

KAREL KOLÁŘ A KOLEKTIV

Fyzikální korespondenční seminář

XXIV. ročník – 2010/11





Obsah

Předmluva	4
Zadání teoretických úloh	6
Řešení teoretických úloh	13
Zadání experimentálních úloh	71
Řešení experimentálních úloh	72
Seriál o komplexních číslech	93
0. Úvod	93
1. Geometrická představa	97
2. Derivace aharmonický oscilátor	99
3. Použití holomorfních funkcí k řešení fyzikálních úloh	107
4. Möbiova transformace	113
5. Aplikace teorie konformních zobrazení	117
6. Závěrečná	125
Řešení úloh ze seriálu	131
Akce FYKOSu	149
Podzimní soustředění v Ostravici	149
Jarní soustředění v Domašově nad Bystřicí	150
Den s experimentální fyzikou 2011	151
FYKOSí Fyziklání 2011	153
Pořadí nejlepších řešitelů	155



Předmluva

Milá čtenářko či milý čtenáři!

Do rukou se Ti dostala knížka, která shrnuje veškerou činnost Fyzikálního korespondenčního semináře Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze v jeho XXIV. ročníku, který probíhal ve školním roce 2010/2011.

FYKOS je nejstarší a také největší fyzikálně zaměřenou korespondenční soutěží pro žáky středních škol v ČR. Je organizován především studenty a zaměstnanci Matematicko-fyzikální fakulty UK a také zaměstnanci Ústavu teoretické fyziky. Snaží se zaujmout studenty se zájmem o fyziku, matematiku, techniku, zkrátka svět kolem nás. Naším cílem je rozvíjet talent a fyzikální myšlení, protože věříme, že člověk, který se umí zastavit a zamyslet (nejen nad fyzikálními problémy) a cítí touhu dobrat se řešení, se v životě vždy velmi dobře uplatní.

Během školního roku každý z řešitelů obdrží celkem sedm sešitků, v nichž nalezne šest sérií po sedmi úlohách, z nichž jedna je „rozcvičková“, jedna více problémová, jedna experimentální a jedna tzv. seriálová. Zadávané úlohy však nejsou příliš podobné těm, které znáte z hodin fyziky. Vyžadují mnohdy poněkud hlubší úvahu, trochu důvtipu nebo něco z vyšší matematiky. Nezřídka je třeba zapátrat na internetu nebo v odborné literatuře. Účastníci si mohou vybrat, které úlohy nakonec vypracují a pošlou nám k opravení ať už klasickou poštou, nebo přes internet. Opravovatelé pak jejich řešení okomentují a vysvětlí případné chyby. To vše pošleme zpět řešitelům, včetně výsledkových listin, kde se každý může podívat, jak obstál v konkurenci svých vrstevníků. Na konci ročníku jsou nejlepší řešitelé náležitě odměněni.

Mimo samotnou korespondenční soutěž pro řešitele připravujeme i další akce. Bezesporu nejpobulárnějšími jsou dvě týdenní soustředění v některém z malebných koutků české země. Jejich účastníci si užijí atraktivní program, založený na dopoledních matematických nebo fyzikálních přednáškách a odpoledních hrách v přírodě. Nechybí ani prostor pro fyzikální experimenty a výlety na zajímavá místa.

Další akcí je Den s experimentální fyzikou, na kterém se spolupodílejí jednotlivé katedry MFF, ale i pracoviště Akademie věd ČR, resp. Ústav jaderného výzkumu v Řeži. Naším řešitelům tak umožňujeme navštívit velmi zajímavá výzkumná pracoviště, kde se dělá opravdová fyzika.

Relativně nejmladší, zato však nejmasovější akcí je FYKOSí Fyziklání, soutěž pětičlenných týmů v řešení palčivých úloh na čas. Vyhrává ten nejrychlejší počtář. V letošním roce se soutěže zúčastnilo 31 družstev z ČR i ze Slovenska. To je pro nás dostatečným důkazem, že zájem o fyziku a přírodní vědy mezi mladými lidmi stále ještě existuje.

Za zmínku určitě stojí i odhodlání organizátorů pořádat fyzikální korespondenční seminář pro základní školy – Výfuk. Letos proběhl zkušební ročník proka-

zující zájem mladších žáků, a tak doufejme, že mladší sourozenec FYKOSu bude i nadále zajímat (nejen) mladší sourozence našich řešitelů.

Tato ročenka obsahuje kompletní zadání i řešení jednotlivých úloh XXIV. ročníku FYKOSu. Zadání jsou záměrně oddělena od řešení, abychom podnítili čtenáře k samostatnému zamýšlení nad možným řešením problému. Příklady jsou navíc pro snazší orientaci rozděleny na teoretické a experimentální. Další částí knihy je Seriál o komplexních číslech, který je rovněž doplněn úlohami. Na konci knížky se nachází krátké ohlédnutí za letošními soustředěními a jinými akcemi a seznam nejlepších řešitelů ročníku.

Pokud Tě FYKOS zaujme natolik, že by ses chtěl stát účastníkem nebo se pouze na něco zeptat, ať už se to týká fyziky či studia na MFF, neváhej a napiš nám.



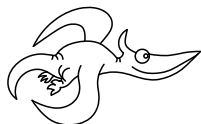
FYKOS
UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

tel: +420 221 912 526
 www: <http://fykos.cz>
 e-mail: fykos@fykos.cz

A jak vypadal XXIV. ročník očima statistiků? FYKOS řešilo 60 žáků z 39 středních škol ze tří evropských států. Přehled škol podle úspěšnosti jejich studentů uvádíme níže. Pro zajímavost ještě dodejme, že organizátoři opravili celkem 455 došlých řešení.

Pořadí škol

Název školy	Počet řešitelů	Průměr	Celkem
Gymnázium Matyáše Lercha, Brno	1	121	121
Gymnázium Žamberk	2	60,5	121
Gymnázium Boskovice	6	16,5	99
Gymnázium Masarykovo nám., Třebíč	1	82	82
Gymnázium Nad Štolou Praha	1	72	72
Gymnázium P. Horova, Michalovce	1	65	65
Gymnázium Grösslingova, Bratislava	1	63	63
Gymnázium P. de Coubertina, Tábor	2	29,5	59
Gymnázium Zábřeh	1	52	52
Gymnázium Nymburk	1	49	49

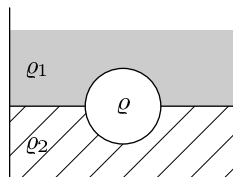


Zadání teoretických úloh

Úloha I. 1 ... rozcvička

a) *mezi vodami*

Na rozhraní dvou nemísitelných kapalin se vznáší pevná homogenní koule o hustotě ρ (viz obrázek). Horní kapalina má hustotu ρ_1 , dolní ρ_2 , přičemž víte, že $\rho_1 < \rho < \rho_2$. Jaká část objemu koule se nachází v horní a jaká v dolní kapalině?



b) *sesterská planeta*

V posledních několika letech již byla objevena spousta planet ležících mimo Sluneční soustavu. Daleko zajímavější by bylo ovšem objevovat planety, které jsou podobné Zemi. Předpokládejte, že chcete objevit podobnou Zemi (terestrická planeta s podobným poloměrem jako Země), která obíhá svou hvězdu podobnou Slunci (stejná spektrální třída – podobná hmotnost, podobný poloměr) jednou za pozemský rok. Předpokládejte, že tato soustava je vzdálená od našeho Slunce zhruba 10 pc. Určete podmínky, za kterých by šlo pozorovat planetu přímo z poklesu jasnosti hvězdy a odhadněte dobu, na kterou tato situace nastane. Jak se zkomplikuje hledání takové hvězdy, když soustava bude mít víc planet?

(řešení str. 13)

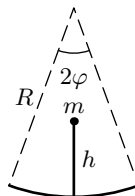
Úloha I. 2 ... káča bez čerta

Jakub má u babičky káču, na jejíž horní ploše je nakreslená spirála. Káču roztočíme a díváme se na ní shora. Jaké obrazce pozorujeme a proč?

(řešení str. 16)



K úloze I.3: Káča před roztočením



K úloze I.4: Koník

Úloha I. 3 ... houpací kůň

Nehmotná tyč délky h je ve středu připevněna na nehmotný oblouk o vrcholovém úhlu 2φ a poloměru R . Na konci tyče je závaží m . Pohyb probíhá pouze v rovině. Určete

a) za jakých podmínek může být soustava stabilní,

b) frekvenci kmitů takového houpacího koně.

(řešení str. 18)

Úloha I. 4 ... *bublifuk*

Mára si koupil bublifuk a jal se na balkoně vyfukovat bubliny, venku byl stálý atmosférický tlak p_0 . Když se mu jedna obzvláště povedla (měla poloměr r a hmotnost mýdlové vody byla m), zamyslel se a vypočítal její celkovou tepelnou kapacitu. Učinite totéž.

(řešení str. 19)

Úloha I. P ... *Edudant a Francimor*

Dva světaznalí cestovatelé, jeden tlustý a jeden hubený, se cestou v letadle dohadují o tom, kdo z nich by déle přežil v extrémních podmínkách daleko od civilizace. Rozsoudíte je, kdo vydrží déle ve velkém horku ($50\text{ }^\circ\text{C}$), v mrazu ($-1\text{ }^\circ\text{C}$), po ztroskotání lodi uprostřed Středozemního moře, v hurikánu nebo při silném sněžení? A jak by to mohlo dopadnout, kdyby je zastihlo mohutné zemětřesení v centru velkoměsta? Kromě jejich tělesné stavby mezi nimi nejsou žádné rozdíly, oba jsou stejně oblečení a nic dalšího s sebou nemají (žádné jídlo, vodu, sirky ani jiné vybavení). Snažte se být nápadití a všimněte si i maličkostí.

(řešení str. 21)

Úloha II. 1 ... *rozcvička*

a) *Jakubova snídaně*

Jakub jí k snídani cereální kuličky o hustotě ρ , které si sype do misky ve tvaru komolého kužele (horní podstava má poloměr R , spodní r a výška je l), ve kterém má do výšky h nalité mléko. Koeficient zaplnění prostoru koulemi je \varkappa . Kolik nejvíce kuliček může do misky nasypat?

b) *magnetický monopol*

Máme velkou plechovou desku, kterou zmagnetujeme tak, že na její horní ploše bude severní magnetický pól (a na dolní ploše ten jižní). Vylisujeme z ní dvě stejné polokoule. Na vnitřní straně obou polokouli je teď jižní a na vnější severní pól. Polokoule k sobě přiblížíme tak, že vyrobíme celou kouli. Ta má nyní venku pouze severní pól, takže se chová jako magnetický monopol. A nebo ne? Co nám ve vytvoření takové koule zabrání?

(řešení str. 22)

Úloha II. 2 ... *Lennard-Jonesův potenciál*

Mezi dvěma atomy inertního plynu působí tzv. Lennard-Jonesův potenciál

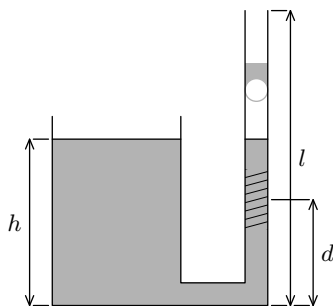
$$U(R) = 4\varepsilon \left(\left(\frac{\sigma}{R} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{R} \right)^6 \right).$$

Předpokládejte, že pohyb atomů je omezen na přímku. Určete rovnovážnou polohu, aniž byste derivovali! Význam konstant σ a ε bude podrobněji vysvětlen ve vzorovém řešení.

(řešení str. 24)

Úloha II. 3 ... překapávač

Lukáš si k psaní protokolů z praktika vařil kávu a mírně si upravil kávovar. Ke dnu nádoby přidělal zahnutou trubičku, na kterou namotal topnou spirálku. Spirálka byla ve výšce d nade dnem nádoby (viz obrázek), hladina vody ve výšce h . Parametry trubičky a spirálky jsou právě takové, aby pára vzniklá varem vody přiváděně z rezervoáru v nádobce vytlačovala vodu nad sebou nahoru. Spočtete výkon, který musíme dodávat do spirálky, aby z ústí trubičky ve výšce l vytékala voda. Jaká je účinnost takového tepelného stroje? (řešení str. 26)



Obr. 1. Překapávač

a stoupající bublina unášející trochu vody

Úloha II. 4 ... nemyslíš, zaplatíš

Za jakých podmínek dojde k zablokování a smýkání předního kola při brzdění, aniž bychom přeletěli přes říditka? Jaký na to má vliv brzdění zadním kolem? (řešení str. 27)

Úloha II. P ... šmoulové a Darth Vader

Po nadýchání se helia se člověku mění hlas tak, že mluví jako šmoula. Stejně to funguje, nadýcháte-li se vodíku (kuřáci, pozor!). Ale dá se dosáhnout i změny na hlas podobný Darthu Vaderovi; nejznámějším médiem je fluorid sírový. Jak funguje změna hlasu? Pokuste se ji kvantitativně odhadnout.

(řešení str. 30)

Úloha III. 1 ... rozcvička

a) *Dr. Nec*

Terka byla o víkendu tahat dřevo. Objem dřeva se měří dvěma způsoby: na kubíky (1 m^3 dřeva-hmoty bez vzduchových mezer mezi kládami) a na plnometry (1 m^3 i s mezerami). Nalezněte převodní vztah mezi těmito dvěma jednotkami (tj. kolik plnometrů odpovídá jednomu kubíku) v závislosti na poloměru klád, ze kterých se skládá hranice. Klády považujte za dokonale hladké válce, které se skládají na sebe.

b) *bublifuk*

Foukáme do mýdlového povrchu na počátku kruhového tvaru tak, aby měl tvar kulového vrchlíku o poloměru r . Odhadněte, jakou rychlostí do něj musíme foukat?

(řešení str. 31)

Úloha III. 2 ... zasekanej!

Jistě jste si všimli, že při podélném parkování zpátečkou se auto může vejít i do celkem malé mezery. Mějme auto délky L , šířky d se vzdáleností kol l . Kola se mohou otočit maximálně o α stupňů (tzv. „plný rejď“). Do jak velké mezery budeme schopni zaparkovat při použití zpátečky? A při parkování popředu? Jaká

je ideální parkovací strategie? Auto musí být samozřejmě dokonale zarovnané v řadě (tj. rovnoběžně s chodníkem ve vzdálenosti maximálně d_0 od chodníku) a při parkovacím manévru se auto smí pohybovat pouze jedním směrem, tzn. buď dopředu nebo dozadu. (řešení str. 34)

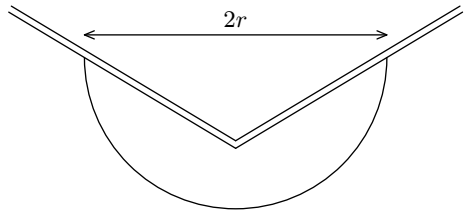
Úloha III. 3 ... čičač Aleš

Aleš má na koleji na polici neprodyšně uzavřenou válcovou průhlednou nádobu s toluenem, z 90 % plnou. Aleš si svůj toluen pochopitelně bedlivě střeží. Když se po víkendu vrátil na kolej, všiml si, že se hladina toluenu v nádobě o kousíček snížila a okamžitě obvinil spolubydlícího šnEka z krádeže. Až posléze si uvědomil, že o víkendu začali topit a teplota v ubikaci tudíž stoupla o 20°C . Rozřešte tento detektivní příběh a zjistěte, zda šnEk skutečně čičal toluen. Jinak řečeno: Jak velký pokles hladiny mohla způsobit změna teploty? Mohl by si takového poklesu Aleš vůbec všimnout? K řešení lze použít data uvedená na [http://en.wikipedia.org/wiki/Toluene_\(data_page\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Toluene_(data_page)). (řešení str. 37)

Úloha III. 4 ... rumové ovoce

Uvažujme miskou, do které položíme dvě spojená brčka, která mají tvar písmene V a poloměr r . Brčko se smí dotýkat pouze okrajů misky. Určete nejprve podmínku stability a potom vypočítejte periodu kmitů brčka v souměrné poloze.

(řešení str. 39)



Obr. 2. Miska s brčky

Úloha III. P ... wassermánie

Voda má spoustu zajímavých, výjimečných a anomálních vlastností ve srovnání s jinými kapalinami. Podrobný výčet těchto anomálií lze nalézt na stránce <http://www.btinternet.com/~martin.chaplin/anmlies.html>. Zamyslete se, jaký tyto anomálie mají význam pro život na zemi, člověka a také techniku. (řešení str. 41)

Úloha IV. 1 ... rozcvíčka

a) napnutá struna

Frekvence kmitů napjaté struny závisí na její délce l , síle F , kterou je struna napjatá, a na délkové hustotě ϱ_l . Určete z těchto údajů vzoreček pro frekvenci struny pomocí rozměrové analýzy.

b) dolů

Mějme činku, jejíž závaží mají tvar disků, které jsou blízko u sebe. Tyčku omotáme jednou provázkem a činku spustíme, jak rychle padá, pokud se nesmýká? Disky mají hmotnost m a poloměr R , tyčka je nehmotná s poloměrem r .

(řešení str. 43)

Úloha IV. 2 ... *hoď ho do Slunce!*

Karel se rozhodl zahodit svůj sešit matematické analýzy na Slunce. Poradíte mu, jakou minimální rychlost sešitu musí udělit, aby sešit na Slunce dopadl? Pro jednoduchost zanedbejte odporové síly, Zemi a Slunce považujte za hmotné body, sešit vypouštíte ze vzdálenosti $R_Z = 6378$ km od hmotného bodu symbolizujícího Zemi, vůči kterému je sešit v klidu a Země obíhá Slunce po dokonalé kružnici. Konstanty, které se vám budou hodit: $\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$, $M_S = 2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg}$, $M_Z = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, $a = 1 \text{ AU} = 150 \cdot 10^9 \text{ m}$. (řešení str. 45)

Úloha IV. 3 ... *naše staré hodiny lijí čtyři hodiny*

Navrhněte tvar přelévacích hodin, aby ubývala výška hladiny lineárně s časem. Za uvažování povrchových efektů, vnitřního tření apod. můžete dostat body navíc. (řešení str. 47)

Úloha IV. 4 ... *sama doma*

Terka J. mívá většinou skvělé nápady. Třeba minulého pondělí si od svého oblíbeného dermatologa přinesla 5 litrů kapalného dusíku a ihned ho vylila na zem ve své ubikaci. Ve středu pro změnu odcizila na čerpací pumpě 5 litrů benzínu, který záhy vylila do umyvadla a zapálila. Mohlo se Terce některý den udělat ne-dobře v důsledku jejich kratochvilí? Aneb jak se v obou případech změní teplota, tlak a koncentrace kyslíku v ubikaci, pokud tato je dokonale neprodyšná, tepelně izolovaná a rozměrů $3 \times 3 \times 4 \text{ m}^3$? (řešení str. 48)

Úloha IV. P ... *míchání barev*

Chceme-li na monitoru počítače zobrazit azurovou barvu, musíme rozsvítit červený a modrý segment. Azurová barva odráží v nejjednodušším případě světlo dvou vlnových délek (modré a červené), dále pokud budeme mít modrou barvu, tak tato bude odrážet modré světlo a červená obdobně. Když smícháme modrou a červenou temperu, výsledná směs bude mít fialovou barvu, protože modrá složka pohltí vše až na modrou a obdobně také červená. Proto ze směsi těchto barev budeme pozorovat pouze ty vlnové délky, které odrážejí obě složky. Představte si, že tempery jsou složeny z malých kapiček. Jak bude záviset výsledný zrakový vjem na jejich velikosti? (řešení str. 50)

Úloha V. 1 ... *rozcvička*

a) *sedimentace krve*

Zkuste přibližně spočítat, jak rychle probíhá sedimentace lidské krve (usazení zdravých červených krvinek na dně nádoby). Dynamická viskozita η krevní plazmy při 37°C je přibližně $2 \text{ N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-2}$. (Běžně se měření sedimentace provádí tak, že se krev nechá odstát na jednu hodinu a poté se změří výška již usazených krvinek – bývá obvykle okolo 10 mm.)

