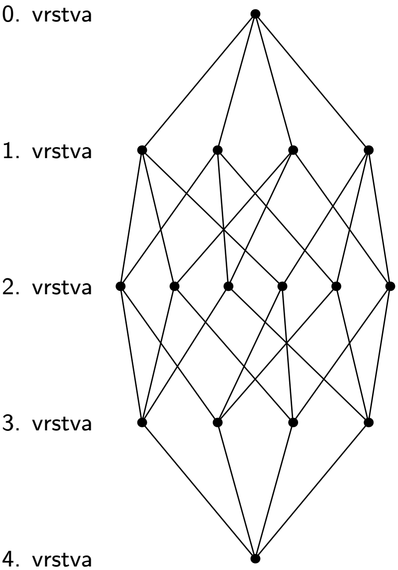
22. ročník, úloha VI . 1 ... *odpor je marný* *!!! chybí statistiky !!!*

Vypočítejte odpor n-rozměrné krychle mezi dvěma nejvzdálenějšími vrcholy (ty o souřadnicích $(0,0,\dots,0)$ a $(1,1,\dots,1)$). Zkuste začít od trojrozměrné a použijte stejný postup.

Přednesl Lukáš Ledvina.

V této úloze bylo asi nejtěžší si celou situaci správně představit. K tomu je dobré nakreslit si obrázek.



Obr. 1. Čtyřrozměrná krychle

V zadání nebylo řečeno, že se krychle sestává pouze z hran. Pokud by však byla krychle vytvořena z materiálu o konstantní vodivosti, tak by měla nekonečný odpor mezi libovolnými dvěma vrcholy.

V okolí vrcholu se dají očekávat jisté ekvipotenciální roviny. Zde je potřeba si uvědomit, vyskytujeme-li se v n-rozměrném prostoru, tak oblasti se stejným potenciálem jsou variety o $n-1$ rozměrech. Přivedeme-li do nějakého vrcholu elektrický proud, tak ve vzdálenosti d od vrcholu je „plocha“ ekvipotenciály úměrná d^{n-1}. Zajímá-li nás odpor až do vzdálenosti d_0, platí

$$R_{d_0} = \int_0^{d_0} \frac{\varrho \, \mathrm{d}l}{S} \,, \tag{1}$$

kde však S značí plochu výše zmíněné ekvipotenciály, tedy $S \approx l^{n-1}$. Dosazením do (1) dostáváme pro $n > 1$

$$R_{d_0} \approx \varrho \int_0^{d_0} l^{1-n} \, \mathrm{d}l = +\infty \,.$$

Je vidět, že odpor více než jednorozměrné krychle, což je úsečka, je vůči libovolným dvěma různým vrcholům nekonečný. Proto se budeme dále zabývat odporem n-rozměrné krychle složené z hran, každá o odporu R.

V této úloze budeme značit souřadnice vrcholů $\left(x^1,\dots,x^n\right)$, $x^i \in \{0,1\}$. Vzhledem k symetrii úlohy lze předpokládat jisté ekvipotenciální plochy. V k-té ekvipotenciální ploše leží vrcholy ležící v $(n-1)$-rozměrném prostoru kolmém na tělesovou úhlopříčku. Tato plocha splňuje rovnici

$$\sum_{i=1}^{n} x^i = k \quad \text{pro} \quad 0 \le k \le n \,. \tag{2}$$

Pokud se snažíme vypočítat odpor 3-rozměrné krychle, tak nalezneme tyto, dvě ekvipotenciální plochy a „sečteme“ odpory, které jsou zapojené mezi nimi, dále pak již řešíme „pouze“ sériové spojování odporů mezi jednotlivými vrstvami. Máme-li však n-rozměrnou, však již nebudeme mít pouze tyto dvě pro krychli, jednu pro čtverec ekvipotenciální plochy, ale bude jich $n-1$, kde n je počet dimenzí.

