{n})(2m_\mathrm{i}^\mathrm{p}+3m_\mathrm{i}^\mathrm{n})-(2m_\mathrm{g}^\mathrm{p}+3m_\mathrm{g}^\mathrm{n})(m_\mathrm{i}^\mathrm{p}+m_\mathrm{i}^\mathrm{n})}{(2m_\mathrm{i}^\mathrm{p}+3m_\mathrm{i}^\mathrm{n})(m_\mathrm{i}^\mathrm{p}+m_\mathrm{i}^\mathrm{n})}&=0\pm 10^{-9}\,,\\ \frac{m_\mathrm{i}^\mathrm{n}m_\mathrm{g}^\mathrm{p}-m_\mathrm{i}^\mathrm{p}m_\mathrm{g}^\mathrm{n}}{(2m_\mathrm{i}^\mathrm{p}+3m_\mathrm{i}^\mathrm{n})(m_\mathrm{i}^\mathrm{p}+m_\mathrm{i}^\mathrm{n})}&=0\pm 10^{-9}\,,\\ \frac{m_\mathrm{i}^\mathrm{n}m_\mathrm{i}^\mathrm{p}}{(2m_\mathrm{i}^\mathrm{p}+3m_\mathrm{i}^\mathrm{n})(m_\mathrm{i}^\mathrm{p}+m_\mathrm{i}^\mathrm{n})}\left(\frac{m_\mathrm{g}^\mathrm{p}}{m_\mathrm{i}^\mathrm{p}}-\frac{m_\mathrm{g}^\mathrm{n}}{m_\mathrm{i}^\mathrm{n}}\right)&=0\pm 10^{-9}\,.\end{aligned} \tag{9}$$

Protože hmotnosti protonů a neutronů jsou v podstatě stejné, můžeme položit $m_\mathrm{i}^\mathrm{p}=m_\mathrm{i}^\mathrm{n}$. V tom případě je ale hodnota prvního zlomku na levé straně rovnice 1/10 a dostáváme

$$\left(\frac{m_\mathrm{g}^\mathrm{p}}{m_\mathrm{i}^\mathrm{p}}-\frac{m_\mathrm{g}^\mathrm{n}}{m_\mathrm{i}^\mathrm{n}}\right)=0\pm 10^{-8}\,. \tag{10}$$

Původní Eötwösovo měření tedy ověřuje rovnost gravitační a setrvačné hmotnosti protonů a neutronů s přesností 10^{-8}, tedy o řád nižší. Povšimněte si prosím, že tento odhad je založen na faktu, že hmotnosti protonů a neutronů jsou přibližně stejné. V případě, že by se výrazněji lišily, dostali bychom ještě hrubší odhad.

Výlet do Budapešti

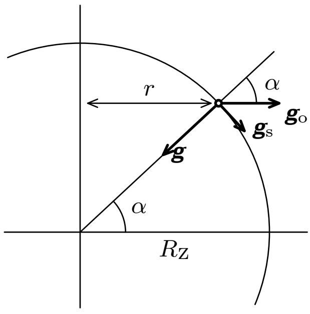
Tečná složka gravitačního zrychlení je způsobena odstředivou silou rotace Země kolem své osy, úhlovou rychlost rotace Země kolem své osy označíme ω.

V označení z obrázku 1 je velikost odstředivého zrychlení rovna

$$g_\mathrm{o}=\omega^2 r=\omega^2 R_\mathrm{Z}\cos\alpha\,. \tag{11}$$

Nás zajímá složka kolmá ke směru gravitačního zrychlení, tedy

$$g_\mathrm{s}'=g_\mathrm{o}\sin\alpha=\omega^2 R_\mathrm{Z}\cos\alpha\sin\alpha\,. \tag{12}$$



Obr. 1. Gravitační a odstředivé zrychlení

Dosadíme-li sem tabulkové hodnoty poloměru Země, její úhlové rychlosti a zeměpisnou šířku Budapešti $\alpha\approx 47^\circ$, dostáváme hodnotu

$$g_\mathrm{s}'=0{,}017\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}\,.$$

Kolmá složka tíhového zrychlení je tedy v Budapešti více než 500krát menší než složka normálová, což jsme chtěli ukázat.

Pavel Motloch
pavel@fykos.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.