Nápověda: Mohl by se hodit Stokesův vztah pro odporovou sílu $F = 6\pi\eta r v$, který platí pro laminární proudění.

b) *nevěřte vlastním očím*

Aleš jel v poledne tramvají po nábřeží Kapitána Jaroše v Praze směrem na Malou Stranu. Seděl u okna a přímo z jiho-jihozápadu na něj svítilo slunce.

Protože se díval před sebe, jedno oko měl ve stínu vlastního nosu. Když ale uhnul očima doprava, zjistil, že levým okem vnímá mírně jiné odstíny barev než pravým. Do jakého odstínu se mu vidění v levém oku zabarvilo a proč?
(řešení str. 52)

Úloha V.2 ... Měsíc jako lodička

Z jakých míst na Zemi a kdy vypadá Měsíc jako lodička? Tzn. jeho cípy jsou rovnoběžné s obzorem a osa symetrie je kolmá k místnímu nebeskému poledniku. Pokud si s řešením nevíte rady, můžete si nainstalovat vhodný software (např. Celestia) a celou situaci si prohlédnout z různých míst na zemi.

(řešení str. 54)

Úloha V.3 ... těžký řetěz

Řetěz o hmotnosti m a délky l visí svisle těsně nad váhou. Najednou ho upustíme z klidu a začne na váhu dopadat. Jakou hodnotu bude váha ukazovat v závislosti na tom, jaká délka x již na ni dopadla? Zanedbejte rozměry jednotlivých ok řetězu.

(řešení str. 56)

Úloha V.4 ... zelená revoluce

Jaderná energie je stále kontroverzní zdroj energie a mnohé státy mají v úmyslu upouštět od jejího používání. Zaměřme se ale nyní na problém skladování jaderného odpadu. Představme si, že v roce 2000 bylo založeno zbrusu nové úložiště radioaktivního odpadu a navezen první čerstvý radioaktivní materiál, ale záhy bylo odsouhlaseno, že na úložiště bude každý další rok dovezeno o 5% méně čerstvého radioaktivního odpadu než rok předchozí.

Pro jednoduchost předpokládejme, že radioaktivní odpad má poločas rozpadu 100 let (běžný radioaktivní odpad má daleko delší poločas rozpadu). Poradte obyvatelům přilehlých obcí, kterého roku se mohou těšit na nejvyšší dávku radiace, a umožněte jim tak třeba naplánovat založení rodiny. Při řešení můžete s výhodou použít váš oblíbený tabulkový procesor, třeba Excel nebo Calc.

(řešení str. 57)

Úloha V.P ... nabitý svět

Jak všichni víme, kladné a záporné elektrické náboje jsou ve vesmíru v rovnováze, jinak by elektrická odpudivá síla překonala gravitační a tělesa by nedržela pohromadě. Ale je ta rovnováha dokonalá? Co když jsou všechna tělesa ve vesmíru nepatrně kladně (nebo záporně) nabitá a odpudivá elektrická síla snižuje účinek gravitace. Jak by se taková nerovnováha projevila?

Navrhněte způsob, jak tuto nerovnováhu zjistit, a odhadněte, jakou nejmenší nerovnováhu jsme touto metodou schopni určit. Nerovnováhou myslíme celkový náboj (rozdíl kladného a záporného) v nějakém velkém objemu.

(řešení str. 59)

Úloha VI.1 ... rozcvička

a) zprohýbané prkno

Prkno dané délky leží vodorovně. Z jednoho konce po něm pošleme kuličku. Za jakých podmínek bude na druhém konci prkna nejdříve?

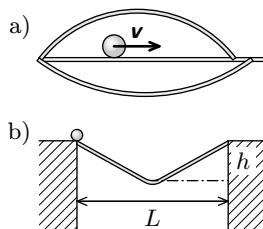
- Prkno bude prohnuté nahoru.
- Prkno bude prohnuté dolů.
- Prkno bude rovné.
- Při libovolném prohnutí bude doba stejná.

Svoji volbu řádně odůvodněte.

b) zlomené prkno

Prohlubeň šířky L přemostíme prohnutým prknem. To se skládá ze dvou stejně dlouhých rovných částí, které jsou uprostřed spojeny zlomem. Na jeden konec položíme kuličku. Pro jakou hloubku prohnutí h bude kulička na druhém konci nejdříve? Zlom je tak hladký, že na něm kulička neztrácí energii. Mohlo by se vám hodit, že funkce $f(x) = x + 1/x$ má minimum v bodě $x = 1$.

(řešení str. 61)



Obr. 3. K rozcvičce

Úloha VI.2 ... zlý trojúhelník

Máme dlouhou štěrbinu a vedle ní bodovou díрку. Jak bude vypadat interferenční obrazec na rovinném stínítku, posvítíme-li skrz ně koherentním světlem? Zanedbejte difrakci na samotné štěrbině a samotné dírci.

(řešení str. 63)

Úloha VI.3 ... letadlo

Jak dlouhý čas uběhne v letadle mezi „západem“ a „východem“ slunce, letí-li v rovině ekliptiky? A jak to bude vypadat s délkou dne a noci? Potřebné údaje jako běžnou letovou hladinu si zjistěte na internetu. Rozeberte oba případy, kdy letadlo letí na západ i na východ.

(řešení str. 64)

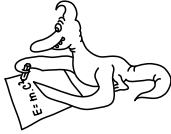
Úloha VI.4 ... konečné řešení otázky globálního oteplování

Jak by se změnil výkon slunečního záření dopadajícího na Zemi v odsluní, když by byla jednorázově vychýlena zemská dráha (změnou její okamžité rychlosti ve směru její dráhy) tak, aby byl pozemský rok o týden delší? Odhadněte teplotu Země v přísluní a odsluní, pokud by Země měla téměř nulovou tepelnou kapacitu. Stačí uvažovat, že původní dráha Země byla kruhová a přešla na eliptickou.

(řešení str. 65)

Úloha VI. P ... nošení vody

V létě bylo zakázáno vynášet z bazénů vodu v bermudách. Kolik ale může člověk vynést vody ve vlasech? Předpokládejme, že vlasů je větší počet (z bazénu nevynáší vodu děd Vševed). (řešení str. 68)

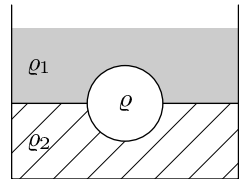


Řešení teoretických úloh

Úloha I. 1 ... rozcvička

a) mezi vodami

Na rozhraní dvou nemísitelných kapalin se vznáší pevná homogenní koule o hustotě ρ (viz obrázek). Horní kapalina má hustotu ρ_1 , dolní ρ_2 , přičemž víte, že $\rho_1 < \rho < \rho_2$. Jaká část objemu koule se nachází v horní a jaká v dolní kapalině?



b) sesterská planeta

V posledních několika letech již byla objevena spousta planet velikosti Jupitera ležících mimo Sluneční soustavu. Daleko zajímavější by bylo ovšem objevovat planety, které jsou podobné Zemi. Předpokládejte, že chcete objevit planetu podobnou Zemi (terestrická planeta s podobným poloměrem jako Země), která obíhá svou hvězdu podobnou Slunci (stejná spektrální třída – podobná hmotnost, podobný poloměr) jednou za pozemský rok. Předpokládejte, že tato soustava je vzdálená od našeho Slunce zhruba 10 parseků. Určete podmínky, za kterých by šlo pozorovat planetu přímo z poklesu jasnosti hvězdy a odhadněte dobu, na kterou tato situace nastane. Jak se zkomplikuje hledání takové hvězdy, když soustava bude mít víc planet?

Mezi vodami

Koule je z části v kapalině s indexem 1 a z části v kapalině 2; označme příslušné objemy V_1 a V_2 . Tyto části se nazývají kulová úseč.

Podle Archimédova zákona je část ponořená v dolní kapalině nadnášena silou $F_2 = V_2 \rho_2 g$. Podobně na horní část koule působí vztlaková síla $F_1 = V_1 \rho_1 g$. Nyní nám stačí přidat působení tíhové síly a máme rovnováhu sil $F_1 + F_2 = F_g$, kam dosadíme předchozí výsledky a zkrátíme g . Obdržíme $V_1 \rho_1 + V_2 \rho_2 = (V_1 + V_2) \rho$.

V zadání jsme se ptali, jaká část objemu koule se nachází v horní a jaká v dolní kapalině? Zajímá nás tedy poměr V_1 a V_2 . Ten získáme několika úpravami předchozí rovnice.

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{-\rho_2 + \rho}{\rho_1 - \rho}.$$

Sesterská planeta

Hned na začátek si zavedeme rozumné předpoklady, ze kterých budeme dále vycházet. Vzhledem k tomu, že planetu velikosti Země nejspíše chceme objevit, protože by nás zajímalo, kde by mohly žít podobné formy života jako na Zemi, tak od planety požadujeme, aby obíhala po dráze s nízkou excentricitou – konkrétně pro jednoduchost budeme uvažovat, že se pohybuje po kružnici (vysoké excentricita by způsobovala velké rozdíly teplot v průběhu roku).

Je zřejmé, že k poklesu jasnosti dojde v okamžiku, kdy planeta přechází přes hvězdu. Tato metoda objevování exoplanet se nazývá fotometrická metoda. K záskrytu může dojít pouze u hvězdných soustav, jejichž rovina, ve které obíhají planety, protíná naši Sluneční soustavu. To je relativně vzácné a proto je tato metoda prakticky nepoužitelná pro objevování planet. Pro to se prakticky používá často například Dopplerova metoda, která z posunu spektrálních čar v průběhu času určuje změnu radiální rychlosti a z toho pak i přítomnost exoplanety.

Ale zpět k teoretickému využití naší metody. Na obrázku 4 můžete vidět schematický náčrt toho, jak by se nám mohly jednotlivé polohy planet jevit (jedná se vlastně o různé projekce kružnice s koulí ve středu) Možnost a) je pro naše pozorování vůbec nejlepší – planeta přechází blízko středu hvězdy a přechod jí tedy bude trvat nejdéle. Při přechodu u soustavy b), kdy planeta přechází sice přes svou hvězdu, ale prochází blíže ke kraji a přechod jí bude trvat kratší čas. V případech c) a d) bychom touto metodou planetu vůbec nemohli objevit. V případě c), kdy je orbita alespoň nakloněná, pak lze použít např. zmíněnou Dopplerovu metodu. V případě d) (kdy planeta obíhá v rovině kolmé na spojnici pozorovatel – hvězda) se dá použít např. astrometrická metoda, která přítomnost planety určuje na základě změn polohy hvězdy na obloze.

Nyní již k samotnému výpočtu doby přechodu planety. Předpokládáme, že jev můžeme vůbec pozorovat (soustava má zvolenou dobu oběhu právě takovou, že pokud je soustava v nevhodné pozici pro pozorování (např. z našeho pohledu za Sluncem), tak je v nevhodné pozici každý rok). Určíme maximální dobu přechodu (případ a) z obrázku 4. V zadání je přímo řečeno, že planeta oběhne hvězdu jednou za rok a tedy tak často také budeme moci pozorovat přechod. Označme vzdálenost pozorované soustavy od nás jako $d = 10$ pc. Jak bylo v zadání uvedeno, tak můžete pokládat rozměry v soustavě obdobné jako v Sluneční soustavě a pro řádový odhad vezmeme z matematicko-fyzikálních tabulek údaje na dvě platné cifry. Poloměr hvězdy je $R_S = 7,0 \cdot 10^8$ m, hmotnost hvězdy $M_S = 2,0 \cdot 10^{30}$ kg.

Vzhledem k tomu, že roli dostředivé síly F_d hraje síla gravitační F_g , dá se vyjádřit jako

$$F_d = M_P \frac{v^2}{r}, \quad F_g = \kappa \frac{M_P M_S}{r^2},$$

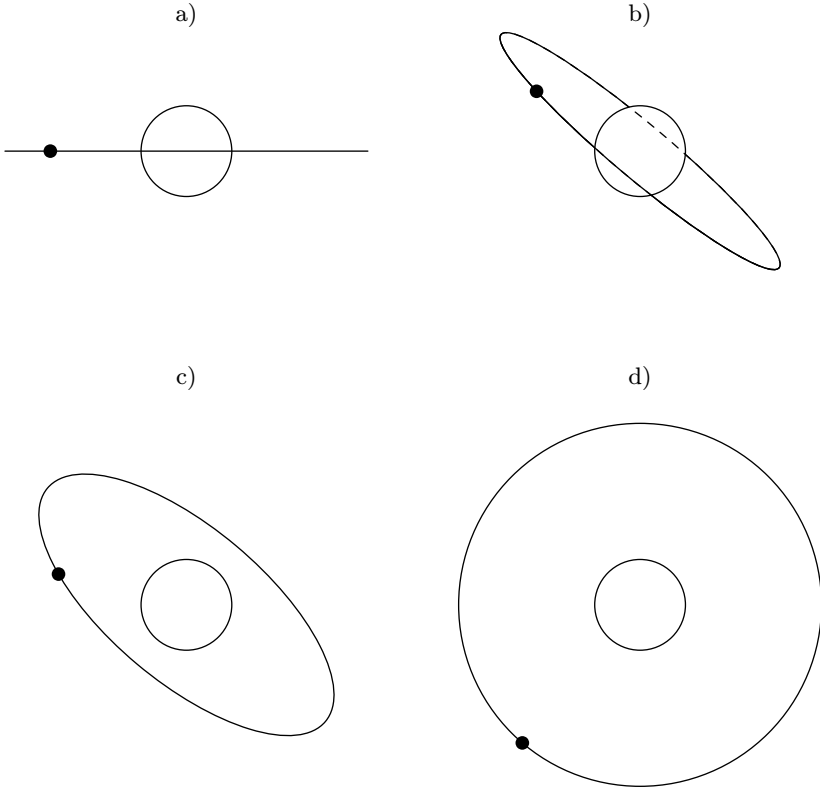
kde M_P je hmotnost planety a M_S hmotnost hvězdy a tyto splňují podmínku $M_S \gg M_P$. Dále $\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ je gravitační konstanta a r je vzdálenost mezi těžišti planety a hvězdy. Z toho dále plyne

$$M_P \frac{v^2}{r} = \kappa \frac{M_P M_S}{r^2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\kappa \frac{M_S}{r}}.$$

Příčemž pro pohyb po kružnici platí $v = \frac{2\pi r}{T}$, kde T je doba oběhu (1 rok). Odtud pak zase plyne

$$\frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \varkappa \frac{M_S}{r} \Rightarrow r^3 = \frac{\varkappa}{4\pi^2} T^2 M_S.$$

Vzhledem k tomu, že všechny proměnné na pravé straně rovnice jsou stejné jako pro Zemi, tak obíhá planeta kolem cizí hvězdy také po dráze o poloměru $r = 1 \text{ AU} \doteq 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$.



Obr. 4. Možné pozice orbity planety vůči nám jako pozorovateli (ve zkráceném měřítku)

Zbývá si už jenom výpočet výrazně zjednodušit zdůrazněním splněných předpokladů a to, že $d \gg r \gg R_S$. Proto můžeme brát, že dráha, kterou planeta z našeho pohledu urazí před svým sluncem, je $2R_S$. Potom už dobu přechodu t spočítáme jednoduše z rychlosti oběhu planety v

$$t = \frac{2R_S}{v} = \frac{2\sqrt{r}R_S}{\sqrt{\varkappa M_S}} \approx 13 \text{ hodin}.$$

Přechod planety přes hvězdu tedy bude trvat maximálně cca 13 hodin.

Kdyby nás zajímal odhad o kolik procent klesne v této době hvězdě jas L , pak si to můžeme vypočítat z poměrů průřezů hvězdy S_S a planety S_P vzorcem

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{S_P}{S_S} = \frac{R_P^2}{R_S^2} \approx 0,008\%$$

Pokles jasnosti je tedy velmi malý a měření by bylo náročné i na rozlišovací schopnost dalekohledu.

V případě, že by v soustavě bylo více planet (což se zdá z dosavadních pozorování daleko pravděpodobnější, než že by planeta byla v soustavě sama), pak budeme pozorovat ročně průměrně více poklesů. To, jak často, by záleželo na tom, jestli vůči planetě, kterou jsme pozorovali, obíhá po dráze bližší své hvězdě (pak obíhá častěji než za rok), nebo po vzdálenější. Teoreticky by mohla obíhat i po stejné dráze, ale je vysoce nepravděpodobné, že by taková soustava vznikla. Právě díky tomu, že je nepravděpodobný výskyt dvou a více planet na stejné oběžné dráze, pak můžeme rozpoznat planety právě díky různým dobám oběhu. Dalším rozlišovacím znakem může být právě rozdílný pokles jasnosti při přechodu planety, která má jinou velikost. Mohlo by se i stát, že bude přecházet víc planet zároveň, ale to právě můžeme teoreticky také rozpoznat pomocí toho, že pokles jasu bude mít složitější průběh než u přechodu jedné planety.

Úloha I. 2 ... káča bez čerta

Jakub má u babičky káču, na jejíž horní ploše je nakreslená spirála. Káču roztočíme a díváme se na ni shora. Jaké obrazce pozorujeme a proč?

To, co uvidíme na káči, bude záviset zejména na její úhlové frekvenci otáčení ω_k . Existují dvě oblasti, ve kterých se o obrazce budeme zajímat. Lidské oko totiž má určitou dobu odezvy, po kterou mu trvá zareagovat na změnu obrazu. Mimo chodem, způsob, jakým lidské oko snímá obraz a jakým jej následně vyhodnocuje, je přinejmenším zajímavý. Například věci, které máme v periferní oblasti vidění, vidíme černobíle a mozek si barvy vymýšlí podle toho, co viděl v bezprostřední minulosti. Ostré barevné vidění se omezuje na žlutou skvrnu. Vraťme se tedy k celkové odezvě oka. Ta činí asi $1/25$ s. V technice bychom ji popsali obnovovací frekvencí f_o ; $\omega_o = 2\pi f_o$. Dá se tedy očekávat, že se obrazec, který uvidíme na káči, bude lišit podle toho, jestli je káča rychlejší než oko nebo naopak.

a) $\omega_k < \omega_o$

V takovéto situaci ještě dokážeme rozlišit to, že na káči je namalovaná spirála. S postupným zvyšováním frekvence se nám bude čím dál tím víc obtížněji rozlišovat, že spirála nejsou namalovaná kolečka. Podle směru navinutí spirály se nám bude zdát, že kolečka se přibližují ke středu nebo ke kraji. Toto



Obr. 5. Káča před roztočením

je víceméně jenom psychologický efekt, pokud bychom nahradili oko kamerou s odpovídajícím počtem snímků za sekundu, viděli bychom stále rotující spirálu.

b) $\omega_k \geq \omega_o$

Zde je situace zajímavější. Představme si (pro jednoduchost), že se díváme na polopřímku vycházející ze středu spirály. Každému bodu ve vzdálenosti r na této polopřímce můžeme přiřadit hodnotu od 0 do 1, která bude odpovídat tomu, jak černý jej uvidíme (0 je černá, 1 bílá). Označme tuto veličinu $v(r)$. Během okamžiku, kdy oko snímá barvu tohoto bodu, jím projde oblouk,¹ na kterém se střídají černá a bílá barva. Poměr mezi částí tohoto oblouku, která je černá a celkovou jeho délkou odpovídá barvě, kterou uvidíme. Přesněji

$$v(r) = 1 - \frac{b\left(\frac{\omega_k}{\omega_o}\right)}{2\pi r \frac{\omega_k}{\omega_o}},$$

kde $b(\omega_k/\omega_o)$ je délka oblouku, kterou zabírá černá barva a r je vzdálenost zkoumaného místa od středu.

