23. ročník, úloha IV . S ... *maxwellobraní* *!!! chybí statistiky !!!*

a) *Co se stane, když do krystalu kalcitu kolmo posvítíme kruhově polarizovaným světlem?*
b) *Představte si, že je právě čas $t = 0$, široko daleko není žádný náboj ($\varrho = \boldsymbol{j} = 0$), a my známe počáteční elektromagnetické pole v celém prostoru $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, 0)$ a $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, 0)$. Z třetí a čtvrté Maxwellovy rovnice tedy můžeme vyjádřit časové derivace $\partial \boldsymbol{B}/\partial t$ a $\partial \boldsymbol{E}/\partial t$ pomocí prostorových a vypočítat tak $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{B}$ v následujícím okamžiku. Tento postup můžeme iterativně opakovat a dostat tak celý časový vývoj pole pro $t > 0$. Jak je možné, že vůbec nemusíme použít první a druhou Maxwellovu rovnici?*
c) *Uvažujte náboj velikosti q, který je v klidu pro $t < 0$, a v čase $t = 0$ na něj začne dopadat rovinná světelná vlna. Jak se bude náboj následně pohybovat, když světlo je polarizované (i) lineárně (ii) kruhově? Promyslete nejprve kvalitativně, přesný výpočet, případně počítačová simulace obdrží bonus.*

Vyrobily MD-závody-s-časem.

Kalcit

Jak jsme ukázali v seriálu, kruhově polarizované světlo si můžeme představit jako superpozici (součet) paprsků polarizovaných v řádném a mimořádném směru, s fázovým rozdílem $\pi/2$

$$\begin{pmatrix} \cos(kz - ct) \\ \sin(kz - ct) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(kz - ct) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(kz - ct) \end{pmatrix} .$$

Protože Maxwellovy rovnice jsou lineární, a součet řešení je tedy opět řešením, můžeme se na každou složku dívat zvlášť. První z nich pokračuje krystalem beze změny, a druhá se zlomí. Výsledkem tedy bude původní paprsek rozdělěný na dvě lineárně polarizované složky s výše uvedeným fázovým rozdílem.

Zbytečné rovnice?

Na numerický výpočet časového vývoje elektromagnetického (EM) pole v tomto případě skutečně stačí pouze Faradayův a Ampérův zákon (s $\boldsymbol{j} = 0$). Zbylé dvě Maxwellovy rovnice (Gaussův zákon a neexistence magnetických monopólů) jsou důležité, protože stanovují podmínku pro počáteční EM pole. Ne každá volba $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, 0)$, $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, 0)$ totiž splňuje

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \,, \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \,. \tag{1}$$

Trik je v tom, že pokud tyto rovnice platí v čase $t = 0$, budou automaticky platit i v libovolném budoucím okamžiku. Předpokládejme, že jsme $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ a $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)$ vypočítali podle algoritmu uvedeného v zadání a podívejme se na časové derivace levých stran v (1)

$$\frac{\partial(\nabla \cdot \boldsymbol{E})}{\partial t} = \nabla \cdot \dot{\boldsymbol{E}} \,, \qquad \frac{\partial(\nabla \cdot \boldsymbol{B})}{\partial t} = \nabla \cdot \dot{\boldsymbol{B}} \,,$$

kde jsme prohodili pořadí časového a prostorového derivování. Nyní můžeme vyjádřit $\dot{\boldsymbol{B}}$, $\dot{\boldsymbol{E}}$ z Faradayova a Ampérova zákona s nulovým proudem

$$\dot{\boldsymbol{E}} = c^2 \nabla \times \boldsymbol{B} \,, \qquad \dot{\boldsymbol{B}} = -\nabla \times \boldsymbol{E} \,,$$

čili

$$\frac{\partial(\nabla \cdot \boldsymbol{E})}{\partial t} = c^2 \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B}) \,, \qquad \frac{\partial(\nabla \cdot \boldsymbol{B})}{\partial t} = -\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{E}) \,.$$

Pro čtenáře seriálu není novinkou fakt, že divergence rotace libovolného vektorového pole je nula, z čehož vyplývá

$$\frac{\partial(\nabla\cdot\boldsymbol{E})}{\partial t}=0\,,\qquad \frac{\partial(\nabla\cdot\boldsymbol{B})}{\partial t}=0\,,$$

neboli platí-li podmínka (1) v čase $t = 0$, náš algoritmus zaručuje její platnost i v každém pozdějším čase.

