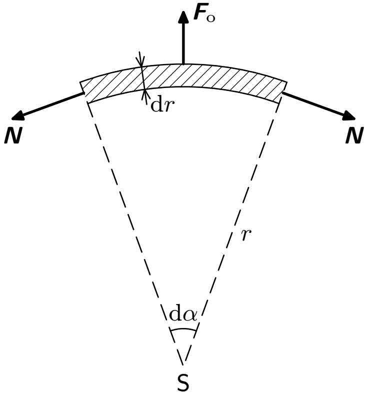
22. ročník, úloha IV . 3 ... *vlček neboli káča* *(4 body; průměr 3,15; řešilo 13 studentů)*

Inženýři v NASA chtějí využít setrvačníků jako úložiště energie pro družice. Poraďte jim, jakou maximální energii mohou uložit do rotujícího válce o poloměru r. Na jakou maximální úhlovou rychlost ω lze roztočit setrvačník, než praskne?

Na podobný problém narazil Robin.



Obr. 1. Působení sil na vrstvičku setrvačníku

Vyřešení této úlohy spočívá v nalezení mezní odstředivé síly, aby nebyla překročena mez pevnosti materiálu v tahu. Komplexní řešení není snadné.

Nejdříve je dobré se podívat, co se stane, pokud překročíme mezní úhlovou rychlost. Po překročení mezní úhlové rychlosti dojde ke vzniku praskliny na obvodu válce. Tím se celý válec dostane do nestabilního stavu a prasklina se začne šířit směrem ke středu, až celý setrvačník praskne.

Chceme-li vypočítat spodní odhad energie uložitelné do setrvačníku, je možné zanedbat radiální napětí. V tomto modelu rozřežeme setrvačník na tenké válcové slupky. Na každou slupku působí jednak odstředivá síla, dále pak také tangenciální napětí a nakonec také nenulová radiální síla. Pro tento dolní odhad zanedbáváme výše uvedenou radiální sílu.

Je zřejmé, že výsledná uložitelná energie bude větší než tento odhad, protože radiální složka napětí by pomohla udržení válce v celistvosti.

Označme l výšku válce, R poloměr válce, r aktuální poloměr slupky respektive integrační proměnnou, ϱ hustotu materiálu, σ_m mez pevnosti v tahu a ω úhlovou rychlost rotujícího setrvačníku.

Nyní budeme uvažovat pouze výsek z pláště válce odpovídající úhlu $\mathrm{d}\alpha$ (viz obrázek 1. Na vyšrafovanou část působí odstředivá síla o velikosti

$$\mathrm{d}F_\mathrm{o} = \omega^2 r \,\mathrm{d}m\,, \qquad \mathrm{d}m = \varrho l r \,\mathrm{d}\alpha \,\mathrm{d}r\,,$$

kde ω je úhlová rychlost setrvačníku. Dále na tento element působí tahová síla N v tangenciálním směru. Ze silového trojúhelníku je vidět

$$\mathrm{d}F_\mathrm{o} = N \,\mathrm{d}\alpha\,.$$

Odtud můžeme odvodit výraz pro tahovou sílu ve slupce

$$N = \omega^2 r^2 \varrho l \,\mathrm{d}r\,.$$

Nás ovšem zajímá napětí $\sigma = N/S$, kde $S = l\,\mathrm{d}r$ je průřez uvažované slupky.

$$\sigma = \omega^2 r^2 \varrho\,. \tag{1}$$

Zde již stačí pouze dosadit za σ mezní napětí σ_m. Z výrazu (1) je vidět, že napětí s rostoucí vzdáleností od středu roste. Protože nás zajímá, kdy se roztrhne vnější plášť, dosazujeme $r = R$.

Víme, že pro energii setrvačníku platí $E = I\omega^2/2$ a pro moment setrvačnosti válce $I = mR^2/2$. Celková energie uložitelná do setrvačníku je

$$E = \tfrac{1}{4} mR^2\omega^2 \,. \tag{2}$$

Za ω^2 lze dosadit ze vztahu (1) a uvážíme-li navíc, že $V = m/\varrho$, můžeme výsledek psát v elegantním tvaru

$$E_{\min} = \tfrac{1}{4} V\sigma_{\mathrm{m}} \,,$$

kde V je objem setrvačníku.