Zde naše úvahy utneme, protože počítat $b(\omega_k)$ pro neznámou spirálu je poněkud obtížné (kromě parametrů spirály také závisí na poměru ω_k/ω_o), a odkážeme na pokusy, které jste si sami doma provedli. Někteří řešitelé si spirály ze zadání nalepili např. na disk brusky a zjistili, že se takto na káče objeví soustředné kruhy, které však nikam dál již necestují. Některým z vás sice cestovaly, ale to je jen další klam spojený s tím, že osa koná precesní pohyb, čímž se v čase efektivně mění rozložení černé a bílé na spirále. Na závěr ještě zmiňme, že pro vhodnou spirálu (např. $r_1 = k\varphi$, $r_2 = k(\varphi + \delta)$) lze dosáhnout i toho, že výsledný obrazec může mít jednu barvu.

¹⁾ Je delší než obvod kružnice na níž leží, zvláště pro velmi vysoké ω_k .

Úloha I. 3 ... houpací kůň

Nehmotná tyč délky h je ve středu připevněna na nehmotný oblouk o vrcholovém úhlu 2φ a poloměru R . Na konci tyče je závaží m . Pohyb probíhá pouze v rovině. Určete podmínky stability a periodu kmitů takového houpacího koně.

Nejprve si udělejme v celé situaci jasno. Na obrázku je nakreslena rovnovážná poloha a vychýlená poloha společně s působícími silami. Gravitační sílu netřeba ozřejmovat. Normálová síla podložky F_N působí proti ní a třecí síla F_t zajišťuje, aby se kůň kromě otáčení kolem bodu O a posouval ve směru osy x , a tím pádem neprokluzoval.

- Aby byla soustava stabilní, musí při vychýlení z rovnováhy vzniklá síla působit proti této výchylce. Z obrázku a hlavně zakreslených působících sil vidíme, že tato podmínka bude splněna, pokud $R > h$. Tehdy bude vzniklý moment síly F_g působit proti natočení koně.
- Protože houpací kůň neprokluzuje a než ho pustíme, tak se nehýbe, musí platit $a = h\varepsilon$, kde a je zrychlení závaží a ε je úhlové zrychlení koně kolem závaží. Moment setrvačnosti koně kolem závaží je nulový, jelikož veškerá jeho hmota je soustředěna právě v závaží. Moment působících sil vůči tomuto bodu tak musí být nulový, jinak bychom dostali nekonečné úhlové zrychlení. Pro malé kmity tak dostaneme

$$mg(R-h)\alpha \approx F_N(R-h)\sin\alpha = F_t h(1-\cos\alpha) \approx F_t h,$$

$$F_t = mg\alpha \left(\frac{R}{h} - 1 \right).$$

Dále z Newtonova zákona

$$mh\varepsilon = ma = -F_t = -mg\alpha \left(\frac{R}{h} - 1 \right),$$

v čemž poznáváme rovnici harmonického oscilátoru², ze které vyčteme³

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R} \frac{1-q}{q^2}},$$

kde $q = h/R$.

Všimněme si limitních případů. Pro $q \rightarrow 1$ je $\omega \rightarrow 0$, což odpovídá prosté kouli. Ta při vychýlení také nekmitá. Pro $q > 1$ je frekvence imaginární, což koresponduje s tím, že soustava v takovém případě není stabilní. Pro $q \rightarrow 0$ máme $\omega \rightarrow \infty$, což odpovídá například míčku skákajícímu do nekonečně malé výšky. Pro $q \rightarrow -\infty$ je konečně $\omega \sim \sqrt{g/|h|}$, což odpovídá matematickému kyvadlu, ve které houpací kůň přechází.

²⁾ Pro harmonický oscilátor platí (zrychlení) = -(konstanta) × (výchylka).

³⁾ $\omega = \sqrt{(\text{konstanta})}$

Úloha I.4 ... bublifuk

Mára si koupil bublifuk a jal se na balkoně vyfukovat bubliny, venku byl stálý atmosférický tlak p_0 . Když se mu jedna obzvláště povedla (měla poloměr r a hmotnost mýdlové vody byla m), zamyslel se a vypočítal její celkovou tepelnou kapacitu. Učinite totéž.

Nejprve provedeme předběžné pozorování, které nám osvětlí, co je to povrchové napětí σ . Pokud bychom povrch kapaliny rozřízli, z obou částí by se vytvořily kuličky. Proto si představujeme, že v myšleném řezu drží pohromadě každý úsek délky Δl malí skřítkové silou o velikosti

$$\Delta F = \sigma \Delta l \quad (1)$$

a směru kolmém k rovině řezu. Vynásobením (1) kouskem dráhy Δs ve směru působení síly dostáváme změnu potenciální energie při zvětšení povrchu ΔA

$$\sigma \Delta l \Delta s = \sigma \Delta A.$$

Bublínu rozřízneme středem, čímž vznikne obvod $2\pi r$ a odpovídající síla $4\pi r\sigma$ za vnitřní i vnější povrch bubliny, kde r značí poloměr bubliny. Tu musí vyrovnat tlak uvnitř plynu p působící na průřezu πr^2 . Z rovnosti sil vyjde

$$p = \frac{4\sigma}{r},$$

což lze snadno zobecnit tak, že $p \mapsto p - p_0$ znamená přetlak.

Tepelná kapacita C se definuje jako teplo Q , které musíme dodat, abychom zvýšili teplotu tělesa o jednotku

$$Q = C\Delta T,$$

zatímco atmosférický tlak se nemění. Tepelná kapacita říká, jak je těžké těleso ohřívat, jak moc tepla se do něho vejde při jednotkovém zahřátí. Pro dodané teplo platí

$$Q = c\Delta T + \Delta U + \Delta U_{\text{pov}}, \quad (2)$$

kde první člen vyjadřuje, že se mýdlová voda ohřívá s kapacitou c , druhý člen odpovídá vnitřní energii plynu $\Delta U = C_V\Delta T$, kde C_V se nazývá kapacita plynu při konstantním objemu a třetí člen vyjadřuje změnu potenciální energie uložené na povřích $\Delta U_{\text{pov}} = 2\sigma\Delta A$.

Stačí nám tedy zjistit, jak se změní plocha ΔA při změně teploty ΔT . Přitom vyjdeme z vzorce pro objem koule $V = Ar/3$, který je stejný jako vzorec pro objem kužele, a ze stavové rovnice ideálního plynu

$$nRT = pV = \left(p_0 + \frac{4\sigma}{r}\right)V = p_0V + \frac{4\sigma}{3}A,$$

kde n značí látkové množství plynu a R plynovou konstantu. Z této rovnice zjistíme snadno přírůstky

$$nR\Delta T = p_0\Delta V + \frac{4}{3}\sigma\Delta A. \quad (3)$$

Zbývá najít vztah mezi přírůstkem plochy a objemu (podrobně viz kap. 0 letošního seriálu). Ze vztahu pro délkovou a objemovou roztažnost plyne

$$3\frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta V}{V}$$

a analogický vztah můžeme napsat pro plošné přírůstky

$$2\frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta A}{A}.$$

Ovšem z roznásobení poslední rovnice máme

$$\frac{1}{2}r\Delta A = A\Delta r = \Delta V,$$

kde poslední rovnost má u koule názorný geometrický význam, kterého se používá při odvození vztahu pro objem koule: Přírůstek objemu je přibližně „kvadr“ o podstavě A a výšce Δr .

Dosazením do stavové rovnice (3)

$$nR\Delta T = \frac{r}{2}\left(p_0 + \frac{8\sigma}{3r}\right)\Delta A.$$

a do rovnice zachování energie (2) dostáváme kapacitu bubliny

$$C = c + C_V + \frac{4\sigma}{r} \frac{nR}{p_0 + \frac{2}{3}\frac{4\sigma}{r}} = c + C_V + \frac{nRp'}{p_0 + \frac{8}{3}p'}, \quad (4)$$

v níž rozhoduje kapilární přetlak $p' = 4\sigma/r$.

Je jasné, že bychom mohli ekvivalentně uvažovat práci plynu $(p - p_0)\Delta V$, kde ΔV značí změnu objemu. Pak bychom místo posledního členu v (2) dostali práci konanou plynem

$$(p - p_0)\Delta V = \frac{4\sigma}{r} \left(\frac{1}{2}r\Delta A\right) = \frac{4\sigma}{r} \frac{nR\Delta T}{p_0 + \frac{8}{3}\frac{\sigma}{r}},$$

což dá poslední člen v (4). Pro monoatomární plyn $C_V = \frac{3}{2}nR$ lze například kapacitu zapsat

$$C = c + \frac{3}{2}nR \left(1 + \left(1 - \frac{p_0}{p_0 + \frac{8}{3}p'}\right)\right),$$

takže vidíme, že člen z povrchového napětí má stejnou velikost jako kapacita plynu pouze pro malinké bublinky $p' \rightarrow \infty$ a že pro velké bubliny $p' \rightarrow 0$ se povrchové napětí vůbec neuplatní, což jsme čekali.

Úloha I. P ... *Edudant a Francimor*

Dva světaznalí cestovatelé, jeden tlustý a jeden hubený, se cestou v letadle dohadují o tom, kdo z nich by déle přežil v extrémních podmínkách daleko od civilizace. Rozsoudíte je, kdo vydrží déle ve velkém horku ($50\text{ }^{\circ}\text{C}$), v mrazu ($-5\text{ }^{\circ}\text{C}$), na hladině klidného tropického moře po potopení lodi, v hurikánu nebo při silném sněžení? A jak by to mohlo dopadnout, kdyby je zastihlo mohutné zemětřesení v centru velkoměsta? Kromě jejich tělesné stavby mezi nimi nejsou žádné rozdíly, oba jsou stejně oblečení a nic dalšího s sebou nemají (žádné jídlo, vodu, sirky ani jiné vybavení). Neuvažujte ani žádné vnější vlivy, které nejsou zmíněny (dravou zvěř, žraloky, kanibalismus apod.) Snažte se být nápadití a všimněte si i maličkostí.

V zadání je naznačeno, že jediné, v čem se naši dva cestovatelé liší, je tělesná hmotnost. Tloušťík na sobě bude mít zjevně mnohem větší množství tuku, takže se musíme podívat, jaké fyzikální vlastnosti má tuk a jak to bude ovlivňovat jednotlivé případy.

Ve velkém horku (tedy řekněme $50\text{ }^{\circ}\text{C}$) bude mít větší problém tloušťík. Proč? Předpokládejme, že člověk je z velké části složen z vody, která má vysokou tepelnou kapacitu (cca $4800\text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\text{K}^{-1}$), tedy je poměrně těžké ji ohřát. Tělesný tuk je poměrně komplexní sloučenina, nicméně za jeho základ můžeme vzít glycerol, jehož tepelná kapacita je oproti vodě poloviční (cca $2400\text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\text{K}^{-1}$)⁴. Je tedy zřejmé, že zahrát tuk je mnohem jednodušší, tudíž tloušťík bude mít problém přežít v teplém prostředí. V zimě bude mít větší problém střízlík. Sice je pravděpodobně v lepší fyzické kondici a mohl by zvládnout regulaci tělesné teploty, ale pramálo mu to pomůže. Tuk v tomto případě funguje jako tepelná izolace

V hurikánu bude největší roli hrát to, jakou má dotyčný hmotnost. S tloušťíkem bude těžší vůbec pohnout (stačí si vzpomenout na Newtonovy pohybové zákony), zato nízká hmotnost bude značnou nevýhodou, neboť střízlíka hurikán snáze „sfoukne“.

Ve sněžné bouři je hlavním faktorem přežití to, jak moc se namočíme. Vlhké oblečení totiž ztrácí veškeré izolační vlastnosti. Když se podíváme na účinný průřez našich dvou cestovatelů, bude jasné, že víc sněhových vloček, tedy vlhkosti na sebe nachytá tloušťík. Z toho pohledu mu hrozí rychlejší umrznutí a tedy rychlejší smrt.

Co se týče ztroskotání lodi, musíme se zamyslet nad hustotami, jelikož je známo, že méně hustá kapalina plave na hustější. Hustota mořské vody je cca $1,025\text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$, hustota tuku je cca $0,9\text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$. Z toho vyplývá, že tloušťík si na hladině bude plavat jako bójka, kdežto střízlík bude muset vynakládat energii na to, aby plaval, jelikož svalstvo má hustotu cca $1,1\text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$.⁵ Energie mu pravděpodobně brzy dojde, takže zemře dřív.

V zemětřesení je situace poměrně složitá. Musíme se prvně zamyslet nad tím, co je třeba udělat v případě zemětřesení. Příručky radí, že jsme-li v místnosti, je třeba se schovat pod postel nebo stůl a nevysskytovat se v blízkosti oken nebo těžkých

⁴) <http://www.sjlipids.com/fattyacd.htm>

⁵) <http://www.netwellness.org/question.cfm/46403.htm>

věcí, které na nás můžou spadnout. Tloušťák může v tomto případě mít problém se pod postel či stůl vlézt. Nicméně obecně má větší stabilitu, tedy je těžší jej vyvést z rovnováhy. Pokud by měl utíkat po třesoucí se zemi, uteče spíš. V našem případě jsme v centru velkoměsta, tedy nejmoudřejší věc, co můžeme udělat je zůstat v budově a schovat se. Pokud naši cestovatelé budou zavaleni, jsou jejich šance asi tak stejné. Lehkou výhodou střízlíka je, že se vleze do menších prostor a má pravděpodobně lepší fyzickou kondici, tedy spíše se ze zavalení dostane. Nicméně v případě zranění jsou oba stejně ztraceni. Pro názorné experimentální řešení doporučujeme shlédnout videa Brainiac.⁶

Úloha II.1 ... rozcvička

a) Jakubova snídaně

Jakub jí k snídani cereální kuličky o hustotě ρ , které si sype do misky ve tvaru komolého kužele (horní podstava má poloměr R , spodní r a výška je l), ve kterém má do výšky h nalité mléko. Koeficient zaplnění prostoru koulemi je κ . Kolik nejvíce kuliček může do misky nasypat?

b) magnetický monopol

Máme velkou plechovou desku, kterou zmagnetujeme tak, že na její horní ploše bude severní magnetický pól (a na dolní ploše ten jižní). Vylisujeme z ní dvě stejné polokoule. Na vnitřní straně obou polokoulí je teď jižní a na vnější severní pól. Polokoule k sobě přiblížíme tak, že vyrobíme celou kouli. Ta má nyní venku pouze severní pól, takže se chová jako magnetický monopol. A nebo ne? Co nám vytvoření takovéto koule zabrání?

Jakubova snídaně

Uvažujme, že pokud kuličky dosáhnou okraje misky, tak se rozsypané a pokud okraje dosáhne mléko, tak se rozlije. Označme m hmotnost kuliček, kterou hledáme. Dále platí

$$V = \frac{\pi}{3} \frac{l}{R-r} (R^3 - r^3),$$

$$V_h = \frac{\pi}{3} \frac{h}{r_h - r} (r_h^3 - r^3),$$

kde V je celkový objem misky, V_h je objem mléka a $r_h = r + h(R-r)/l$ je poloměr hladiny mléka.

Obecně mohou nastat tři případy:

a) Hustota kuliček je menší než hustota mléka a kuličky plavou na mléku.

Objem misky je rozdělen na tři části. Dole je jen mléko, uprostřed je mléko s kuličkami a navrhu jsou jen kuličky. Označme V_m objem kde je jen mléko,

⁶⁾ <http://www.youtube.com/watch?v=ZS5zpQqbaIw>

V_{km} objem kde je mléko s kuličkami a V_{k} objem kde jsou jen kuličky. Dále označme ρ_{m} hustotu mléka a ρ_{k} hustotu kuliček a nakonec m jejich hmotnost. Pak platí lineární soustava rovnic o čtyřech neznámých

$$m = \varkappa V_{\text{km}} \rho_{\text{m}}, \quad (5)$$

$$m = \varkappa (V_{\text{km}} + V_{\text{k}}) \rho_{\text{k}}, \quad (6)$$

$$V_{\text{h}} = (1 - \varkappa) V_{\text{km}} + V_{\text{m}}, \quad (7)$$

$$V = V_{\text{m}} + V_{\text{km}} + V_{\text{k}}, \quad (8)$$

kde V je objem celé misky a V_{h} je celkový objem mléka. Rovnice (5) vychází z Archimédova zákona, (6) vyjadřuje celkovou hmotnost kuliček, (7) vyjadřuje celkový objem mléka a (8) je celkový objem misky. Vyřešením této soustavy získáme

$$m = \frac{\varkappa \rho_{\text{m}} \rho_{\text{k}} (V - V_{\text{h}})}{\rho_{\text{m}} - (1 - \varkappa) \rho_{\text{k}}}.$$

Podmínka plavání kuliček je ověřitelná nerovností $m < V \rho_{\text{k}} \varkappa$.

b) Kuličky narazily na dno a přepadávají kuličky.

Kuličky zabírají celý objem misky, mléko je v prostoru mezi kuličkami. Pak platí

$$m = V \rho_{\text{k}} \varkappa.$$

Podmínka pro náraz na dno je

$$m > \frac{\varkappa V_{\text{h}} \rho_{\text{m}}}{1 - \varkappa},$$

kteřá vychází z Archimédova zákona, kde $V_{\text{h}}/(1 - \varkappa)$ je objem, ve kterém se nachází mléko.

c) Hustota kuliček je větší než hustota mléka a mléko přeteče.

Kuličky zabírají objem velikosti $V - V_{\text{h}}$, a tedy

$$m = \rho_{\text{k}} (V - V_{\text{h}}).$$

Podmínka pro přetečení mléka je $V_{\text{h}} > (1 - \varkappa)V$, tedy mléka je více, než by se vešlo do mezer mezi kuličky.

Pro nalezení správného výsledku pro konkrétní hodnoty by tedy bylo potřeba prověřit všechny tři možnosti a zkontrolovat, které jsou splněny podmínky.

Magnetický monopol

Jedna z Maxwellových rovnic nám říká, že tok magnetické indukce libovolnou uzavřenou plochou je nulový. Matematickou symbolikou lze zapsat

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0,$$

kde \mathbf{B} je pole magnetické indukce, S je uzavřená plocha a $d\mathbf{S}$ je vektor velikosti elementu plochy s normálovým směrem.

To ovšem platí za předpokladu, že neexistuje magnetický monopol. Kdyby existoval, platila by obdoba Gaussova zákona elektrostatiky i pro pole magnetické: Tok magnetické indukce libovolnou uzavřenou plochou je přímo úměrný magnetickému náboji uvnitř plochy. Zapsáno

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = kM,$$

kde k je konstanta úměrnosti a M je celkový magnetický náboj uvnitř plochy.

Žádná z polokoulí magnetický náboj nemá a proto uzavřeme-li libovolnou z nich do plochy, magnetický tok touto plochou bude nulový. Z principu superpozice musí platit, že magnetický tok plochou, kde jsou uzavřené obě polokoule musí být roven součtu toků plochou ve chvíli, kdy obsahuje pouze první a pouze druhou polokouli. Sečtením dvou nul získáme znovu nulu a výsledný tok je zase nulový. Vidíme tedy, že se magnetické účinky polokoulí vyruší a získáme magneticky neutrální kouli.

Jinými slovy: bez monopolu monopol nevytvoríš.

Úloha II.2 ... Lennard-Jonesův potenciál

Mezi dvěma atomy inertního plynu působí tzv. Lennard-Jonesův potenciál

$$U(R) = 4\varepsilon \left(\left(\frac{\sigma}{R} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{R} \right)^6 \right).$$

Předpokládejte, že pohyb atomů je omezen na přímkou. Určete rovnovážnou polohu, aniž byste derivovali! Význam konstant σ a ε bude podrobněji vysvětlen ve vzorovém řešení.

