

23. ročník, úloha III. P ... aljeja, niti! Jsou shnilé (3 body; průměr 2,20; řešilo 5 studentů)

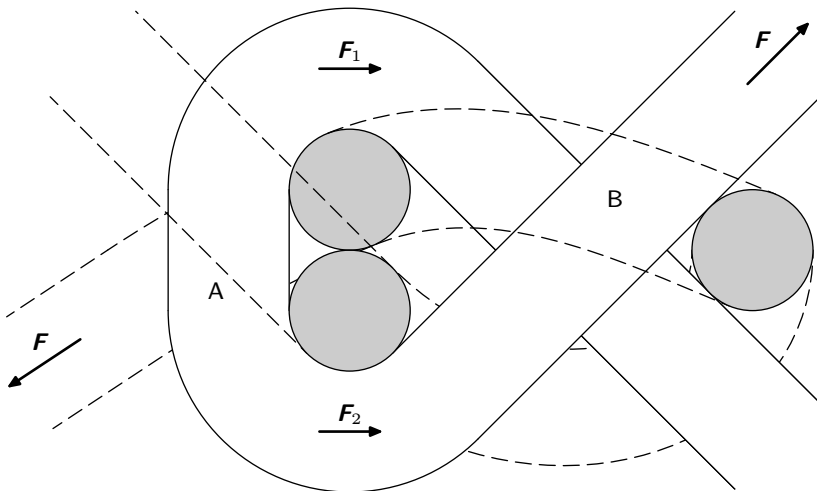
Zkoumejte dvojitý uzel, kterým jsou spojena dvě vlákna o poloměru r a součiniteli klidového tření f . Jakou silou musíme tahat za konce vláken, aby se uzel „proklouzl“? Dosadte typické hodnoty pro nitky a zjistěte, zda se přitom nepřetrhne vlákno.

V uzlech se ukájí Jakob.



Uvažovaný uzel

Nejprve si ujasněme, za jaké konce uzlu budeme tahat. Předpokládejme, že uzel už je utažený. Pak, budeme-li tahat za horní dva konce (dle obrázku v zadání) nebo za spodní dva, uzel bude prokluzovat o poznání lépe, než když budeme tahat za levý horní a pravý dolní konec (levý dolní a pravý horní). Je to tím, že se smyčky po lanu mohou odvalovat a valivý odpor je obecně menší než smykové tření. (Vyzkoušejte si, lana se vám budou v ruce kroutit, což je způsobeno tím odvalováním.) Budeme-li tahat za levé (respektive pravé) konce, uzel se jen přesmykne, a protože taháme za konce stejného provazu, budeme tahat tak dlouho, až provaz přeskubneme.



Obr. 1. Podrobný náčrt uzlu

Pojďme se zabývat tím případem, kdy se lana po sobě nevalí, ale jen se smýkají.

- Tření v místě A: Aby klouzal bílý provázek po čárkovaném, musí síly F_1 a F_2 splňovat rovnici vláknového tření

$$F_2 > F_1 e^{\varphi f},$$

kde φ je úhel opásání (vnitřní úhel oblouku, na kterém se dotýká vlákno druhého vlákna). V našem případě je φ přibližně rovno 2π . Tedy

$$F_2 > F_1 e^{2\pi f}.$$

- Tření v místě B: Lanka bílé smyčky jsou v tomto místě překřížena a šedou smyčkou jsou tlačena k sobě. Problém smyček je symetrický, takže síla, která bílá lanka tlačí k sobě je rovna $F_1 + F_2 = F$ (uvažte si uzel a zjistíte, že lanka jsou v místě B téměř rovnoběžná).

Lanka se třou jednak o sebe navzájem a pak ještě o lanka šedé smyčky, takže třecí síla připadající na jedno z nich je $F_t = Ff$.

Potřebujeme dopočítat síly F_1 a F_2 . Z obrázku je vidět, že

$$F_1 = F_t = Ff,$$

$$F_2 = F - F_t = F(1 - f).$$

Dosadíme do podmínky klouzání smyčky z bodu A, kde se pak vykrátí tažná síla F a po úpravě dostaneme rovnici

$$\frac{1 - f}{e^{2\pi f}} - 1 > 0.$$

Z výsledného vzorce je vidět, že klouzání nezávisí na tažné síle, protože ona sama zbůsobuje tlak, který způsobuje tření, jakožto i tah, který ho musí překonat. Výsledná podmínka si klade nároky tedy pouze na koeficient tření. Tato podmínka bude splněna, pokud f bude z intervalu 0 až zhruba 0,25. To vše ovšem platí, zanedbáme-li schopnost uzlu udržet nějaké napětí, které vznikne, když uzel utáhneme. Ve skutečnosti ale toto napětí existuje a proto se proklouznutí uzlu jeví jako hraniční záležitost, která má určitou limitní sílu, za kterou začne uzlu proklouzávat. Na určení této hraniční síly by bylo potřeba znát Youngův modul pružnosti nitě v obou směrech a Poissonův poměr, abychom určili napětí uzlem držené. Uzel totiž začne proklouzávat, až tažná síla překročí sílu odpovídající zadrženému napětí.

Tereza Zábojníková

`terka@fykos.mff.cuni.cz`