Druhé možné řešení spočívá ve vnímání válce jako dvou polovin, které se od sebe snažíme odtrhnout. Vypočteme celkovou sílu, jakou jsou od sebe při rotaci odtrhávány obě poloviny. Zde provedeme krok, který zaručí, že půjde o horní odhad. Budeme předpokládat, že síla je po celém průřezu konstantní, což nejspíše není pravda, protože u středu bude válec namáhán méně než na obvodu.

Další postup je zřejmý. Nejdříve vypočteme odstředivou sílu působící na jednotlivý trojúhelníkový element. To je integrál z odstředivých sil působících na jednotlivé slupky. Vypočteme proto nejdříve diferenciál síly

$$\mathrm{d}^2 F_{\mathrm{o}} = \omega^2 r \,\mathrm{d}m \,, \qquad \mathrm{d}m = \varrho l r \,\mathrm{d}\alpha \,\mathrm{d}r \,.$$

Chceme-li vypočítat sílu působící na výše zmíněný trojúhelníkový element středového úhlu $\mathrm{d}\alpha$, uvědimíme si, že platí $\mathrm{d}F_{\mathrm{o}} = \int \mathrm{d}^2 F_0$ a můžeme psát

$$\mathrm{d}F_{\mathrm{o}} = \varrho\omega^2 l \,\mathrm{d}\alpha \int_0^R r^2 \,\mathrm{d}r = \tfrac{1}{3}\varrho\omega^2 l R^3 \,\mathrm{d}\alpha \,.$$

Tím jsme vypočetli velikost odtrhávající síly působící na smyšlenou rovinu χ. Síla $\mathrm{d}F_{\mathrm{o}}$ však svírá s touto rovinou úhel α. Skutečná síla odtrhávající dvě poloviny válce je však pouze průmět $\mathrm{d}F_{\mathrm{o}}$ do směru kolmého na χ. Musíme tedy integrovat průmět síly $\mathrm{d}F_{\mathrm{o}}$ do roviny kolmé na χ přes celý objem válce. Tím nám vyjde celková síla odtrhávající obě poloviny válce od sebe.

$$F_{\mathrm{o}} = \int_0^{\pi} \sin\alpha \,\mathrm{d}F_{\mathrm{o}} = \tfrac{1}{3}\varrho\omega^2 l R^3 \int_0^{\pi} \sin\alpha \,\mathrm{d}\alpha = \tfrac{2}{3}\varrho\omega^2 l R^3 \,.$$

Protože předpokládáme konstantní napětí na rovině χ, můžeme položit $\sigma_{\mathrm{m}} = F_{\mathrm{o}}/S$, kde $S = 2Rl$ je plocha roviny χ.

$$\sigma_{\mathrm{m}} = \tfrac{1}{3}\varrho\omega^2 R^2 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 R^2 = \frac{3\sigma_{\mathrm{m}}}{\varrho} \,.$$

Toto můžeme rovnou dosadit do vztahu pro energii (2). Využijeme-li dále $V = m/\varrho$, dostáváme

$$E_{\max} = \tfrac{3}{4} V\sigma_{\mathrm{m}} \,.$$

Do setrvačníku lze uložit energii E, pro kterou platí

$$\tfrac{1}{4} V\sigma_{\mathrm{m}} < E < \tfrac{3}{4} V\sigma_{\mathrm{m}} \,.$$

Pro celkové řešení problému by bylo nutné zavést vektorové pole posunutí, což jsou vektory, které mají počátek v klidové poloze nějakého bodu a koncový bod je totožný s polohou bodu po deformaci. Dále ze znalosti tohoto pole posunutí lze jeho derivací získat radiální a tečnou složku deformace. Toto již tensorové pole lze přetransformovat pomocí tensoru pružnosti na tensor napětí a zkoumat, kdy složky tensoru napětí přesáhnou mez pružnosti a setrvačník praskne. Toto řešení je však složité a ne vždy intuitivní.

Ještě pár poznámek k došlým řešením. Všechna řešení byla v podstatě správně. Chyběl v nich jedině rozbor, zdali jde o horní, či dolní odhad uložitelné energie respektive poznámka o zanedbáních, neuvažovaných vlivech a jiných předpokladech.

Lukáš Ledvina
`lukasl@fykos.mff.cuni.cz`