Lennard-Jonesův potenciál je zjednodušeným matematickým modelem chování dvou částic plynu. Chování částic závisí na jejich vzdálenosti R a modeluje se pouze v jedné dimenzi.

Pro lepší představu můžeme vidět na obrázku, jak vypadá závislost potenciální energie na vzdálenosti mezi těmito částicemi. K určení rovnovážné polohy tedy vlastně musíme zjistit, kde je minimum této křivky, kterou můžeme popsat rovnicí

$$U(R) = 4\varepsilon \left(\left(\frac{\sigma}{R} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{R} \right)^6 \right). \quad (9)$$

Minimum bez derivování můžeme zjistit pomocí upravení na čtverec.

Pro větší přehlednost si nejprve zavedeme substituci

$$A = \frac{2\sigma^6 \sqrt{\varepsilon}}{R^6}.$$

Pravou stranu rovnice (9) pak můžeme přepsat jako

$$U(R) = A^2 - 2A\sqrt{\varepsilon} = (A - \sqrt{\varepsilon})^2 - \varepsilon. \quad (10)$$

Pro doplnění na čtverec jsme přičetli a odečetli ε (čímž se hodnota nezmění) a již vidíme, že kvadratický člen bude $(A - \sqrt{\varepsilon})$ a konstantní $-\varepsilon$. Z tohoto tvaru je již patrné, že minimum má potenciál v bodě $A = \sqrt{\varepsilon}$, tj.

$$r_0 = \sigma\sqrt[6]{2}.$$

Hloubka tohoto minima je rovna

$$U(r_0) = -\varepsilon.$$

Vypočteme-li $U(\sigma) = 0$. Nyní je již znám význam konstant σ a ε . σ je vzdálenost, které odpovídá nulová energie a ε je hloubka potenciálové jámy.

K vyřešení úlohy můžeme použít i jiný obecnější postup. Budeme zkoumat rovnici $U(R) = U_0$ a hledat U_0 takové, aby tato rovnice měla právě jeden kořen. Tento je extrémem a jemu odpovídající konstanta U_0 jeho hodnotou.

Ukažme si tento postup v praxi. Vyděme z rovnice (10).

$$A^2 - 2A\sqrt{\varepsilon} - U_0 = 0.$$

Tato rovnice bude mít jeden kořen, právě tehdy pokud diskriminant $D = 0$, tj.

$$D = 4A^2\varepsilon + 4A^2U_0 = 0,$$

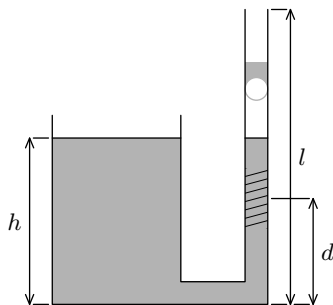
toto je splněno pro $U_0 = -\varepsilon$. Dále pro jediný kořen této rovnice platí

$$A = \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{2} = \sqrt{\varepsilon}.$$

Tento výsledek se shoduje s výsledkem uvedeným výše.

Úloha II.3 ... překapávač

Lukáš si k psaní protokolů z praktika vařil kávu a mírně si upravil kávovar. Ke dnu nádoby přidělal zahnutou trubičku, na kterou namotal topnou spirálku. Spirálka byla ve výšce d nade dnem nádoby (viz obrázek), hladina vody ve výšce h . Parametry trubičky a spirálky jsou právě takové, aby pára vzniklá varem vody přiváděné z rezervoáru v nádobce vytlačovala vodu nad sebou nahoru. Spočítejte výkon, který musíme dodávat do spirálky, aby z ústí trubičky ve výšce l vytékala voda. Jaká je účinnost takového tepelného stroje? (4 body)



Obr. 6. Překapávač

a stoupající bublina unášející trochu vody

Během výroby kávy se bude v trubici v blízkosti spirálky odpařovat voda, a takto vzniklá vodní pára bude vytlačovat nad sebe vodu, která pak bude vytékat z kávovaru. Nad spirálkou bude tedy směs vody a vodní páry.

V trubici musí nastat rovnost hydrostatických tlaků. Označme ρ_s hustotu směsi vody a vodní páry nad spirálkou a jako ρ_v hustotu vody. Platí

$$(h - d)\rho_v g = (l - d)\rho_s g.$$

Označme ΔV objem směsi páry a vody, která vyteče za čas Δt . Hmotnost vyzdvižené směsi nechť je Δm . Nyní zanedbáme hmotnost páry v kapiláře. Označíme-li ΔV_v objem vody a ΔV_p objem páry; $\Delta V = \Delta V_p + \Delta V_v$, dostáváme

$$\Delta V_v = \Delta V \frac{h - d}{l - d}, \quad (11)$$

$$\Delta V_p = \Delta V \left(1 - \frac{h - d}{l - d}\right) \quad (12).$$

Nyní se zamyslíme, co se stane, když ohříváme vodu spirálkou. Za krátký časový úsek Δt se odpaří voda o hmotnosti $\Delta V_p \rho_p$ a z ústí trubičky vyteče ΔV_v vody. To nám umožňuje vypočítat dodávané teplo, které je určené skupenským teplem L

$$\Delta Q = L \Delta V_p \rho_p.$$

Nyní dosadíme za ΔV_p a ΔV ze vztahů (11) a (12)

$$\Delta Q = L \rho_p \left(1 - \frac{h - d}{l - d}\right) \frac{l - d}{h - d} \Delta V_v.$$

Nyní celý výraz na pravé straně rozšíříme $g \rho_v (l - h) / \Delta t$, protože celkový výstupní výkon je $\Delta m_v g (l - h) / \Delta t$. Výstupní výkon je roven energii, kterou získáme na vyzvednutí vody o hmotnosti Δm_v z výšky h do výšky l za čas Δt . Proto platí

$$P_{\text{in}} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{L \rho_p}{\rho_v g (l - h)} \left(1 - \frac{h - d}{l - d}\right) \frac{l - d}{h - d} P_{\text{out}}.$$

Algebraickými úpravami dostáváme

$$P_{\text{out}} = \frac{\rho_v g(h-d)}{L \rho_p} P_{\text{in}}.$$

Účinnost je definovaná jako využitelná energie ku celkové energii. Platí tedy

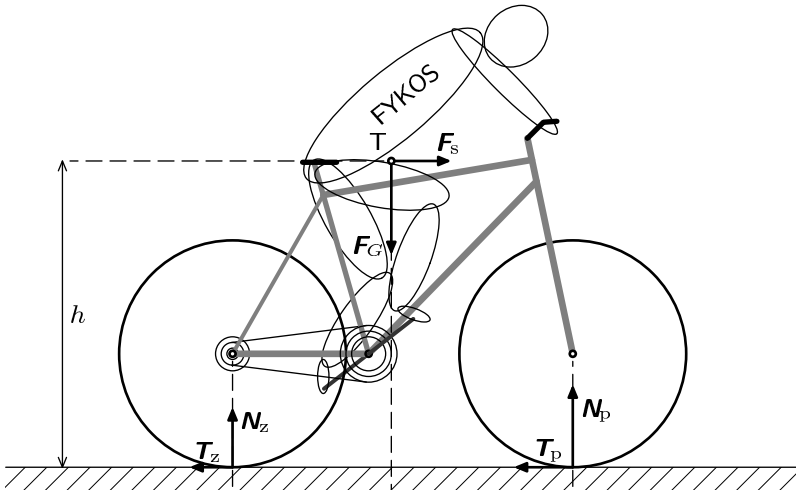
$$\eta = \frac{\rho_v g(h-d)}{L \rho_p}.$$

Ještě je potřeba vypočítat, čemu se rovná ρ_p . Voda se vypařuje za každé teploty. Var však nastane tehdy, pokud se tlak nasycených vodních par rovná tlaku okolního vzduchu. Proto platí $\rho_p = p_a M_{\text{H}_2\text{O}} / M_{\text{vzduch}}$, kde M_x značí molární hmotnost látky x . Tento fakt vychází ze stavové rovnice ideálního plynu. Celková účinnost je směšná. Dosadíme-li $h-d = 10 \text{ cm}$, $L = 2,25 \text{ MJ} \cdot \text{kg}^{-1}$, dostáváme $\eta = 0,05 \%$.

Úloha II.4 ... nemyslíš, zaplatíš

Za jakých podmínek dojde k zablokování a smýkání předního kola při brzdění, aniž bychom přeletěli přes řídítka? Jaký na to má vliv brzdění zadním kolem?

Soustavu cyklisty a kola budeme považovat za tuhé těleso (tzn. vzdálenosti jednotlivých bodů tělesa jsou s časem konstantní) charakterizované třemi body – styčné body předního a zadního kola s podložkou (jejichž vzdálenost je d) a poloha těžiště T . Písmeno x_p značí vodorovnou vzdálenost těžiště a dotyku předního kola. Sledujte obrázek 7.



Obr. 7. Jízdní kolo s cyklistou a síly na něj působící při brzdění

Celá soustava se pohybuje rovnoměrně přímočaře. Pokud začneme brzdit se zrychlením a bude vztažná soustava spojená s cyklistou neinerciální a při popisu pohybu budeme muset uvažovat setrvačné síly.

Aby cyklista nepřepadl, musí být celkový moment sil na něj působících nulový. Za osu otáčení si zvolíme bod styku předního kola s vozovkou. Můžeme z rovnováhy momentů určit mezní zrychlení, při kterém ještě přes řídítka cyklista nepřeletí (v tomto případě bude normálová složka působící na zadní kolo nulová – než přeletí musí se nejprve odlehčit zadní kolo). Na obrázku si můžete prohlédnout síly, které na celou soustavu působí, pak už jsou jejich momenty zřejmé

$$x_p F_G - h F_S - d N_z = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{\text{mez}} = \frac{g x_p}{h}, \quad (13)$$

kde F_G je tíhová síla určená celkovou hmotností m kola a cyklisty, $F_S = ma$ je síla setrvačná způsobená právě zrychlením a .

Nyní mohou nastat dva případy závislé na hodnotě součinitele smykového tření s vozovkou. Buď budeme schopni dosáhnout a_{mez} brzděním přední brzdou bez prokluzování a nebo již při zrychlení $a < a_{\text{mez}}$ dojde ke smyku. Abychom to mohli posoudit, je třeba si napsat vztah určující velikost třecí síly mezi pneumatikou a vozovkou.

Nejdříve budeme muset určit, jaký je normálový tlak na jednotlivá kola. Použijeme první a druhou impulsovou větu

$$\begin{aligned} x_p F_G - h F_S - d N_z = 0 \quad \Rightarrow \quad N_z &= \frac{x_p}{d} mg - \frac{h}{d} ma, \\ N_p &= \frac{x_z}{d} mg + \frac{h}{d} ma. \end{aligned} \quad (14)$$

Pro třecí sílu působící na přední kolo platí

$$T_p = ma \leq N_p f \quad \Rightarrow \quad f \geq \frac{ma_{\text{mez}}}{N_p},$$

aby nedocházelo ke smýkání, kde N_p značí hodnotu normálové složky tíhy celé soustavy na předním kole. Dosadíme-li za N_p ze vztahu (14), můžeme vyjádřit zrychlení a

$$a \leq \frac{g x_z f}{d - h f}.$$

Za předpokladu, že součinitel smykového tření je dostatečně velký, je vždy možné dosáhnout většího zrychlení než a_{mez} . Potom nastane nerovnováha momentů sil a cyklista přepadne přes řídítka. Tento jev může nastat pro

$$\begin{aligned} \frac{g x_z f}{d - h f} = a \geq a_{\text{mez}} = \frac{g x_p}{h}, \\ f > \frac{x_p}{h}. \end{aligned} \quad (15)$$

Pokud součinitel smykového tření bude menší, než určuje podmínka (15), dostane se přední kolo do smyku dříve, než dosáhneme mezního zrychlení a_{mez} . Cyklista již více brzdit nemůže – přední kolo se neotáčí. A právě v ten okamžik bude

zajímavé začít brzdít zadní brzdou (zrychlení cyklisty je menší než mezní zrychlení a tedy normálová složka tíhy N_z v místě styku zadního kola a vozovky není rovna nule).

Uvažujme maximální dosažitelné zrychlení. Toho dosáhneme, pokud budeme brzdít s použitím obou brzd. Pro zrychlení platí

$$ma = mgf.$$

Dosadíme-li za maximální zrychlení a_{mez} z (13), dostáváme podmínku pro pře-padnutí

$$f > \frac{x_p}{h},$$

což je shodou okolností stejný výsledek, jako při brzdění pouze přední brzdou. Bude-li splněna tato podmínka, může vždy dojít k přepadnutí.

Z tohoto vyplývá, že brzdění zadní brzdou nemá vliv na přepadnutí; má vliv jenom na brzdnou dráhu.

A nakonec, pokud bude součinitel smykového tření nabývat hodnot

$$f < \frac{a_{\text{mez}}}{g} = \frac{b}{h},$$

dojde vždy pouze ke smyku a cyklista přes řídítka nikdy nepřepadne.

Nyní je ovšem zajímavé zamyslet se nad rovnováhou cyklisty. Pokud dojde vždy ke smyku, cyklista může zablokovat obě dvě kola a nic se nezmění (bude pouze zpomalovat úměrně velikosti třecí síly). Rovnováha na kole je ovšem způsobena tím, že se kola otáčí. Jsou to vlastně rotující setrvačníky, které když rotují, tak se „snaží“ udržet osu rotace ve stejném směru vůči inerciálnímu systému (pokud je výsledný moment vnějších sil nulový, jinak působí momentem opačným než moment vnějších sil – tím je způsobena například precese), tedy nám pomáhají udržet na kole rovnováhu. Pokud by se kola netočila, s velkou pravděpodobností cyklista spadne na bok.

Z toho plyne jediné ponaučení – i když myslíš, tak zaplatíš, ale aspoň si můžeš vybrat kolik!

Úloha II. P ... šmoulové a Darth Vader

Po nadýchání se helia se člověku mění hlas tak, že mluví jako šmoula. Stejně to funguje, nadýcháte-li se vodíku (kuřáci, pozor!). Ale dá se dosáhnout i změny na hlas podobný Darthu Vaderovi, nejznámějším médiem je fluorid sírový. Jak funguje změna hlasu? Pokuste se ji kvantitativně odhadnout.

Nejprve si povíme něco o tvorbě hlasu – kde a jak vzniká, a to nám následně pomůže při úvaze, jak dochází ke šmoulovskému efektu.

Základní vlastnosti lidského hlasu jsou dány fyziologií hlasového ústrojí. Význam má především délka hlasivek (u žen se udává pro soprán 14 až 19 mm, u mužů pro bas 24 až 25 mm); čím jsou hlasivky kratší, tím rychleji kmitají a běžný mluvený hlas je vyšší. Intenzita práce hlasivek je mimořádně velká. I když u velmi hlubokého hlasu je vyluzovaná frekvence jen 50 Hz, ženské vysoké hlasy však dosahují až 480 Hz. Dále hlas vycházející z hlasivek nemá barvu lidského hlasu. Charakteristické znění, individuální pro jednotlivce, získává až průchodem nadhrtanovými prostorami – rezonátory, v nichž se mění některé ze svrchních tónů základního hlasu. Na konečném efektu se podílí i rezonance celé lebeční dutiny a lícních kostí. Změnou postavení rtů, jazyka, hrdla je možno barvu hlasu modifikovat. Samotný hlas pak vzniká tak, že proud vzduchu z plic rozechvívá sevřené hlasivky, čímž vznikají zvuky o různých kmitočtech.

Obecně se dá říci, že hlasivky vydávají jednak jeden konkrétní tón a mimo toho ještě celé spektrum vyšších tónů. A v tom je právě ten trik. Základní frekvence řeči je totiž nezávislá na tom, zda testovaná osoba dýchá ve vzduchu nebo v heliu – hlasivky totiž kmitají v obou případech se stejnou frekvencí. Z hlasivek se ozývá základní tón, ale již zmíněné spektrum vyšších tónů se chová ve vzduchu a v heliu odlišně. V dutinách vyplněných vzduchem zesílí určité frekvence a v dutinách s heliem zase jiné – vyšší frekvence. A proč právě vyšší? Rychlost šíření zvuku v heliu je přibližně třikrát tak větší než ve vzduchu. Tyto vyšší frekvence pak mění náš pocit z toho, jaký hlas slyšíme, tedy mění barvu a artikulaci, ale nemění základní tón!

Chcete-li si doma zkusit, že to tak opravdu je, navrhuji následující experiment: Sežente si heliový balonek a nějaký dechový nástroj – např. flétnu, trubku apod., který nám poslouží jako jakýsi rezonátor. Jednoduše na něj zahrajeme několik základních intervalů, načež si dýchneme helia (experimentujte opatrně, prosím!). Co se stane: Tóny se posunou někam úplně jinam než jsme zvyklí, budou vyšší, přičemž se však intervaly zachovají! Pro přehledné vyčíslení se dají využít počítačové programy nebo osciloskop, ale myslím si, že pro názornost toto bohatě stačí.

Co se změny hlasu na Darth Vadera týče, neměli jsme příležitost experimentovat, neboť se fluorid sírový nedá sehnat v menším balení než 10 kg. Ale princip je obdobný jako u helia, jen uvažujeme tak, že spektrum vyšších tónů doplňující základní tón se neozve jako vyšší, ale nižší. Rychlost šíření zvuku ve fluoridu sírovém je totiž o něco menší než ve vzduchu.

Úloha III.1 ... rozcvička

a) dr. Nec

Terka byla o víkendu tahat dřevo. Objem dřeva se měří dvěma způsoby: na kubíky (1 m^3 dřevo-hmoty bez vzduchových mezer mezi kládami) a na plnometry (1 m^3 i s mezerami). Nalezněte převodní vztah mezi těmito dvěma jednotkami (tj. kolik plnometrů odpovídá jednomu kubíku) v závislosti na poloměru klád, ze kterých se skládá hranice. Klády považujte za dokonale hladké válce, které se skládají na sebe.

b) bublifuk

Foukáme do mýdlového povrchu na počátku kruhového tvaru tak, aby měl tvar kulového vrchlíku o poloměru r . Odhadněte, jakou rychlostí do něj musíme foukat?

Dr. Nec

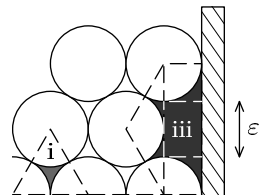
V zadání jsme se trochu, trošičku spletli. Zkušeni dřevaři nám to snad odpustí, a znalí řešitelé chybu objevili. Prodejci dřeva, tedy ti všichni dr. Necové a dr. Voštěpové, používají troje různé jednotky pro měření jeho množství. Tou prvou je skutečný objem dřevní hmoty, tj. krychle o hraně 1 m zcela vyplněná dřevem. Takto měřené množství dřeva se udává v *plnometrech* a značí se písmeny plm.

Častěji se však používá *prostorový metr*, což je opět krychle o hraně 1 m vyplněná poleny, a tedy se započítávají i vzduchové mezery mezi nimi. Dřevo je však urovnané, a proto jsou tyto mezery dosti malé. Níže výpočtem zjistíme jak moc malé. Prostorový metr se označuje symbolem prmr, kde poslední r znamená rovnané.

Konečně se můžete setkat ještě s *prostorovým metrem sypaným*. Představte si hromadu poházených nasekaných špalků dřeva, v níž vymezíte krychli o délce hrany 1 m . Takové množství dřeva odpovídá jednomu sypanému prostorovému metru, 1 prms . Toto počítat nebudeme, ale vlivem velkých mezer mezi špalíky je zde jen asi 40% dřevní hmoty.

