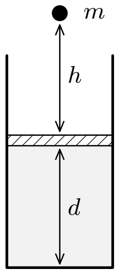
22. ročník, úloha VI . 4 ... *kámen na pístu* *!!! chybí statistiky !!!*

Marek má píst o rozměru S s ideálním plynem v rovnovážném stavu (p, V a T). Na tento píst z výšky h pustí kámen o hmotnosti m (viz obr. 1). Píst se stlačí a opět vrátí do nějaké polohy zpět. Jak závisí tato poloha na hmotnosti kamene a výšky, ze které byl upuštěn? Je možné, že se píst ustálí ve vyšší poloze než byl prve? Jak se změní teplota plynu v pístu?

Napadlo Máru při vymýšlení perpetua mobile.



Obr. 1. Píst před dopadem kamene

Pokusme se uvažovat takový fyzikální model, který aspoň trochu odpovídá realitě a zároveň je dostatečně jednoduchý.

Předpokládejme, že válec je umístěn v atmosféře o tlaku p_a, přičemž přestup tepla mezi plynem uvnitř válce a vnější atmosférou je velmi malý, jako je tomu třeba u termosky, která má tepelně izolovanou vnitřní a vnější stěnu. Vnitřní stěna válce je v tepelné rovnováze s plynem uvnitř a vnější stěna je v rovnováze s vnější atmosférou. Pokud ohřejeme vnější stěny válce, teplo nebude proudit dovnitř a naopak. Budiž píst má hmotnost M. Tepelnou kapacitu C vnitřní stěny válce uvažujme nejprve nulovou, na konci se k tomu vrátíme.

Při řešení úlohy vyjdeme ze zákona zachování energie. Součet mechanické energie systému a „tepelné“ energie systému musí být na počátku i na konci děje shodné.

Během nepružné srážky kamene a pístu se část kinetické energie kamene přemění v teplo Q, které ohřeje jednak kámen a jednak vnější stěnu pístu. Rychlost kamene těsně před srážkou je $v_0 = \sqrt{2gh}$, rychlost pístu s kamenem po nepružné srážce je rovna $v_1 = mv_0/(m+M)$, jak plyne ze zachování hybnosti, a jeho kinetická energie

$$E_{k,1} = \frac{m^2 v_0^2}{2(m+M)} = \frac{m^2 gh}{m+M} \,. \tag{1}$$

Uvolněné teplo Q unikne do atmosféry a nebude hrát roli v námi zkoumané energetické bilanci.

Stav v okamžiku srážky kamene a pístu berme za počáteční, vertikální poloha a potenciální energie kamene a pístu budiž v tomto okamžiku zvolena jako nulová. Veličiny vztahující se k počátečnímu či koncovému stavu budeme značit indexem 1, resp. 2. Vnitřní energie ideálního plynu je dána

$$U = \alpha N k_\mathrm{B} T = \alpha pV \,,$$

přičemž druhá rovnost plyne ze stavové rovnice. Zde N značí počet molekul, k_B Boltzmannovu konstantu a $\alpha = 5/2$ pro dvouatomový plyn (např. dusík, kyslík). Celková energie počátečního stavu je

$$E_1 = E_{k,1} + U_1 = E_{k,1} + \alpha p_1 V_1 \,.$$

V počátečním a koncovém stavu je výsledná síla působící na píst nulová a platí tedy rovnosti

$$\begin{aligned} p_1 &= p_\mathrm{a} + Mg/S \\ p_2 &= p_1 + mg/S \,, \end{aligned} \tag{2}$$

kde S je plocha pístu. Píst je v koncovém stavu v klidu, musel tedy nutně být bržděn třením, jinak by totiž stále osciloval kolem rovnovážné polohy. Při tření vzniká teplo na vnitřní stěně válce, které přechází do uzavřeného plynu. Energie zůstává v systému.

Celková energie koncového stavu je

$$E_2 = E_{p,2} + U_2 = (m + M)gs + \alpha p_2 V_2 \,,$$

kde s je výška pístu oproti počáteční. Tlak p_2 je dán rovnicí (2) a zároveň $V_2 = V_1 + Ss$. Díky rovnosti $E_1 = E_2$ potom platí

$$E_{k,1} + \alpha p_1 V_1 = (m + M)gs + \alpha(p_1 + mg/S)(V_1 + Ss) \,.$$

Zvednutí pístu s odtud poté vyjádříme

$$s = \frac{E_{k,1} - \alpha mgd}{\alpha g(m + M) + \alpha p_\mathrm{a} S} \,.$$

Závislost energie $E_{k,1}$ na h,m,M je dána vztahem (1).

Z vyjádření s je patrné, že píst vystoupí výše než byl původně v případě, že $E_{k,1} > \alpha mgd$.

Pokud by veškeré teplo Q přešlo zpět do systému a nikoli do okolí nebo pokud $m \gg M$, podmínka pro zvednutí pístu je $mgh > \alpha mgd$ a tedy pro dvojatomový plyn $h > 5d/2$.

Když píst stoupne a ještě ke všemu nese větší zátěž než původně, je zřejmé, že teplota plynu vzrostla mezi počátečním a koncovým stavem. Teplota samozřejmě vzroste ve všech případech, protože když naopak píst klesne, kinetická i rozdíl potenciální energie mezi počátečním a koncovým stavem se uloží do vnitřní energie plynu.

Učinili jsme celkem neoprávněný předpoklad o nulovosti vlastní tepelné kapacity C vnitřní stěny válce. Všimněme si ale, že kapacitu C lze do provedených výpočtů snadno započítat zvětšením konstanty α. Tudíž C zahrneme přímo do tepelné kapacity plynu.

Někteří z vás považovali celý děj za adiabatický, tedy bez přenosu tepla mezi vnějškem a systémem. V případě klasického adiabatického děje by výslednému většímu tlaku jistě musel odpovídat menší objem. Nulový přenos tepla mezi vnějškem a systémem jsme předpokládali také, ale je třeba si uvědomit, že teplo vznikne třením při brždění pístu.

Marek Scholz
mara@fykos.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.