Můžete se zkusit zamyslet nad obecnějším případem, kdy máme zadané nenulové počáteční náboje a proudy a EM pole, které splňuje Gaussův zákon a neexistenci magnetických monopólů. Nestačí pro nalezení časového vývoje použít opět jen Faradayův a Ampérův zákon, ten druhý tentokrát s nenulovým $\boldsymbol{j}$? K čemu jsou potom zbylé Maxwellovy rovnice a v čem se tento případ liší od naší původní úlohy? Poradíme vám, že řešení souvisí se zákonem zachování náboje.

Vykutálený náboj

Původním cílem této úlohy bylo demonstrovat pojmy hybnost a moment hybnosti světla. Fyzika si ale s námi zahrála a místo očekávaného dobře srozumitelného pohybu vyváděla s nábojem psí kusy. Nejprve nastíníme kvalitativní odhad pohybu a jeho souvislost s hybností a momentem hybnosti světla.

Je známo, že světlo se skládá z oscilujícího elektrického a magnetického pole, které jsou vzájemně kolmé, a zároveň kolmé na směr pohybu, přičemž $B = E/c$. Zkoumejme nejprve případ lineárně polarizovaného světla šířícího se ve směru z, s elektrickým polem ve směru x a magnetickým ve směru y. EM pole působí na náboj q silou

$$\boldsymbol{F}=q\left(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\right)\,.$$

Dopadne-li tedy naše vlna na náboj v klidu, očekáváme, že ho elektriké pole rozkmitá ve směru x. Tím ale náboj získá nenulovou rychlost v tomto směru a magnetické pole bude skrze druhý člen působit silou ve směry z, což je právě směr pohybu světla. Výsledný pohyb náboje by tedy mohl vypadat jako oscilace ve směru x složené s posouváním ve směru z. Zjistili jsme, že aby platil zákon zachování celkové hybnosti, musíme světlu připsat něco jako hybnost, kterou může předávat nábojům, na něž působí. V kvantové mechanice se světlo skládá z fotonů, což jsou částice s hybností $p_z = \hbar\omega/c$, kde $\hbar$ je Plankova konstanta a ω úhlová frekvence světla. Kvalitativně jsme nastínili, že klasická teorie elektromagnetism může kvantový model částečně reprodukovat.

Co se děje v případě kruhově polarizovaného světla? Tentokrát vektory elektrického a magnetického pole nemění velikost, ale otáčí se konstantní rychlostí. Elektrické pole nejprve roztočí náboj v rovině xy, a síla z magnetického pole ho bude opět tlačit ve směru pohybu světla. Kruhově polarizovanému světlu tedy musíme přiřadit nejen hybnost, ale také moment hybnosti, neboť kroužící náboj bude mít větší moment hybnosti, než když byl v klidu. Analogicky předchozímu případu mohou kvanta světla nést také moment hybnosti, který nabývá hodnot $L_z = \pm\hbar$. Pro foton levotočivě polarizovného světla frekvence ω tedy platí $p_z = \omega L_z/c$.

Jestliže věříme kvantovému modelu, očekáváme, že změny z-ových složek hybnosti a momentu hybnosti, zprůměrované přes jednu periodu spolu souvisí vztahem

$$\left\langle\frac{\mathrm{d}p_z}{\mathrm{d}t}\right\rangle=\frac{\omega}{c}\left\langle\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}\right\rangle\,,\tag{2}$$

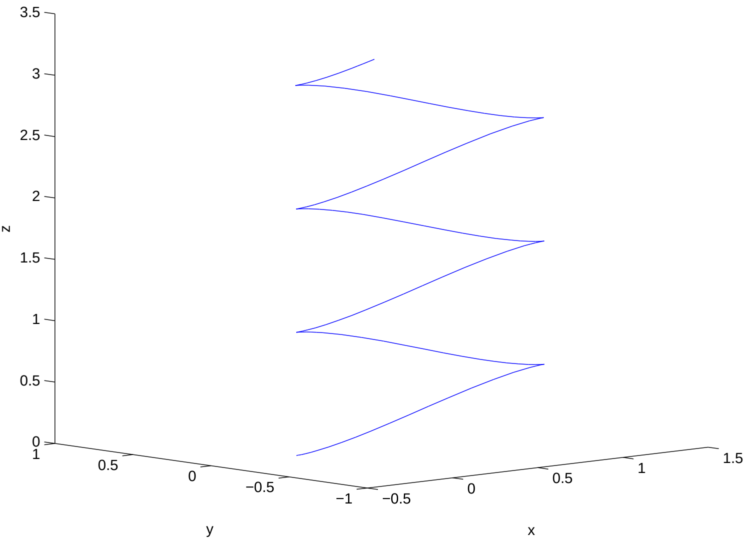
neboť hybnost náboje může stoupnost jen absorpcí fotonu. Absorbováním fotonu ale náboj nevyhnutelně získá i jeho moment hybnosti, a tyto veličiny jdou ruku v ruce.