Uvažujme nyní kulatiny vzorně srovnané na železničním vagónu nebo na nákladním autě. Nákladový prostor je vymezen jednak podlahou, a po stranách také klanicemi. Předpokládejme, že vzdálenost mezi nimi je celočíselným násobkem poloměru klád R , tedy že dolní vrstva je tam narovnána tak „akorát“. Při pokládání druhé vrstvy se pak dřevo skutálí do mezer mezi kládami v první vrstvě. Třetí vrstva bude však podobně jako první zarovnána tak akorát. A tak dále.

Na vagónu tedy máme několik typů mezer. Díky tomu, že klády jsou dokonale válce, můžeme celou situaci zkoumat pouze ve dvou rozměrech. Zakreslili jsme ji do obrázku 8. Vidíme celkem tři typy mezer: (i) mezi trojicí sousedních klád, (ii) mezi dvojicí klád a stěnou, (iii) mezi trojicí klád a stěnou. Vypočítáme plochy všech těchto geometrických útvarů, ačkoli pro řešení úlohy to není nezbytně nutné.



Obr. 8. Složené klády

Pro výpočet obsahu S_1 využijeme rovnostranný trojúhelník o délce strany $2R$. Protože součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je π , můžeme okamžitě napsat

$$S_1 = R^2 \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2} \right),$$

kde $\sqrt{3}$ je pozůstatek po výšce tohoto trojúhelníku.

Druhá mezera má obsah S_2 , který zjistíme díky obdélníku o rozměrech $2R$ a R . Pak již velmi snadno určíme

$$S_2 = R^2 \left(2 - \frac{\pi}{2} \right).$$

Konečně se dostáváme k poslední možnosti. Velikost plochy S_3 je součtem několika částí: prvně tam je celá S_2 , i když rozdělená na dvě poloviny, dále obdélník o stranách ε a R a konečně ten zbytek, jakýsi ve třech stranách „propadlý“ čtyřúhelník. Jeho plochu označme S_4 . Tedy $S_3 = S_2 + \varepsilon R + S_4$.

Nejprve zjistíme velikost ε . Je to vzdálenost mezi dvěma kládami ob vrstvy. Použijeme opět rovnostranný trojúhelník se stranou $2R$. Jeho výška je $\sqrt{3}R$. Od sud $\varepsilon/2 = \sqrt{3}R - R$, a tedy $\varepsilon = 2R(\sqrt{3} - 1)$.

Nyní vyšetříme plochu S_4 . Použijeme k tomu rovnoramenný trojúhelník s délkou ramen $2R$ a základnou $2R + \varepsilon$. Jeho výšku označme w a podle Pythagorovy věty pro ni platí $w = \sqrt{4R^2 - (R + \frac{1}{2}\varepsilon)^2} = R$. Tedy rovná strana tohoto čtyřúhelníku se dokonce dotýká protější kulaté. Je její tečnou. Teď už snadnou vyjádříme

$$S_4 = R \left(R + \frac{\varepsilon}{2} \right) - \frac{\pi R^2}{2} = R^2 \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2} \right).$$

Dohromady proto $S_3 = (3\sqrt{3} - \pi) R^2$.

Nyní je třeba si rozmyslet, kolik kterých mezer v jednom plošném metru je. Tady nám nezbude než zvolit vhodný průměr klád. Předpokládejme, že klády nakládáme na vůz řady Smmps, který má ložnou šířku⁷ 3100 mm. Průměr klád zvolme např. 310 mm, tj. $R = 155$ mm, a skládáme je do sedmi vrstev po deseti, respektive devíti kusech. Vůz tedy celkově pojme 67 kulatin, přičemž mezer mezi nimi bude věru požehnaně: $5 \cdot (9 + 8)$ prvého typu, $2 \cdot 10$ druhého (uvědomte si, že dvě mezery v rozích jsou polovinou jedné u stěny) a $2 \cdot 3$ poslední jmenovaných.

Celkový průjezdný profil nákladu ohraničeného obdélníkem je součinem šířky dolní vrstvy a celkové výšky

$$P = 2nR \left(2R \left[\frac{1}{2}m \right] + \varepsilon \left[\frac{1}{2}m \right] \right) = 4nR^2 \left(\left[\frac{1}{2}m \right] + \left[\frac{1}{2}m \right] (\sqrt{3} - 1) \right) \doteq 5,955 \text{ m}^2,$$

kde n je počet klád v nejnižší vrstvě a m počet vrstev. Všimněte si využití dolní a horní části podílu $m/2$ pro odlišení různého množství stromů v sudých a lichých vrstvách.

⁷⁾ Viz <http://vozy.cdcargo.cz/katalog-vozu/plosinove-vozy/smmps-54.html>.

Nás však zajímá poměr dřevní hmoty a celkem zabraného místa

$$\nu = \frac{\left(\left[\frac{1}{2}m\right]n + \left[\frac{1}{2}m\right](n-1)\right)\pi R^2}{P} = \frac{(4 \cdot 10 + 3 \cdot 9)\pi}{4 \cdot 10(4 + 3(\sqrt{3} - 1))} \doteq 0,849.$$

Toto číslo je poměrně dobrým výsledkem. V praxi je převodní konstanta podstatně nižší (obvykle 0,65 až 0,8), neboť stromy nejsou válce a nejde je „nacpat“ přímo na sebe jako v této modelové situaci.

Bublifuk

Bublifuk je oblíbená dětská hračka, a proto můžeme předpokládat, že každý si vyzkoušel vyfouknout nějakou tu mýdlovou bublinu. Kromě určité intenzity foukání to však vyžaduje i nemalý cit. Příliš prudký vítr totiž bublinu roztrhne. Zabýváme se pro tentokrát minimální silou foukání, aby se bublina zdárně nafoukla.

Foukáním udělujeme molekulám vzduchu určitou hybnost. Ty pak narážejí na mydlinovou blánu tato jejich hybnost se zužitkovává pro udržování vypouklého tvaru mýdlové blány, neboť, jak známo, kapalina se snaží zaujmout takový tvar, aby její povrch byl co nejmenší. To je způsobeno existencí povrchového napětí, které vyvolává sílu, jež se snaží povrch blány vrátit do rovinného tvaru. Pro jednoduchost budeme uvažovat, že veškerá hybnost pohybujícího se vzduchu se využije k tomuto účelu. Takže síla vzduchu musí být rovna povrchové síle, způsobené povrchovým napětím σ ,

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{4\sigma\pi R^2}{r}, \quad (16)$$

kde πR^2 je obsah vyfukovacího kroužku a r poloměr zakřivení vypouklé blány. Změna hybnosti vzduchu je $z p = mv$ na 0 (dle předpokladu). Je-li hustota vzduchu ρ , pak za dobu Δt na blánu doletí vzduch o hmotnosti $m = \pi R^2 v \Delta t \rho$, takže na levé straně rovnice (16) dostáváme výraz $\pi R^2 v^2 \rho$.

Dosazením obdržíme

$$\pi R^2 v^2 \rho = \frac{4\sigma\pi R^2}{r},$$

odkud elementárními úpravami získáme výsledek

$$v = \sqrt{\frac{4\sigma}{\rho r}}.$$

Někteří řešitelé používali ve svých řešeních integrální počet, ale v tomto případě nepřináší příliš větší přesnost. Kde to není nutné, zkuste raději úlohy řešit bez použití vyšší matematiky.

Úloha III.2 ... zasekanej!

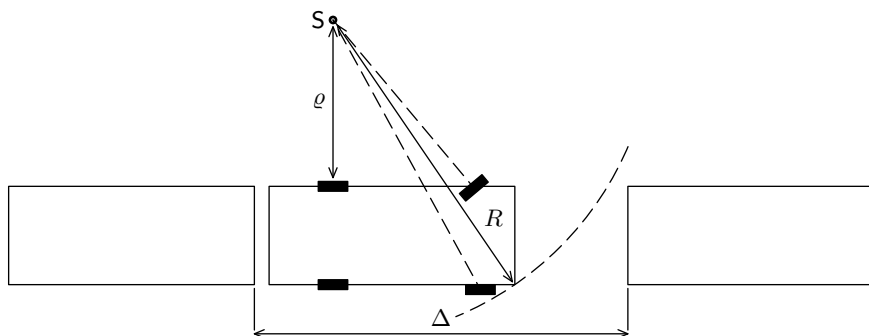
Jistě jste si všimli, že při podélném parkování zpátečkou se auto může vejít i do celkem malé mezery. Mějme auto délky L , šířky d se vzdáleností kol l . Kola se mohou otočit maximálně o α stupňů (tzv. „plný rejď“). Do jak velké mezery budeme schopni zaparkovat při použití zpátečky? A při parkování popředu? Jaká je ideální parkovací strategie? Auto musí být samozřejmě dokonale zarovnané v řadě (tj. rovnoběžně s chodníkem ve vzdálenosti maximálně d_0 od chodníku) a při parkovacím manévru se auto smí pohybovat pouze jedním směrem, tzn. buď dopředu nebo dozadu.

Pokud si přečteme jakoukoli učebnici autoškoly, jsme nabádáni k parkování pozadu. Zkusíme nyní vypočítat, zdali je lepší parkovat popředu nebo doopravdy pozadu.

Budeme řešit nikoli problém zaparkování, ale vyjetí z parkovacího místa. Pokud totiž nějak otočíme kola, tak se pohybujeme po stejné křivce, jedeme-li dopředu i jedeme-li dozadu. Toto bude platit pro „malé“ rychlosti parkování, pokud bychom parkovali smykem, tak to není invertibilní pohyb, ale takto naprostá většina řidičů neparkuje.

Rozeberme nejdříve po jaké křivce se pohybuje auto, pokud otočíme kola. Studujeme-li pohyb jakéhokoli tuhého tělesa v rovině, existuje tzv. pól otáčení⁸ okolo kterého dochází pouze k rotaci. Zkusíme najít tento bod.

Pól otáčení musí ležet na ose zadních kol, protože zadní kola se nenatáčejí. Dále musí ležet na osách⁹ obou předních kol. Pokud by byly například obě přední kola otočena stejně, neexistoval by průsečík os předních a zadních kol, docházelo by ke smýkání a potom bychom museli často měnit obutí. Poloměr a střed otáčení můžeme tedy určit pomocí jednoduché geometrie, viz obrázek 9.



Obr. 9. Parkování pozadu

Uvažujme ještě pro jednoduchost shodné vzdálenosti os kol od konců auta.

⁸⁾ Viz také 2. kapitola seriálu tohoto ročníku.

⁹⁾ Zde za osu považujeme kolmici na rovinu kola v jeho středu.

Parkování pozadu

Jak jsme uvedli výše, budeme studovat vyjíždění z parkovacího místa. Ideální strategie je začít zadní co nejbližší k autu za námi, otočit volantem co nejvíce doleva a doufat, že pravým předním rohem mineme auto stojící před mámu. Pokud se nám již toto podaří vyjedeme například rovně. Je samozřejmě lepší dále začít čížit doprava abychom tolik nevybočili do vozovky.

Nyní se pokusme vypočítat parametry tohoto pohybu. Označme α úhel o který je možno vychýlit kola, L celkovou délku vozidla, d jeho šířku, l rozvor a Δ velikost parkovacího místa. Určíme nejdříve vzdálenost ϱ osy otáčení od levého zadního kola. Z jednoduché geometrie vychází

$$\varrho = l \cotg \alpha .$$

Dále označme R vzdálenost pravého předního rohu vozu od osy otáčení. Pro ni platí

$$R^2 = (\varrho + d)^2 + \left(\frac{L+l}{2}\right)^2 . \quad (17)$$

Uvážíme-li nyní pravouhlý trojúhelník o vrcholech: střed otáčení, levé zadní kolo před počátkem vyjíždění a levý zadní roh vozidla před námi, z Pythagorovy věty dostáváme

$$R^2 = \varrho^2 + \left(\Delta - \frac{L-l}{2}\right)^2 . \quad (18)$$

Z rovnic (17) a (18) vyjádříme Δ

$$\Delta = \frac{L-l}{2} + \sqrt{d^2 + 2dl \cotg \alpha + \left(\frac{L+l}{2}\right)^2} .$$

Dosadíme-li hodnoty: $L = 4 \text{ m}$, $l = 2,5 \text{ m}$, $d = 1,5 \text{ m}$ a $\alpha = 40^\circ$, dostáváme

$$\Delta = 5,41 \text{ m} ,$$

což je o 1,41 m více než délka vozidla.

Uveďme ještě na závěr, že místo potřebné k zaparkování je ještě o něco kratší, protože jsme auto modelovali jako obdélník, ale ve skutečnosti má zakulacené rohy. Proto dojde ke „krizovému“ okamžiku pro menší vzdálenost mezi vozidly.

Parkování popředu

Budeme-li opět zkoumat opačný postup, musíme vyjet z místa pozadu. Nyní však nastává problém a tím je blízkost chodníku na který bychom neměli najet. Nyní je krizovým místem jednak chodník, jednak vozidlo za námi. Proto nastavíme poloměr otáčení tak veliký, aby jsme nenajeli na chodník a tento poloměr budeme udržovat po celou dobu vyjíždění. Tento postup nám ukáže přibližnou velikost parkovacího místa.

Najít ideální trajektorii v tomto případě je velmi těžké, protože pokud bychom předním kolem sledovali okraj chodníku až do okamžiku, kdy tečna k pravému

okraji vozu by neprotínala vozidlo za námi, dostali bychom správné řešení, však určit, po jaké křivce se v tomto případě pohybuje vůz by bylo obtížné¹⁰.

Označíme vzdálenost středu otáčení od levého zadního kola ϱ . Kružnice, po které se pohybuje pravé přední kolo musí být tečná k chodníku. Proto z Pythagorovy věty platí

$$\begin{aligned}(\varrho + d + d_0)^2 &= (\varrho + d)^2 + l^2. \\ \varrho &= \frac{l^2 - 2dd_0 - d_0^2}{2d_0} \approx \frac{l^2 - 2dd_0}{2d_0}.\end{aligned}\quad (19)$$

Provedeme-li stejnou úvahu, která nás vedla k rovnicím (17) a (18), dostáváme

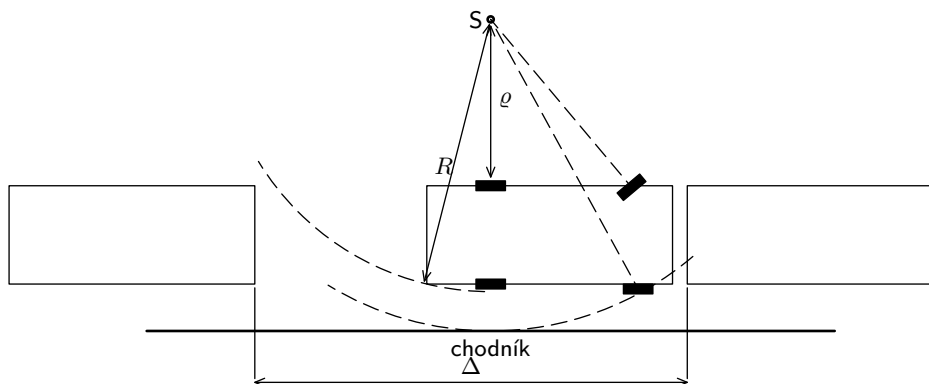
$$\begin{aligned}R^2 &= (\varrho + d)^2 + \left(\frac{L-l}{2}\right)^2, \\ R^2 &= \varrho^2 + \left(\Delta - \frac{L+l}{2}\right)^2.\end{aligned}$$

Algebraickou úpravou dostáváme výraz pro Δ , dosadili jsme za ϱ z (19)

$$\Delta = \frac{L+l}{2} + \sqrt{d^2 + \frac{d}{d_0}(l^2 - 2dd_0) + \left(\frac{L-l}{2}\right)^2}.$$

Pro $d_0 = 30$ cm vychází číselně

$$\Delta = 8,68 \text{ m}.$$



Obr. 10. Parkování popředu

Je vidět, že parkovat pozadu je výrazně lepší, než parkovat popředu. Pro parkování popředu potřebujeme skoro dvojnásobek délky vozu.

¹⁰⁾ Obecně jde o Ψ -křivku, jejíž předpis se získává obtížně.

Úloha III.3 ... čičhač Aleš

Aleš má na koleji na policiče neprodyšně uzavřenou válcovou průhlednou nádobu s toluenem, z 90 % plnou. Aleš si svůj toluen pochopitelně bedlivě střeží. Když se po víkendu vrátil na kolej, všiml si, že se hladina toluenu v nádobě o kousíček snížila a okamžitě obvinil spolubydlícího šnEka z krádeže. Až posléze si uvědomil, že o víkendu začali topit a teplota v ubikaci tudíž stoupla o 20°C. Rozřešte tento detektivní příběh a zjistěte, zda šnEk skutečně čičhal toluen. Jinak řečeno: Jak velký pokles hladiny mohla způsobit změna teploty? Mohl by si takového poklesu Aleš vůbec všimnout? K řešení lze použít data uvedená na [http://en.wikipedia.org/wiki/Toluene_\(data_page\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Toluene_(data_page)).

Předpokládejme, že hustota kapalného toluenu ϱ_k ani objem nádoby V_c se s teplotou T nemění. Označme dále m_p , V_p a ϱ_p hmotnost, objem a hustotu par toluenu v nádobě a m_c hmotnost veškerého toluenu v nádobě. Hmotnost kapalného toluenu v nádobě pak bude $m_c - m_p$ a objem $V_c - V_p$.

Je potřeba určit, jak se s teplotou změní poměr objemu plynné a kapalně fáze toluenu v nádobě. Pro libovolnou teplotu platí

$$\frac{V_c - V_p}{V_p} = \frac{(m_c - m_p)\varrho_p}{m_p\varrho_k}.$$

Považujice toluen za ideální plyn s molární hmotností M , dostáváme ze stavové rovnice ideálního plynu hmotnost par

$$m_p = \frac{MpV_p}{RT},$$

kde p je (parciální) tlak par toluenu v nádobě a R universální plynová konstanta. Podobně vyjádříme ze stavové rovnice hustotu par

$$\varrho_p = \frac{pM}{RT}.$$

Dosadíme-li uvedená vyjádření do vztahu pro poměr objemů, získáme (po jednoduchých úpravách) vztah pro objem par v závislosti na teplotě

$$V_p = V_c + \frac{MpV_p}{RT\varrho_k} - \frac{m_c}{\varrho_k}.$$

Pro změnu objemu par při změně teploty z T_1 na T_2 dostaneme

$$V_p(T_2) - V_p(T_1) = \frac{Mp(T_2)V(T_2)}{RT_2\varrho_k} - \frac{Mp(T_1)V(T_1)}{RT_1\varrho_k},$$

z čehož konečně dostáváme vztah

$$V_p(T_2) = V_p(T_1) \frac{\left(1 - \frac{Mp(T_2)V(T_2)}{RT_2\varrho_k}\right)}{\left(1 - \frac{Mp(T_1)V(T_1)}{RT_1\varrho_k}\right)}.$$

Na odkazovaných stránkách byl (doslova) uveden vztah:

$$\log_{10} P_{\text{Hgmm}} = 6,95464 - \frac{1344,8}{T + 219,482}.$$

Ten je sám o sobě vcelku k ničemu, neboť kromě poněkud zvláštním způsobem uvedené jednotky tlaku žádné další jednotky neuvádí. Naštěstí je v uvedeném článku vypsáno několik konkrétních hodnot s uvedenými jednotkami, takže metodou pokus–omyl lze uhodnout, že teplota T je zadána v Celsiově stupnici.