Předpokládejme nyní tedy toto pásové uspořádání. Z každého vrcholu vychází právě n vodičů; do každého směru $\{\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n\}$ jeden[1]. Nejdříve vypočtěme, kolik vrcholů je ve které

[1] Vektory $\boldsymbol{e}_i = (0,\dots,0,1,0,\dots,0)$ mající jedničku na i-té pozici tvoří *kanonickou bázi* n-rozměrného prostoru. Každý z nich má délku 1 a je kolmý na všechny ostatní.

vrstvě. Všechny vrcholy ležící v k-té vrstvě jednak splňují rovnici (2), dále jejich souřadnice $x^i \in \{0, 1\}$. Z tohoto je již vidět, že počet uzlů ve vrstvě je

$$N_k = \binom{n}{k} . \tag{3}$$

Najděme nyní vztah mezi koeficienty binomického rozvoje.

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!} \cdot \frac{m+1}{n-m} = \binom{n}{m+1} \cdot \frac{m+1}{n-m} . \tag{4}$$

Vodičů z vrstvy 0 do vrstvy 1 jde nN_0, tedy součin počtu uzlů a dimenze.

Z první vrstvy vychází opět nN_1 vodičů, viz výše. Však vodičů, které se propojují první a druhou vrstvu se jen

$$G_{12} = nN_1 - nN_0 . \tag{5}$$

Označíme-li G_{xy} počet vodičů spojujících vrstvu x s vrstvou y, v našem případě bude platit $|x - y| = 1$, můžeme upravit výraz (5) užitím identity (4) do tvaru

$$G_{12} = n\binom{n}{1}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = (n-1)N_1 .$$

Z tohoto výrazu je vidět, že z každého uzlu první vrstvy vychází jeden vodič do nulté vrstvy a $n - 1$ vodičů do druhé vrstvy.

Zformulujme nyní domněnku: nacházíme-li se v k-té vrstvě, tak vychází $n - k$ vodičů do $(k-1)$-vé vrstvy a k vodičů do $(k+1)$-vé vrstvy. Matematicky zapsáno

$$G_{k(k+1)} = (n-k)N_k . \tag{6}$$

Důkaz provedeme indukcí. Pro $k = 0$ jsme ověřili výše. Nyní předpokládejme, že

$$G_{(k-1)k} = (n-k-1)\binom{n}{k-1} .$$

Toto znamená, že vrstvy $k - 1$ a k spojuje $G_{(k-1)k}$ vodičů. Dále však víme, že z vrstvy k celkově vychází $n\binom{n}{k}$ vodičů, dále však není žádná hrana rovnoběžná s tělesovou úhlopříčkou, což jasně implikuje

$$G_{k(k+1)} = n\binom{n}{k} - G_{(k-1)k} .$$

Úpravou výrazu, použitím identity (4) dostáváme

$$G_{k(k+1)} = n\binom{n}{k} - (n-k-1)\binom{n}{k-1} = n\binom{n}{k} - (n-k-1) \cdot \binom{n}{k} \cdot \frac{k}{n-k-1} = (n-k)N_k .$$

Tímto jsme dokázali domněnku (6).

Chceme-li nyní vypočítat odpor celé krychle mezi vrcholy $(0, \ldots, 0)$ a $(1, \ldots, 1)$, stačí vypočítat odpor mezi jednotlivými vrstvami; celkový odpor je součtem těchto parciálních odporů. Protože jsou všechny odpory stejně veliké, platí

$$R_{k(k+1)} = \frac{R}{G_{k(k+1)}} .$$

Pro odpor celé krychle platí

$$R_{0n} = \sum_{i=0}^{n-1} R_{i(i+1)} = R \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(n-i)\binom{n}{i}} = R \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\binom{n}{k}}\,.$$

Toto je výraz pro celkový odpor krychle složené z hran o odporu R v n-dimenzioálním prostoru mezi nejvzdálenějšími vrcholy.

Ještě je zajímavé vypočítat, jak se vyvíjí odpor v závislosti na dimenzi, když $n \to \infty$.

$$R_{0n} = R\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} + \ldots + \frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{n}\right) \approx \frac{2R}{n} \to 0\,.$$

Je vidět, že odpor klesá jako převrácená hodnota dimenze.

Lukáš Ledvina
lukasl@fykos.mff.cuni.cz