Doufali jsme, že numerické, nebo poruchové[1] analytické řešení našeho problému potvrdí výše uvedené výsledky, což se ale podařilo jen částečně.

Výpočty jsou relativně zdlouhavé a nemá cenu je zde reprodukovat, jde o to vyřešit druhý Newtonův zákon pro zadané EM pole. Tvar řešení je určen bezrozměrným parametrem

$$\lambda = \frac{qE}{m\omega c}\,,$$

který nám říká, jak velkou roli hraje magnetické pole. Pro $\lambda \approx 1$ a větší je třeba použít relativistickou podobu Newtonova zákona.



Obr. 1. Trajektorie při lineárně polarizovaném světle a $\lambda = 1$

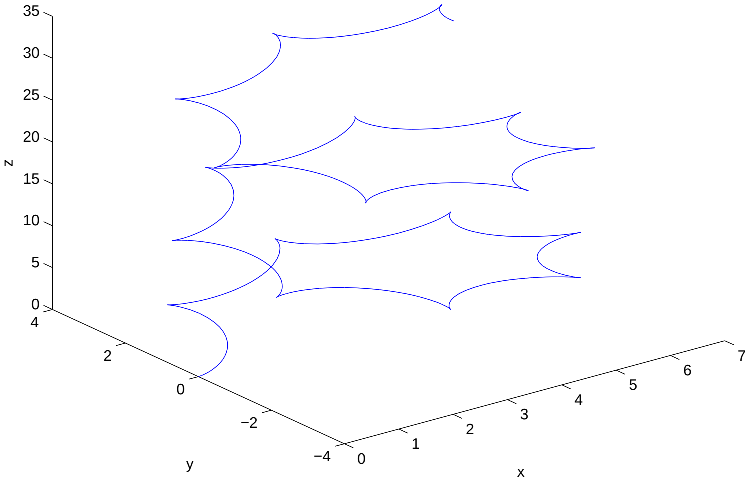
Obrázky 1 a 2 ukazují numericy získanou trajektorii náboje v relativistickém režimu $\lambda = 1$ pro lineárně a kruhově polarizované světlo. Jak očekáváme, trajektorie při lineárně polarizovaném světle leží v rovině xz, a stejně jako ta při kruhově polarizovném světle vykazuje drift ve směru pohybu světla. Část hybnosti se tedy skutečně náboji předá. Překvapením ale je rotační chování náboje na druhém obrázku. V elementárních kouscích trajektorie se sice pohybuje po pravotočivých částech kružnice, celkově ale opisuje levotočivou spirálu. Jeho průměrný moment hybnosti je tedy opačný, než jaký bychom očekávali z rovnice (2). Vysvětlení nám není známo a stojí za zamyšlení.

Neočekávané chování možná souvisí s faktem, že díváme-li se na náboj a foton jako na klasické pevné částice, ze zákonů relativistické kinematiky vyplývá, že volný náboj nemůže nikdy absorbovat foton (můžete si zkusit odvodit ze zákonů zachování hybnosti a energie). Jednoduchý předpoklad o absorbování hybnosti a momentu hybnosti zde tedy nemusí platit. Problémům bychom se tedy mohli vyhnout tím, že bychom místo volného náboje uvažovali

[1] V nultém přiblížení zanedbáme magnetické pole a provedeme poruchový rozvoj trajektorie v koeficientu $\lambda = qE/m\omega c$ pro $\lambda \ll 1$.

například náboj vázaný k počátku souřadnic lineární silou, tedy harmonický oscilátor v EM poli. Zkoumání tohoto systému ale přenecháme jen odvážnějším řeitelům.

Dalimil Mazáč
`dalimil.mazac@gmail.com`



Obr. 2. Trajektorie při kruhově polarizovaném světle a $\lambda = 1$