Vztah přepíšeme do rozumnější podoby

$$p = \exp \left(20,9064 - \frac{3096,5}{\frac{T}{\text{K}} - 53,668} \right) \text{ Pa}.$$

(Použili jsme převodní vztah $1 \text{ Hgmm} \approx 1 \text{ Torr} = 133,322 \text{ Pa}$.)

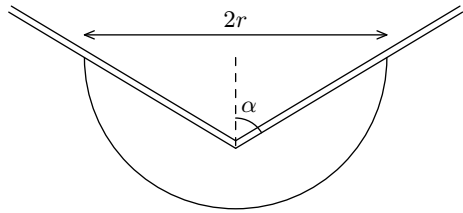
Ze zadání není zjevné, jaká byla konkrétní teplota po Alešově příjezdu. Odhadněme tedy možný pokles shora.

Teplná roztažnost kapalného toluenu v horním odhadu nevádí, neboť působí proti změně objemu způsobené odparem. Uvedená závislost tlaku par na teplotě je konvexní a teplota na koleji zpravidla nepřesahuje $50 \text{ }^\circ\text{C}$, tj. $323,15 \text{ K}$, ani když se začne topit. Dosadíme-li tedy $T_1 = 303,15 \text{ K}$, $T_2 = 323,15 \text{ K}$, $V_p(T_1) = 0,1V_c$, $R = 8,3145 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$, $M = 92,14 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$, $\rho_k = 0,867 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$, objem par vzroste na přibližně na $0,10002V_c$, pokles je tudíž v řádu statisícin objemu nádoby, pouhým pohledem nepozorovatelný.

Závěrem tedy budiž, že soustavné rozpouštění mozku již způsobilo Alešovi stihomam, nebo šnEk skutečně čichal toluen bez Alešova svolení.

Úloha III.4 ... rumové ovoce

Uvažujme misku, do které položíme dvě spojená brčka, která mají tvar písmene V. Miska má poloměr r a brčko se smí dotýkat pouze jejich okrajů. Určete nejprve podmínku stability a potom vypočítejte periodu kmitů brčka v souměrné poloze.



Obr. 11. Miska s brčky

V řešení budeme o brčkách uvažovat tak, že každé z nich má délku l a hmotnost m . Spojená jsou tak, že svírají úhel 2α . Miska má průměr r . Viz obrázek 11.

Podmínka stability

Aby se věčko z brček nepřeklopilo, musí být jeho těžiště pod osou otáčení. Pokud by bylo nad ní, malá výchylka by způsobila překlopení. Z toho umíme vypočítat podmínku pro délku brčka.

$$\frac{r}{\sin \alpha} \leq l \leq \frac{2r}{\sin \alpha},$$

tj. že se brčko nesmí propadnout do misky (spodní mez) a že těžiště (o kterém předpokládáme, že je v polovině brčka) leží nejvýše na ose rotace.

Další podmínku můžeme klást na úhel spojení. Protože brčka musí mít volný prostor ke kmitání, musí platit $\alpha \geq \pi/4$.

Perioda malých kmitů

Nejprve se podíváme na moment setrvačnosti brček. Pokud tyč rotuje okolo kolmé osy procházející těžištěm, víme, že má moment setrvačnosti

$$J_T = \frac{1}{3}ml^2,$$

kde m je hmotnost tyče a l je její délka. Tyč, resp. brčko je ale skloněná (o úhel $\pi/2 - \alpha$) od horizontály a také nerotuje okolo osy procházející těžištěm. První problém vyřešíme úvahou, na druhý použijeme Steinerovu větu.

Představme si, že máme tyč, která rotuje okolo šikmé osy procházející těžištěm. Víme, že moment setrvačnosti je součet přes všechny hmotné elementy tyče ze součinu jejich hmotnosti a kolmé vzdálenosti od osy. Tedy tyče jde jen o její průmět do roviny kolmé na osu. Protože jde o jednoduchý útvar, můžeme tak tyč považovat za kratší, s větší délkovou hustotou a hlavně kolmou na osu. Pokud zavedeme úhel odklonu α tak, aby se shodoval s geometrií soustavy brček, bude moment setrvačnosti tyče vůči šikmé ose procházející těžištěm

$$J_0 = \frac{1}{12}ml^2 \cos^2 \alpha.$$

Úhel α můžeme vyjádřit jako $\alpha = \pi/2 - \beta$, kde β je menší úhel mezi tyčí a osou.

K tomu, abychom mohli využít Steinerovy věty pro určení momentu setrvačnosti soustavy, potřebujeme znát polohu těžiště. Jsou-li splněny podmínky stability, těžiště se nachází v poloze r_T pod osou rotace

$$r_T = \frac{r}{\operatorname{tg} \alpha} - \frac{l}{2} \cos \alpha.$$

První člen odpovídá posunu od osy dolů do vrcholu věčka, druhý od vrcholu věčka nahoru do jeho poloviny.

Steinerova věta říká, že moment setrvačnosti tělesa vůči ose rovnoběžné s osou procházející těžištěm (které přísluší moment J_0) vypočteme jako součet J_0 s mr^2 , kde m je hmotnost tělesa a r vzdálenost os. Pro případ s brčky tedy vychází

$$J = 2(J_0 + mr_T^2) = \frac{1}{6}ml^2 \cos^2 \alpha + 2mr_T^2.$$

Číslo 2 je ve vzorci proto, že věčko se skládá ze dvou stejných brček.

Teď už nic nebrání tomu, abychom začali řešit pohybovou rovnici. Použijeme její zápis jako diferenciální rovnici. Nebudeme ji řešit, jen ukážeme podobnost s rovnicí harmonického oscilátoru

$$J\varepsilon = M \quad \Rightarrow \quad J\ddot{\varphi} = M.$$

Úhel φ představuje výchylku z rovnovážné polohy (viz obrázek 12).

Moment setrvačnosti jsme již vypočetli, moment síly také není těžké určit

$$M = -2mgr_T \sin \varphi,$$

protože síla budící pohyb je síla tíhová (opět $2m$ kvůli dvojnásobné hmotnosti brček), která působí v těžišti, jehož vzdálenost od osy známe. Ještě si uvědomíme, že malé výchylky umožňují použít aproximaci $\sin \varphi \approx \varphi$ (srovnej graf funkce $\sin x$ a x), a tedy můžeme pohybovou rovnici přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} J\ddot{\varphi} + 2mgr_T\varphi &= 0, \\ \ddot{\varphi} + \frac{2mgr_T}{J}\varphi &= 0, \\ \ddot{x} + \omega^2 x &= 0. \end{aligned}$$

Napravo dostáváme rovnici harmonického oscilátoru (kyvadla) s úhlovou frekvencí ω^2 . Až na označení konstant a proměnných jsou to rovnice naprosto identické a proto můžeme říct, že i věčko z brček je harmonickým oscilátorem a jeho úhlová frekvence je

$$\omega = \sqrt{\frac{2mgr_T}{J}}.$$

Hledanou periodu kmitů vypočteme již jednoduchým převodem ($T = 2\pi/\omega$) a dosazením za r_T a J z předchozích výpočtů.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{g} \left(\frac{r}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{l \cos \alpha (2l \sin \alpha - 3r \cos \alpha)}{6r \cos \alpha - 3l \sin \alpha} \right)}.$$

Úloha III.P ... wassermánie

Voda má spoustu zajímavých, výjimečných a anomálních vlastností ve srovnání s jinými kapalinami. Podrobný výčet těchto anomálií lze nalézt na stránce <http://www.btinternet.com/~martin.chaplin/anmlies.html>. Zamyslete se, jaký tyto anomálie mají význam pro život na zemi, člověka a také techniku.

Jak je řečeno v zadání úlohy, voda má nejednu anomální vlastnost. Abychom měli práci jednodušší, byla nám přímo poskytnuta webová stránka, která všechny informace o anomáliích shrnuje. Za velkou část anomálních vlastností jsou zodpovědné nechvalně známé vodíkové můstky. Zamysleme se tedy nad tím, jak by se naše životy změnily, kdyby se voda nechovala anomálně. Byl by vůbec život tak jak jej známe možný?

To, co by nás mohlo praštit do očí jako první, je vysoká tepelná kapacita. Jak ovlivňuje náš život? Naše tělo je ze tří čtvrtin tvořeno vodou a povrch planety Země tvoří voda ze dvou třetin. Zkusme si představit, co by se stalo, kdyby voda měla nižší tepelnou kapacitu. Co by se dělo s naším tělem? Na sluníčku by se nám rychle začala vařit krev a vypařila by se nám z těla většina tekutin. (Naštěstí má voda i velkou výparnou teplotu, je tedy možné, že takové smrti bychom byli ušetřeni). Čekala by nás velmi rychlá dehydratace.

Jednoduše řečeno, voda našemu tělu zajišťuje termoregulaci. Díky ní jsme schopni přežít v obrovském rozpětí teplot (uvědomme si, že v létě máme třicetistupňová vedra a v zimě můžeme mít i dvacet pod nulou a ani jeden z těchto extrémů nás nepřipraví o život do deseti minut po vyjití ven).

Stejně to je i s naší planetou. Voda je nezbytná pro regulaci teplot. Pro ilustraci stačí jednoduchý příklad. Ocitneme-li se na poušti, kde je malá vlhkost vzduchu a voda se tam skoro nevyskytuje, budeme vystaveni velkým výkyvům teplot. V noci se neobejdeme bez teplého spacáku a pořádného oblečení, a přes den je zase teplo, že můžeme chodit v šortkách a tričku. A tenhle teplotní výkyv nastane prakticky ihned po západu, resp. východu Slunce. V tropech se naopak noční teplota od té denní moc neliší, teplo je tam pořád. Krom toho tuto vlastnost vody využíváme velmi často při chlazení nebo naopak při topení.

Další a velmi známou anomální vlastností je fakt, že voda má nejvyšší hustotu při 4°C a při mrznutí expanduje. Jak se tato anomálie projevuje? Kdyby neexistovala, těžko by se ve vodních nádržích udržel nějaký život. Ochlazujeme-li vodu pod zmíněné 4°C , její objem poroste a klesne hustota. Takováto voda se dostane na povrch vodní plochy, kde se její teplota nadále snižuje, až zmrzne. Dole

pak zůstane voda s nejvyšší hustotou, která poskytuje útočiště rybám a dalším obyvatelům vod.

S roztažností vody při chladnutí a faktu, že voda je dobrým rozpouštědlem souvisí také eroze. Nateče-li voda do puklinky ve skále a zmrzne, puklinka se signifikantně rozšíří a naruší strukturu skály. Stejný efekt postihuje cesty po zimě, proto jsou každoročně tak rozbité (řidiči jistě ví své). Vraťme se ale ke zmíněné skále. Eroze jako taková je nezbytná pro formování půdy. Kdyby zůstaly skály skalami, sotva by se nějaká půda vytvořila. S tím souvisí i to, že omílá-li voda skály v na minerály bohaté oblasti, snadno s sebou odnáší právě ony minerály, které se v ní rozpouštějí. Koneckonců i to má pozitivní účinky na náš organismus. Kdyby voda nebyla dobrým rozpouštědlem, těžko by se nám po těle transportovaly živiny.

Další anomální vlastností vody je její nebývale vysoké povrchové napětí. Podíváme-li se do tabulky, zjistíme, že hned po rtuťi má voda druhé nejvyšší povrchové napětí. To umožňuje nejednomu vodnímu živočichovi pohyb po vodě. Takle anomálie nemá vliv pouze na vodní živočichy, ale i na člověka. S vysokým povrchovým napětím souvisí kapilární jevy, které hrají důležitou roli v lidském těle a u rostlin. Nebýt kapilárních jevů, rostliny by nebyly schopny transportovat vodu od kořenů do listů.

Mezi anomální vlastnosti vody řadíme také její nízkou teplotní roztažnost. Kdyby tomu tak nebylo, celý systém topení by nám byl k ničemu. Jen co bychom zvýšili teplotu v trubkách, roztrhali bychom je. Tuhle anomálii oceníme zejména pohybujeme-li se v technických kruzích.

Tento výčet anomálií vody, které mají přímý vliv na nás a svět okolo by se samozřejmě dal rozšířit. Vypsány jsou jen ty, jejichž vliv je nejvýraznější už první pohled.

Úloha IV.1 ... rozcvička

a) napnutá struna

Frekvence kmitů napjaté struny závisí na její délce l , síle F , kterou je struna napjatá, a na délkové hustotě ϱ_l . Určete z těchto údajů vzoreček pro frekvenci struny pomocí rozměrové analýzy.

b) dolů

Mějme činku, jejíž závaží mají tvar disků, které jsou blízko u sebe. Tyčku omotáme jednou provázkem a činku spustíme. Jak rychle padá, pokud se nesmýká? Disky mají hmotnost m a poloměr R , tyčka je nehmotná s poloměrem r .

Napnutá struna

Rozměrová analýza je velmi silný nástroj pro odhadnutí chování nějakého systému, pokud víme, pouze na čem by zkoumaná veličina mohla záviset.

Rozměrová analýza je také velmi dobrou kontrolou správnosti výsledku. Známe-li totiž jednotku, která nám má vyjít a dosadíme-li do vzorce ty, které v něm vystupují, musí být výsledkem ona očekávaná jednotka. Když není, určitě jsme udělali chybu.

Nyní se ale již zaměříme na náš problém. Ze zadání víme, že frekvence by měla záviset na délce l , síle F a hustotě ϱ_l . Proto můžeme psát

$$f = l^\alpha F^\beta \varrho_l^\gamma. \quad (20)$$

Budeme hledat koeficienty α , β a γ tak, aby rozměr levé i pravé strany byl týž. Pokud bychom našli více možností, může být frekvence rovna libovolné lineární kombinaci výrazů (20).

Najdeme nejprve rozklad veličin ze zadání do jednotek SI:

$$\begin{aligned} [l] &= \text{m}, \\ [F] &= \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}, \\ [\varrho] &= \text{kg} \cdot \text{m}^{-1}, \\ [f] &= \text{s}^{-1}. \end{aligned}$$

Aby se rovnaly rozměry veličin na levé a pravé straně výrazu (20), musí se rovnat mocniny u všech různých veličin z SI. Proto dostáváme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} \text{kg:} \quad & 0 = \beta + \gamma, \\ \text{m:} \quad & 0 = \alpha + \beta - \gamma, \\ \text{s:} \quad & -1 = -2\beta. \end{aligned}$$

Vyřešením soustavy dostáváme $\alpha = -1$, $\beta = 1/2$ a $\gamma = -1/2$. Proto můžeme napsat výsledek

$$f = \frac{C_0}{l} \sqrt{\frac{F}{\varrho_l}}.$$

Hodnotu konstanty C_0 nám však rozměrová analýza neumožňuje zjistit, závisí totiž na tom, kolikátá harmonická frekvence je na struně naladěna.

Dolů

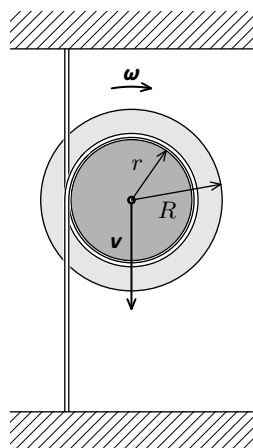
Zvolíme zde jiný, však pro mnohé úlohy velmi silný, nástroj. Tím bude zákon zachování energie.

Celá situace je vyobrazena na obrázku 13. Protože nedochází během pohybu k disipaci energie¹¹, veškerá potenciální energie se změní na energii kinetickou.

Ze zadání víme, že hmotnost celé soustavy je $2m$, dále uvažujme, že těžiště se posune dolů o h . Celková změna potenciální energie je proto

$$E_p = -2mgh. \quad (21)$$

Znaménko minus je zde proto, že se potenciální energie zmenší. Nyní ještě vyčíslíme energii kinetickou. Ta má dvě složky: translační a rotační. Uvažujme nyní, že se těžiště pohybuje rychlostí v směrem dolů. Úhlová rychlost otáčení joja okolo těžiště je potom $\omega = v/r$. Protože se jojo skládá ze dvou disků každého o hmotnosti m a poloměru R , platí pro jeho moment setrvačnosti $J = 2 \cdot \frac{1}{2}mR^2$, konstanta $1/2$ souvisí s tvarem disků a můžeme ji nalézt např. v tabulkách nebo na internetu¹². Celková kinetická energie je rovna součtu translační a rotační energie.



Obr. 13. Činka na provázku

$$E_k = E_t + E_r = \frac{1}{2}2mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = \left(1 + \frac{R^2}{2r^2}\right)mv^2. \quad (22)$$

Jak jsme již uvedli výše, energie se neztrácí, proto je celková změna energie nulová, tj. $E_k + E_p = 0$. Z rovnic (21) a (22) vyjádříme rychlost pohybu

$$v = \sqrt{\frac{2hg}{1 + \frac{R^2}{2r^2}}}.$$

Srovnáme-li tuto rovnici s rovnicí pro rovnoměrně zrychlený pohyb $v = \sqrt{2ha}$, můžeme určit zrychlení pohybu

$$a = \frac{g}{1 + \frac{R^2}{2r^2}}.$$

¹¹⁾ Docházelo by k němu, pokud by bylo vlákno hmotné.

¹²⁾ http://cs.wikipedia.org/wiki/Moment_setrvačnosti

Úloha IV.2 ... *hoď ho do Slunce!*

Karel se rozhodl zahodit svůj sešit matematické analýzy na Slunce. Poradíte mu, jakou minimální rychlost sešitu musí udělit, aby sešit na Slunce dopadl? Pro jednoduchost zanedbejte odporové síly, Zemi a Slunce považujte za hmotné body, sešit vypouštíme ze vzdálenosti $R_Z = 6378$ km od hmotného bodu symbolizujícího Zemi, vůči kterému je sešit v klidu a Země obíhá Slunce po dokonalé kružnici. Konstanty, které se vám budou hodit: $\varkappa = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$, $M_S = 2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg}$, $M_Z = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, $a = 1 \text{ AU} = 150 \cdot 10^9 \text{ m}$.

Sešitu je potřeba udělit takovou rychlost, aby jednak mohl opustit Zemi (ve směru přímo na Slunce) a pak ještě takovou, aby přišel o moment hybnosti vůči Slunci, aby na něj mohl řachnout (kolmo na předchozí). Pokud by totiž zůstala nějaká nenulová rychlost kolmá na spojnici sešit-Slunce, pak by sešit nikdy neprošel hmotným bodem, za který Slunce máme považovat. Celková rychlost pak bude vektorovým součtem těchto rychlostí.

Vypočteme nejprve úlohu za předpokladu, že v blízkosti povrchu Země je zanedbatelný gravitační vliv Slunce jako první přiblížení. V první části určíme únikovou rychlost ze Země v_1 . (Ta se dá případně najít v tabulkách.) Vypočítáme ji ze zákona zachování energie. Kinetická energie sešitu je $E_k = \frac{1}{2}mv^2$, kde m je hmotnost sešitu a v je jeho rychlost. Potenciální energie ve vzdálenosti r od těžiště Země je

$$E_p(r) = -\frac{\varkappa m M_Z}{r}.$$

Je vidět, že potenciální energie roste, pokud r roste a pro nekonečně velké r jde k 0.

$$\begin{aligned} E_p(\infty) - E_p(R_Z) &= E_k(v_1), \\ \frac{\varkappa m M_Z}{R_Z} &= \frac{1}{2}mv_1^2, \\ v_1 &= \sqrt{\frac{2\varkappa M_Z}{R_Z}}. \end{aligned}$$

Aby tedy těleso mohlo opustit gravitační vliv Země a uniknout do „nekonečna“, tak musí mít rychlost $v_1 \approx 11,2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

Druhá rychlost je vlastně oběžná rychlost v_2 Země kolem Slunce (což se dá také najít v tabulkách). Tu vypočteme z rovnosti dostředivé a gravitační síly

$$\begin{aligned} F_d &= \frac{mv_2^2}{a} = \frac{\varkappa m M_S}{a^2} = F_g, \\ v &= \sqrt{\frac{\varkappa M_S}{a}}. \end{aligned}$$

Oběžná rychlost je tedy $v_2 \approx 29,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

Celková rychlost, kterou musíme dodat sešitu tedy bude

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{\varkappa \left(\frac{2M_Z}{R_Z} + \frac{M_S}{a} \right)}.$$

Výsledek je $v \approx 31,9 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$. Toto je ovšem nejjednodušší přiblížení.

