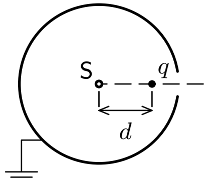
22. ročník, úloha VI . 2 ... *útěk z koule* *!!! chybí statistiky !!!*

V uzemněné kouli z vodivého materiálu je vyvrtán malý otvor, tak akorát, že ním projde malá nabitá částice. Umístíme ji do vzdálenosti d od středu koule na spojnici jejího středu a otvoru (viz obrázek 1). Náboj pustíme. Jak daleko z koule vyletí ven? Zkuste využít metodu zrcadlového potenciálu. *Nad koulemi rozjímal Pavel M.*



Obr. 1. Koule s částicí

Náboj uvnitř koule na ni přitáhne ze země náboj opačný a ten se na ní určitým způsobem rozprostře. Vlastností vodičů a tedy i naší koule je, že jejich povrch má všude stejný potenciál, pro určitost si ho zvolíme jako nulový[1].

Nyní si odmysleme naší kouli a přimysleme naopak nějaký druhý bodový náboj. Předpokládejme, že v celkovém poli původního a nového se nechází plocha nulového potenciálu, která přesně kopíruje původní kouli. Potom je zřejmě pole těchto dvou nábojů ekvivalentní s původním polem náboje a koule[2].

Kam zrcadlový náboj umístit a jak bude velký? Ze symetrie bude zřejmě ležet na ose částice a otvoru. Situaci budeme popisovat v řezu procházejícím touto osou, s počátkem ve středu koule a osou x mířící k otvoru. Označme r poloměr koule, Q zrcadlový náboj a D jeho vzdálenost od počátku. Potom zřejmě v bodech $(-r, 0)$, $(r, 0)$ vyžadujeme nulový potenciál, tedy

$$\frac{q}{r-d} + \frac{Q}{D-r} = 0\,, \qquad \frac{q}{r+d} + \frac{Q}{D+r} = 0\,.$$

Vynásobením jmenovateli a sečtením, resp. odečtením, rovnic dostaneme

$$Q = -q\frac{r}{d}\,, \qquad D = \frac{r^2}{d}\,.$$

Nyní ověříme, že plocha o nulovém potenciálu je skutečně vyžadovaná koule. Tedy pokusíme se rovnici

$$0 = \frac{q}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2}} + \frac{Q}{\sqrt{(x-D)^2 + y^2}}$$

upravit na tvar $x^2 + y^2 = r^2$. A skutečně několika elementárními algebraickými úpravami a využitím vztahů pro Q a D se nám to povede. Použití zrcadlového náboje je tedy oprávněné a potenciál v místě částice, než se začla pohybovat, je

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{D-d} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{r^2-d^2}\,.$$

Co dál? Částice se začne působením náboje na kouli pohybovat ven z koule a s ní zrcadlový náboj naopak směrem ke kouli. Ve chvíli, kdy částice kouli opustí, na ni ale začne působit tato síla v opačném směru a částice se po čase zastaví. V tu cvhíli bude mít zřejmě stejnou potenciální energie jako na začátku.

---

1) Pokud by všude stejný nebyl, elektrony by se pohybovaly ve směru jeho spádu.

2) Tato úvaha je, řekněme, klasická a v zadání na ni bylo odkazováno pod názvem metoda zrcadlového potenciálu. Pro obšírnější vysvětlení odkazujeme na 2. díl Feynmanových přednášek, část 6.7.

Označme l, resp. L, vzdálenost částice, resp. zrcadlového náboje Q', od počátku v situaci, kdy je částice venku a zrcadlový náboj uvnitř. Potom zřejmě $Q' = -r/l$ a $L = r^2/l$ jako v prvním případě. Pro potenciál v místě částice tedy máme

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q'}{l-L} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{l^2-r^2}\,.$$

Z rovnice $\varphi_1 = \varphi_2$ potom už jednoduše vyjádříme $l = \sqrt{2r^2-d^2}$ a vzdálenost částice od koule, na kterou se ptala úloha, tedy bude $\sqrt{2r^2-d^2} - r$.

Jan Hermann
`honzah@fykos.mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.