Přesnější postup je uvažovat, že rychlost v_1 je určena překonáním potenciálové hradby, která není tak vysoká jako je pro únik do nekonečna. Pro potenciál částice hmotnosti m na úsečce mezi Sluncem a Zemí ve vzdálenosti r od těžiště Země platí

$$\tilde{E}_p = -\frac{\varkappa m M_Z}{r} - \frac{\varkappa m M_S}{a-r}.$$

Potřebujeme najít místo s nejvyšší hodnotou potenciálu. Zderivujeme potenciální energii podle r a derivaci pak položíme rovnou 0, čímž

$$\frac{d\tilde{E}_p}{dr} = \frac{m M_Z}{r^2} - \frac{m M_S}{(a-r)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad M_Z(a-r)^2 = M_S r^2.$$

Vychází nám kvadratická rovnice $(M_S - M_Z)r^2 + 2M_Z a r - M_Z a^2 = 0$, jejíž řešení je

$$r_{1,2} = \frac{-2M_Z a \pm \sqrt{4M_Z^2 a^2 + 4M_Z(M_S - M_Z)a^2}}{2(M_S - M_Z)} = \frac{-M_Z \pm \sqrt{M_S M_Z}}{M_S - M_Z} a,$$

přičemž na úsečce mezi Zemí a Sluncem leží řešení s kladným znaménkem. Pokud dosadíme tuto vzdálenost, kterou označíme r_1 , do vztahu pro potenciální energii, pak dostáváme

$$\tilde{E}_p(r_1) = -\varkappa m \frac{M_Z a + r_1(M_S - M_Z)}{r_1(a - r_1)} = -\varkappa m \frac{M_S + 2\sqrt{M_S M_Z} + M_Z}{a}.$$

Potenciální energie sešitu v místě vypuštění byla

$$\tilde{E}_0 = -\frac{\varkappa m M_Z}{R_Z} - \frac{\varkappa m M_S}{a - R_Z}.$$

Rychlost v_1 pak přesněji určíme ze vztahu

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = \tilde{E}_p(r_1) - \tilde{E}_0.$$

Číselně pak vychází $v_1 \approx 10,9 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$, což je jenom zhruba o $0,3 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$ odlišný výsledek od toho, kde jsme zanedbali gravitační vliv Slunce v blízkosti Země. Celková rychlost, kterou by pak měl mít sešit na začátku pohybu je $v \approx 31,7 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$. Je vidět, že korekce je v řádu procent a původní odhad by byl docela dobrý. I tento výsledek je jenom odhad, protože jsme zanedbali to, že celá soustava rotuje, relativistické efekty a i další vlivy, které se ovšem budou projevovat na výsledné hodnotě jenom v nízké míře (jsou to tzv. vlivy vyšších řádů).

Úloha IV.3 ... naše staré hodiny lijí čtyři hodiny

Navrhněte tvar přelévacích hodin, aby ubývala výška hladiny lineárně s časem. Za uvažování povrchových efektů, vnitřního tření apod. můžete dostat body navíc.

Hladina v hodinách má ubývat lineárně s časem, tedy podle vztahu $h = vt$. Přičemž v je konstantní rychlost klesání hladiny. Přesýpací hodiny mají většinou rotačně symetrický tvar, takže hledáme křivku, jejímž orotováním okolo ypsi-lonové osy dostaneme tvar, který zařídí lineární ubývání. Hodiny nemají žádný další odtok, proto musí platit, že to, co proteče průřezem S_1 ve výšce h_1 , musí protéct také nejužším průřezem S_0 v hrdle hodin h_0 . Vyjádříme-li objem, který oběma průřezy proteče za jednotku času a tyto objemy porovnáme, dostaneme rovnici kontinuity (pokud jste tento výraz ještě neslyšeli, rovnice kontinuity jsou rovnice, které ovládají „toky“ fyzikálních veličin, chceme-li zajistit, aby se nikde nic neztrácelo)

$$Sv = S_0v_0,$$

kde v_0 je rychlost výtoku v nejužším místě a v je konstantní rychlost poklesu hladiny.

Zanedbáme-li viskozitu vody a budeme-li předpokládat, že v hodinách nebude nějaké turbulentní proudění, můžeme pro vyjádření výtokové výšky h použít Bernoulliho rovnici

$$h\rho g + \frac{1}{2}\rho v^2 = \frac{1}{2}\rho v_0^2.$$

Po vykrácení hustoty a dosazení za v_0 z rovnice kontinuity dostaneme

$$h = \frac{1}{2g}v^2 \left(\frac{S^2}{S_0^2} - 1 \right).$$

Jelikož předpokládáme rotační tvar hodin, plochy S a S_0 budou kruhy. Dosadíme-li za $S = \pi r^2$, dostaneme rovnici křivky čtvrtého stupně

$$h(r) = \frac{1}{2g}v^2 \left(\frac{\pi^2 r^4}{S_0^2} - 1 \right).$$

Pokud by byl otvor v horní nádobce dost malý a nádobka velká, bude rychlost poklesu hladiny v zanedbatelná vůči výtokové rychlosti v_0 , a tak můžeme v Bernoulliho rovnici zanedbat člen $\frac{1}{2g}v^2$. Stejným postupem pak dostaneme rovnici křivky

$$h(r) = \frac{\pi^2 r^4 v^2}{2gS_0^2}.$$

Úloha IV.4 ... sama doma

Terka J. mívá většinou skvělé nápady. Třeba minulé pondělí si od svého oblíbeného dermatologa přinesla 5 litrů kapalného dusíku a ihned ho vylila na zem ve své ubikaci. Ve středu pro změnu odcizila na čerpací pumpě 5 litrů benzínu, který záhy vylila do umyvadla a zapálila. Mohlo se Terce některý den udělat ne-dobře v důsledku jejich kratochvílí? Aneb jak se v obou případech změní teplota, tlak a koncentrace kyslíku v ubikaci, pokud tato je dokonale neprodyšná, tepelně izolovaná a rozměrů $3 \times 3 \times 4 \text{ m}^3$?

Tato úloha byla z velké části cvičením na jednoduché vztahy termodynamiky a obecné chemie. Nebudeme Vás proto zatěžovat podrobnostmi a spíše se vynasnažíme upozornit na některá zajímavá místa.

Kapalný dusík

Všechny potřebné tabulkové hodnoty najdeme i na webu¹³. Všimněme si krátce několika věcí. Kapalný dusík má bod varu $T_N = -195,8 \text{ }^\circ\text{C}$, je o pětinu lehčí než voda a jeho výparné teplo Q_N je oproti vodě asi desetkrát menší. Na zmíněném webu lze ověřit, že tepelná kapacita vzduchu se ve vyšetřovaném teplotním intervalu mění maximálně v řádu jednotek procent a budeme ji tedy považovat za konstantní. Ale pozor, tepelná kapacita látek může obecně velmi silně záviset na teplotě, zvláště pak v pevných látkách! Vzduch je ze 78% dusík a proto u dusíku předpokládáme analogické termodynamické vlastnosti – a skutečně, měrná tepelná kapacita plynného dusíku je v podstatě totožná se vzduchem. Na tomto místě musíme dávat pozor, protože budeme dále používat měrnou tepelnou kapacitu za stálého objemu C_V , protože místnost se nerozpíná a plyn nekoná práci. V tabulkách se však častěji uvádí tepelné kapacity za stálého tlaku C_p . K přibližnému přepočtu můžeme užít vztah odvozený pro ideální plyn, a sice $C_p = C_V + R$, kde R je univerzální plynová konstanta. Uvažujeme, že teplota kapalného dusíku je těsně nad bodem varu.

Výslednou teplotu T v místnosti vypočteme z úvahy, že výparné teplo přidaného dusíku plus teplo uložené do ohřátí přidaného dusíku se rovná teplu, které odevzdal původní vzduch v místnosti. Píšeme tedy

$$m_N(Q + C_V(T - T_N)) = m_{\text{air}}C_V(T_0 - T),$$

kde T_0 je původní teplota v místnosti a m_N , m_{air} po řadě hmotnosti (případně látková množství) přidaného dusíku a vzduchu, které snadno spočteme ze zadaných a tabulkových hodnot.

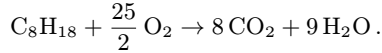
Vyjde $T \approx -20 \text{ }^\circ\text{C}$, což není tak strašné, jak jistě uznáte. Látkové množství původního vzduchu dostaneme nejlépe ze známého poznatku, že za normálního tlaku má jeden mol plynu objem 22,4 litrů. Zjistíme tak, že vypařením dusíku vzroste látkové množství plynu v místnosti faktorem 1,09. Absolutní teplota ovšem klesla faktorem 0,86, což vede k celkovému poklesu tlaku faktorem 0,94. Parciální

¹³⁾ Např. <http://www.engineeringtoolbox.com/>.

tlak kyslíku klesne totožně s teplotou, tedy na 86%, a jeho relativní koncentrace klesne na 92%. To ale odpovídá maximálně vystoupání na Praděd a není tedy životu nebezpečné. Pro tentokrát tedy Terka ještě přežila bez úhony.

Benzín

Předpokládejme pro jednoduchost, že benzín je čistý oktan. Rovnice hoření je pak



Odtud vidíme, že hořením celkové látkové množství plynu v místnosti vzroste pouze o 8%, protože se pouze 12,5 molekul kyslíku vymění za 17 molekul spalných produktů. Látkové množství kyslíku v místnosti je o něco menší než množství potřebné pro vyhoření celého objemu benzínu. Navíc při dostatečně nízké koncentraci kyslíku hoření ustane. Benzín tedy ani nedohoří. Již nyní ale můžeme říct, že si Terka pěkně zavařila. Porovnáním měrné tepelné kapacity vzduchu ($C_V \approx 0,72 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$) s výhřevností benzínu ($H \approx 44 \text{ MJ} \cdot \text{kg}^{-1}$) rovněž seznáme, že si i pěkně zatopí. Vzrůst teploty ΔT je dán

$$\Delta T(n_{\text{N}_2}C_{\text{N}_2} + n_{\text{CO}_2}C_{\text{CO}_2} + n_{\text{H}_2\text{O}}C_{\text{H}_2\text{O}}) = m_b H,$$

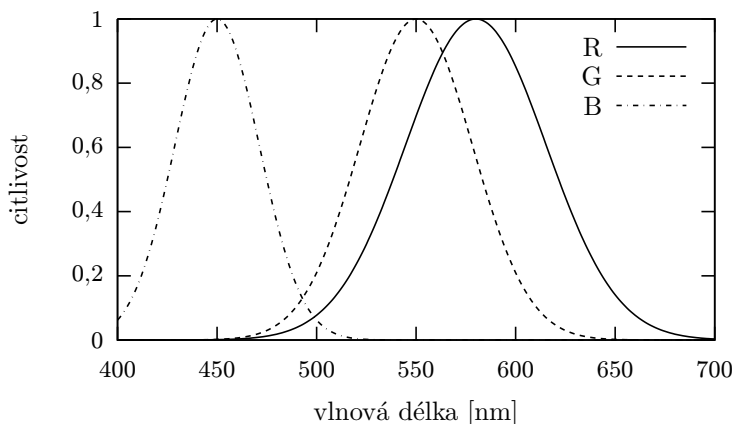
kde m_b a H jsou po řadě hmotnost a měrná výhřevnost benzínu a n , C příslušná látková množství a měrné tepelné kapacity. V teplotní škále tisícovek stupňů se již tepelná kapacita plynu může změnit až několikanásobně. Přesto na základě těchto jednoduchých a přibližných úvah dojdeme k závěru, že teplota může přesáhnout 3000 °C! To je teplota srovnatelná s teplotou svářečického plamene. Rovněž si lze všimnout, že dodané teplo připadající na jeden mol plynu se již blíží disociační energii některých chemických vazeb. Možná jsme opomněli některou důležitou skutečnost, která značně ovlivní výslednou teplotu. Jisté však je, že v místnosti nastanou značně extrémní podmínky neslučitelné se životem. Navíc při reálném spalování bude vznikat řada toxických produktů. Terka to tentokrát dobře neodhadla a musela vzít nohy na ramena.

Úloha IV. P ... míchání barev

Chceme-li na monitoru počítače zobrazit azurovou barvu, musíme rozsvítit červený a modrý segment. Azurová barva odráží v nejjednodušším případě světlo dvou vlnových délek (modré a červené), dále pokud budeme mít modrou barvu, tak tato bude odrážet modré světlo a červená obdobně. Když smícháme modrou a červenou temperu, výsledná směs bude mít fialovou barvu, protože modrá složka pohltí vše až na modrou a obdobně také červená. Proto ze směsi těchto barev budeme pozorovat pouze ty vlnové délky, které odrážejí obě složky. Představte si, že tempery jsou složeny z malých kapiček. Jak bude záviset výsledný zrakový vjem na jejich velikosti?

Nejprve poopravme trochu zadání, protože azurovou barvu dostaneme smísením modrého a zeleného světla, nikoli modrého a červeného. Pro názornost proto předpokládejme, že máme kapičky červené a zelené barvy. Pokud Vás již teď nudíme, vězte, že úloha je určitou variací na studium aditivního a subtraktivního míchání barev, aneb RGB a CMYK barevných modelů.

Připomeňme mechanismus barevného vidění. V oku jsou tři různá barviva pohlcující světlo, každé citlivé na jiných vlnových délkách. Zjednodušená a normalizovaná závislost citlivosti na vlnové délce pro každý pigment je vynesena na obrázku 14. Náš barevný vjem závisí na míře vybuzení každého z pigmentů. Dvě různě spektrálně složená světla mohou vyvolat stejný barevný vjem, pokud způsobí shodné vybuzení všech pigmentů. Plocha v grafu pod násobkem spektra světla se spektrální citlivostí určuje míru vybuzení toho kterého pigmentu.



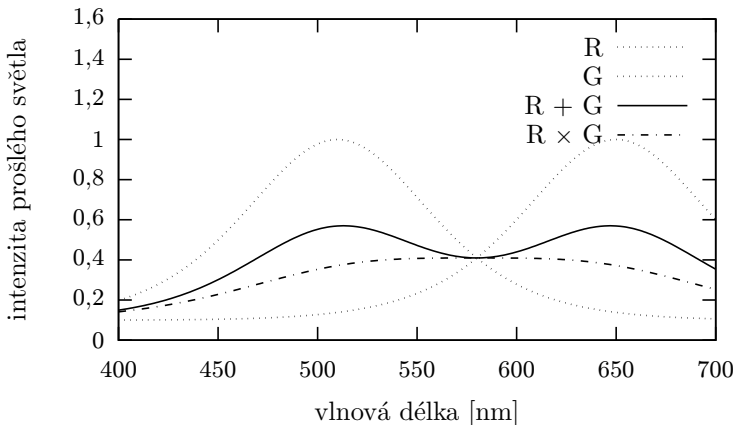
Obr. 14. Spektrální citlivost oka

Uvažujme na chvíli, že nemáme kapičky, nýbrž malé kousky barevných filtrů. Nakonec uvidíme, že kapičky a filtry jsou vlastně dost podobné věci. Barevný filtr osvětlujeme bílým světlem a filtr absorbuje světlo všech vlnových délek, kromě určité spektrální oblasti v okolí dané barvy. Tuto spektrální oblast propustí do našeho oka. Na obrázku 15 vidíme tečkovaně nejjednodušší schematický příklad

spektra světla propuštěného červeným (R) a zeleným (G) filtrem. Když dáme malíčky filtry vedle sebe, do oka dopadá červené i zelené světlo, tedy jejich součet, jehož spektrální složení je vyznačeno plnou čarou. Světlo se jeví žluté. Co když ale vezmeme filtry poloviční tloušťky a dáme je za sebe, aby procházející světlo prošlo postupně oběma? První z filtrů část světla pohltí a k druhému filtru pustí jen zbytek. Druhý filtr část z tohoto zbytku pohltí a do oka jsou propuštěny jen ty vlnové délky, které propustily oba z filtrů. Spektrální složení výsledného světla bude v tomto případě dáno násobkem spektrálních propustností obou filtrů, což je znázorněno čerchovanou čarou. Jsou vidět dvě věci. Jednak se průběh světla z filtrů vedle sebe a za sebou liší kvalitativně a jednak filtry za sebou evidentně propouští méně světla, přestože celková tloušťka vrstvy se nezměnila. Oba případy vedou k odlišné míře a vzájemnému poměru vybuzení jednotlivých pigmentů a tedy k vyvolání odlišného barevného vjemu. V případě složitější struktury spekter propustnosti barevných filtrů může být kvalitativní změna tvaru výsledných spekter výrazně větší.

Malé filtry vedle sebe jsou analogií pixelů displeje. Při rozsvícení pouze červeného a zeleného políčka a zhasnutí modrého vnímáme žlutou barvu. To snadno ověříme na monitoru počítače nastavením $(R, G, B) = (200, 200, 0)$. Nastavení $(R, G, B) = (50, 50, 0)$ dává ale zeleno-hnědou barvu, přičemž barva pixelů (kapíček) se nezměnila, pouze poklesl jas. Toto zjištění nám říká, že vnímaná barva závisí nejen na spektrálním složení, ale samozřejmě i na jasu.

Co má ale analogie filtrů společného s mícháním temperových barev? Inu, filtr je pouze sklo nebo plast, ve kterém je rozptýlené absorbující barvivo. Představme si nyní kapku tempery vzniklou smísením červené a zelené. Při odrazu světla od kapky tempery se odrazu neúčastní pouze vlastní povrch kapky, nýbrž světlo proniká do určité hloubky. Odrazovou vrstvu nenulové tloušťky je pak možno simulovat jako střídající se tenoučké červené a zelené filtry navrstvené nad sebou. A zde již bude docházet k popsanému efektu.



Obr. 15. Skládání filtrů

Při postupném zmenšování kapiček bychom měli pozorovat plynulý přechod mezi situací „filtry vedle sebe“ a situací „filtry nad sebou“, protože se budou současně uplatňovat oba mechanismy. Rozměr kapiček, při kterém začneme pozorovat změny, by měl odpovídat hloubce průniku světla do látky, která závisí mimo jiné na míře absorpce dané temperové barvy.

Úloha V.1 ... rozcvička

a) sedimentace krve

Zkuste přibližně spočítat, jak rychle probíhá sedimentace lidské krve (usazení zdravých červených krvinek na dně nádoby). Dynamická viskozita η krevní plazmy při 37°C je přibližně $2\text{ N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-2}$. (Běžně se měření sedimentace provádí tak, že se krev nechá odstát na jednu hodinu a poté se změří výška již usazených krvinek – bývá obvykle okolo 10 mm.)

Nápověda: Mohl by se hodit Stokesův vztah pro odporovou sílu $F = 6\pi\eta r v$, který platí pro laminární proudění.

b) nevěřte vlastním očím

Aleš jel v poledne tramvají po nábřeží Kapitána Jaroše v Praze směrem na Malou Stranu. Seděl u okna a přímo z jiho-západu na něj svítilo slunce. Protože se díval před sebe, jedno oko měl ve stínu vlastního nosu. Když ale uhnul očima doprava, zjistil, že levým okem vnímá mírně jiné odstíny barev než pravým. Do jakého odstínu se mu vidění v levém oku zabarvilo a proč?

Sedimentace krve

Předně se řešitelům omlouváme za chybně uvedenou hodnotu dynamické viskozity krve. Její správná hodnota za daných podmínek je okolo $3 \cdot 10^{-3}\text{ N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-2}$.

Abychom mohli použít uvedený Stokesův vzorec, modelujme krev kulovými krvinkami s poloměrem r_K . Krvinky se již po chvíli pohybují rovnoměrně přímočaře, tudíž součet působících sil (tíhová, vztlaková a třecí) musí být nulový. Z toho zjistíme onu ustálenou rychlost

$$v = \frac{2}{9} \frac{r_K^2 \Delta \rho g}{\eta},$$

kde $\Delta \rho$ je rozdíl hustot krvinky a plazmy, η je dynamická viskozita a g je tíhové zrychlení.

Za čas Δt se usadí všechny krvinky z oblasti $v\Delta t$ nade dnem, při obsahu dna S a měrném počtu krvinek v krvi D to odpovídá $N = v\Delta t S D$ krvinekám. Tyto pak vytvoří vrstvičku¹⁴ tloušťky $\Delta h = NV_K c/S$, kde V_K je objem krvinky a c koeficient udávající, kolik prostoru kolem sebe zabere usazená krvinka oproti čistému objemu.

¹⁴⁾ Předpokládáme tloušťku této vrstvy řádově menší než $v\Delta t$.

Objem krvinky též odhadneme koulí poloměru r_K , a tak rychlost přibývání usazeniny vyjde

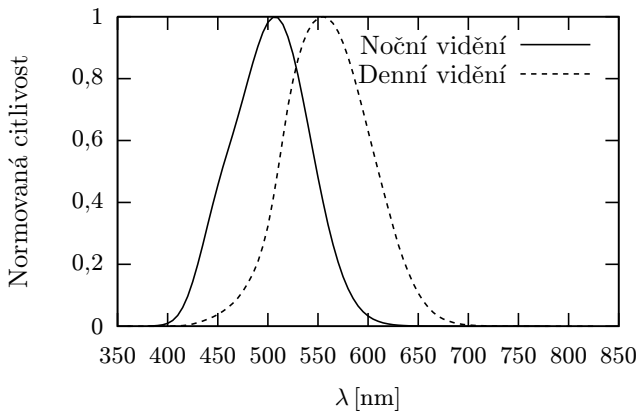
$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{8}{27} \frac{\pi r_K^5 \Delta \rho g c D}{\eta}.$$

Pro numerický odhad použijeme hodnoty: $\eta = 3 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$, $r_K = 3 \cdot 10^{-6} \text{ m}$, $\Delta \rho = 150 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, $c = 1,7$ a $D = 5 \cdot 10^6 \text{ mm}^{-3}$. Výsledná rychlost vychází $3,4 \text{ mm}\cdot\text{hod}^{-1}$, což je i přes zjednodušení a odhady, jichž jsme se dopustili, řádově ve shodě s realitou (2–20 mm/h, v závislosti na jedinci).

Nevěřte vlastním očím

Pozorované zabarvení je variantou *Purkyňova jevu*, neboli že v šeru vidíme odstíny mírně do modra. Citlivost oka totiž nezávisí jenom na vlnové délce, ale i na intenzitě dopadajícího světla.

Na obrázku 16 je srovnání citlivosti oka při denním a nočním vidění. Je patrné, že oko přizpůsobené tmě má maximum citlivosti posunuté více do modré oblasti (vliv tyčinek).



Obr. 16. Srovnání denního a nočního vidění

Mělo-li tedy jedno oko v důsledku oslnění staženou zornici, dopadá do něj celkově méně světla, a tak se odstíny jím pozorované budou jevit více modravé.

Úloha V.2 ... měsíc jako lodička

Z jakých míst na Zemi a kdy vypadá Měsíc jako lodička? (jeho cípy jsou rovnoběžné s obzorem, osa symetrie je kolmá k místnímu nebeskému poledníku) Pokud si s řešením nevíte rady, můžete si nainstalovat vhodný software (např. Celestia) a celou situaci si prohlédnout z různých míst na zemi.

Krátký astronomický slovníček, aneb pojmy, bez kterých se při čtení řešení neobejdete

Ekliptika – průsečnice roviny určené oběhem planet kolem Slunce s nebeskou sférou

Nebeský rovník – průsečnice roviny určené zemským rovníkem s nebeskou sférou

Zenit (nadhlavník) – průsečík přímky určené středem Země a místem, kde se nachází pozorovatel s nebeskou sférou

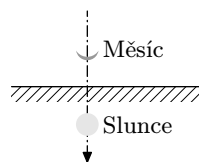
Řešení

Nejprve se podívejme na nejjednodušší modelovou situaci. Představme si, že zemská osa je kolmá k rovině ekliptiky a Měsíc i Země leží přesně v ní. V jaké pozici by musel být Měsíc se Sluncem abychom mohli pozorovat Měsíc jako lodičku? Je potřeba aby v okamžiku pozorování byl měsíc přímo nad Sluncem, tedy spojnice Slunce-Měsíc musí být v okamžiku pozorování kolmá k horizontu pozorovatele (uvědomme si, že Měsíc i Slunce stále leží na ekliptice, je to tedy opravdu jediná možnost, jak tento jev pozorovat). To je v našem prvním přiblížení možné pouze na rovníku. Na tomto místě by každý den Slunce procházelo přímo zenitem.

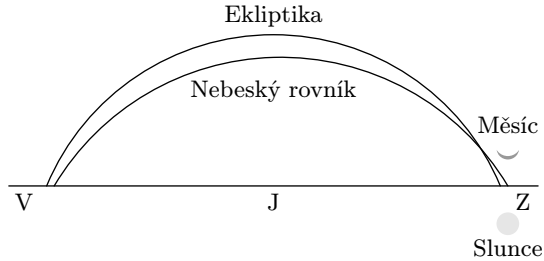
Pokud se nyní více přiblížíme reálné situaci a do našich úvah přidáme sklon zemské osy, situace se nám poměrně zkomplikuje.

Naším cílem je stanovit rozmezí zeměpisných šířek, ze kterých je možné tento jev pozorovat. Odchylme se na chvilku od Měsíce a promysleme si pořádně v jakých pozicích lze během roku pozorovat Slunce. Jistě jste si všimli, že se během roku mění maximální výška Slunce nad obzorem - v zimě je Slunce níže (proto je tu také zima) a v létě naopak mnohem výše. To je zapříčiněno právě sklonem zemské osy vzhledem k rovině ekliptiky. Okamžitá poloha Země na její oběžné dráze kolem Slunce spolu se zeměpisnou šířkou určují jednoznačně maximální výšku, do které Slunce může během dne vystoupit (takto definované pravé poledne nastává vždy když Slunce prochází místním poledníkem).

Pro vyřešení naší úlohy je třeba najít nějakou souvislost mezi úhlovou výškou Slunce nad obzorem a sklonem ekliptiky vůči horizontu. Vzhledem k jisté symetrii úlohy (pohyb Slunce po obloze se na jižní polokouli jeví zrcadlově převrácen, to ale na zeměpisných šířkách nic nemění) se budeme dále zabývat severní polokoulí. Existuje jeden okamžik kdy dokážeme snadno určit sklon ekliptiky vzhledem k horizontu. Rovina ekliptiky prochází středem Země, Slunce leží na ekliptice, rovina horizontu prochází místem pozorování. Je tedy jasné, že pokud bude rovina ekliptiky procházet také místem pozorování, pak máme dvě roviny jejichž úhel už lze určit.



Obr. 17. Ekliptika je kolmá k horizontu pozorovatele



Obr. 18. Situace pro naši zeměpisnou šířku (16. 3. 2010), Měsíc neleží na ekliptice a proto lze i u nás pozorovat lodičku

Podívejme se na okamžik letního slunovratu. V tento den bude na severní polokouli Slunce v pravé poledne nejvýše. V nadhlavníku bude na $23^{\circ}27'$ severní šířky. Pokud si v této pozici zastavíme rotaci Země a začneme s ní pouze obíhat kolem Slunce zjistíme, že se Slunce hýbe po ekliptice. To je ale skvělá zpráva. Máme tedy pás určený obratníky Raka a Kozoroha, kde může být slunce v nadhlavníku. Mezi těmito místy může tedy ekliptika s horizontem svírat pravý úhel. A během roku určitě bude existovat časový okamžik, kdy bude Slunce na ekliptice, která bude kolmá k horizontu. Pokud budeme mít štěstí a bude v tento okamžik pozorovatelný Měsíc, pak se bude jevit právě jako lodička. Pokud si tedy shrneme právě získané výsledky zjistíme, že pokud Měsíc leží také v ekliptice, lodičku můžeme spatřit mezi obratníky Raka a Kozoroha. Během letního a zimního slunovratu je tento efekt možné pozorovat přímo z rovníku, během jarní resp. podzimní rovnodennosti pak z obratníku Raka resp. Kozoroha.

Při dalším přiblížení je nutné si uvědomit, že Měsíc nepohybuje přesně v rovině ekliptiky – jeho oběžná dráha je vůči ní skloněna o úhel zhruba $5,1^{\circ}$. Je možné si přičíst resp. odečíst od souřadnic případných pozorovacích míst ještě pět stupňů (v závislosti na tom, zda je Měsíc nad a nebo pod ekliptikou) a stále je možné Měsíc jako lodičku pozorovat. Pokud by těchto pět stupňů nemělo na pozorování větší efekt, pak by jistě bylo možné tento efekt zanedbat. Nicméně, pokud se podíváte na obrázek 18, je vám už jisté jasné, že efekt bude mnohem větší.

Kromě polohy Měsíce vůči ekliptice je také důležitá úhlová vzdálenost Měsíce od Slunce. Pokud je zrovna Měsíc nejvíce odchýlen od ekliptiky a zároveň se nachází nejbliže Slunce (řekněme třeba také pět stupňů – leč je to jen těžko reálné číslo), pak se úhel osvětlení Měsíce od Slunce mění o úhel 45° ! Toto číslo už se zanedbává těžko.

Je však důležité zdůraznit, že Měsíc takto blízko u Slunce patrně nikdy neuvídíte. Takže pokud chcete vidět Měsíc jako lodičku, raději se vypravte někam blíže k rovníku.

Úloha V.3 ... těžký řetěz

Řetěz o hmotnosti m a délky l visí svisle těsně nad váhou. Najednou ho upustíme z klidu a začne na váhu dopadat. Jakou váhu bude váha ukazovat v závislosti na tom, jaká délka x již na ni dopadla? Zanedbejte rozměry jednotlivých ok řetězu.

Zobrazovaná váha bude přesně odpovídat síle, kterou bude řetěz na váhu působit. Vypočítejme proto nejdříve, jakou silou na ni působí.

Ta část řetězu, která již na váze leží, bude samozřejmě působit pouze silou tíhovou. Ta se jednoduše vypočítá jako

$$F_1 = gm \frac{x}{l}.$$

Dále budou na váhu působit právě dopadající články řetězu, které se o ni budou brzdít. Víme, že síla je rovna změně hybnosti za jednotku času. Můžeme psát

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t}, \quad (23)$$

kde Δp je změna hybnosti za čas Δt . Hybnost je definovaná jako součin hmotnosti a rychlosti. Protože se oka řetězu zcela zastaví, bude změna hybnosti rovna

$$\Delta p = \Delta m \cdot v,$$

kde Δm je hmotnost části řetízku, který dopadne na váhu za čas Δt a v je okamžitá rychlost řetízku. Zřejmě platí

$$\Delta m = m \frac{\Delta x}{l},$$

kde Δx je délka části řetízku, která dopadla na váhu za čas Δt . Tuto délku pak lze vyjádřit jako

$$\Delta x = v \cdot \Delta t.$$

Uvedené úvahy dobře platí pro malé časové úseky Δt , během kterých se rychlost řetízku změní jen zanedbatelně. Nyní stačí již jen dosadit za Δp do (23) a získáme vzorec pro druhou složku síly

$$F_2 = \frac{m \frac{v \cdot \Delta t}{l} v}{\Delta t} = \frac{mv^2}{l}. \quad (24)$$

Poznámka pro zkušenější řešitele – úvahy uvedené výše lze samozřejmě zcela analogicky provést za použití derivací se stejným výsledkem.

Řetízek dopadající na váhu bude mít stejnou rychlost jako těleso padající volným pádem, které již urazilo dráhu délky x . Ze vzorců pro volný pád

$$v = gt \quad \text{a} \quad x = \frac{1}{2}gt^2,$$

dosazením za t získáme jednoduchý vztah

$$v = \sqrt{2gx}.$$

Dosazením do (24) získáme konečný vztah pro F_2

$$F_2 = \frac{2mgx}{l}.$$

Celková síla působící na váhu tedy bude

$$F = F_1 + F_2 = 3mg\frac{x}{l}.$$

Pro určení zobrazované váhy stačí podělit působící sílu gravitačním zrychlením. Získáme výsledek

$$m_v = 3m\frac{x}{l}.$$

Úloha V.4 ... zelená revoluce

Jaderná energie je stále kontroverzní zdroj energie a mnohé státy mají v úmyslu upouštět od jejího používání. Zaměřme se ale nyní na problém skladování jaderného odpadu. Představme si, že v roce 2000 bylo založeno zbrusu nové úložiště radioaktivního odpadu a navezen první čerstvý radioaktivní materiál, ale záhy bylo odsouhlaseno, že na úložiště bude každý další rok dovezeno o 5% méně čerstvého radioaktivního odpadu než rok předchozí.

Pro jednoduchost předpokládejme, že radioaktivní odpad má poločas rozpadu 100 let (běžný radioaktivní odpad má daleko delší poločas rozpadu). Poradte obyvatelům přilehlých obcí, kterého roku se mohou těšit na nejvyšší dávku radiace, a umožněte jim tak třeba naplánovat založení rodiny. Při řešení můžete s výhodou použít váš oblíbený tabulkový procesor, třeba Excel nebo Calc.

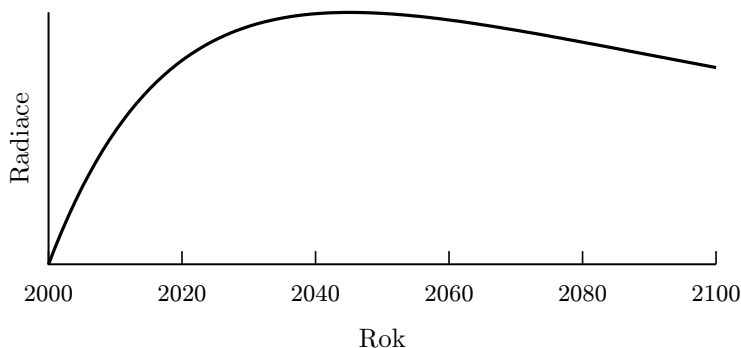
Uvědomme si, že intenzita záření je v každém okamžiku úměrná množství ještě nerozpadlého materiálu. Je tedy jedno, zda vyšetřujeme časovou závislost množství nerozpadlého radioaktivního materiálu, nebo časovou závislost intenzity záření. Připomeňme, že poločas rozpadu je doba, za kterou se rozpadne polovina radioaktivních jader. Aktivita jedné navážky materiálu klesá v čase jako výraz $\left(\frac{1}{2}\right)^{t/100}$ ¹⁵.

Celková úroveň záření I_r v r -tém roce je dána součtem příspěvků ze všech předchozích navážek, aneb

$$I_r = \sum_{j=0}^r 0,95^j \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{(r-j)/100}. \quad (25)$$

¹⁵⁾ V řešení bereme čas jako bezrozměrný počet let.

Nyní toto realizujeme v Calcu (Excelu). Do prvního řádku, hlavičky tabulky, vypíšeme pořadí roku, tedy čísla r od 0 až třeba do 100. Do druhé řádky necháme vypočítat funkci $\left(\frac{1}{2}\right)^{r/100}$, neboli příspěvek navážky z nultého roku k radiaci v r -tém roce. Další řádek bude obsahovat příspěvek navážky z prvního roku k radiaci v každém roce. Tento řádek vznikne přenásobením předešlého řádku konstantou 0,95 a posunutím o jedno pole doprava. Posunutí o jedno pole doprava dosáhneme tak, že každá buňka bude 0,95násobkem buňky o jednu nalevo a nahore od ní. Tento vzorec stačí zadat jen jednou a poté přetáhnout po celém požadovaném poli. Úroveň radiace v r -tém roce bude tak odpovídat součtu čísel v r -tém sloupci tabulky. Největší číslo objevíme ve sloupci odpovídajícím roku 2044 (začínáme navážet v roce 2000). *Ján Pulmann* si správně uvědomil, že řada (25) lze snadno sečíst jako geometrická řada, vytkneme-li člen $\left(\frac{1}{2}\right)^{r/100}$ před sumu. Někteří z Vás zase vycházeli z toho, že množství uloženého materiálu v r -tém roce dostaneme rekurzivně $m_r = 0,5^{1/100}m_{r-1} + 0,95^r m_0$.



Obr. 19. Úroveň radiace v průběhu let

Úloha jde řešit i pomocí integrálního počtu, pokud přejdeme od diskrétního navázení odpadu ke spojitému. Vztah (25) se pak modifikuje na

$$I(t) = \int_0^t 0,95^\tau \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{(t-\tau)/100} d\tau. \quad (26)$$

Exponenciály se snadno zintegrují a výsledkem je závislost tvaru

$$I(t) \sim \left(\frac{1}{2}\right)^{t/100} - 0,95^t,$$

kteřá je znázorněná na obrázku 19. Vidíme, že to je vlastně rozdíl dvou exponenciálních poklesů. Při spojitém navázení maximum radiace nastane začátkem roku 2045, kvalitativní průběh závislosti bude ovšem stejný jako při diskrétním navázení. Integrál (26) je tvaru $I(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau$ a vyjadřuje skutečnost, že intenzitu v čase t získáme součtem příspěvků, které „vznikly“ v předešlých časech τ ve velikosti $f(\tau)$ a na situaci v čase t mají vliv daný faktorem $g(t-\tau)$, kterýžto je závislý na časovém prodlení od jejich vzniku. Uvedený integrál se nazývá

konvoluce funkcí f a g a ve fyzice se s ním budete pravděpodobně potkávat velmi často.

Úloha V . P ... nabitý svět

Jak všichni víme, kladné a záporné elektrické náboje jsou ve vesmíru v rovnováze, jinak by elektrická odpudivá síla překonala gravitační a tělesa by nedržela pohromadě. Ale je ta rovnováha dokonalá? Co když jsou všechna tělesa ve vesmíru nepatrně kladně (nebo záporně) nabitá a odpudivá elektrická síla snižuje účinek gravitace. Jak by se taková nerovnováha projevila?

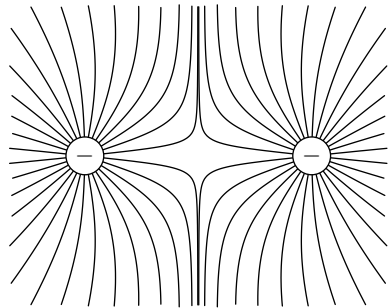
Navrhněte způsob, jak tuto nerovnováhu zjistit, a odhadněte, jakou nejmenší nerovnováhu jsme touto metodou schopni určit. Nerovnováhou myslíme celkový náboj (rozdíl kladného a záporného) v nějakém velkém objemu.

Stěžejní otázkou úlohy je, zda jsme schopni detekovat případnou nerovnováhu v neutralitě vesmíru. Než na tuto otázku odpovíme, je třeba se zamyslet, jak vlastně víme, že vesmír je neutrální. Takle otázka není úplně triviální a je těžké na ni odpovědět se stoprocentní jistotou. Faktem zůstává, že do vzdálenosti 10^5 světelných let od naší galaxie jsme obklopeni ionizovaným plynem.

To ovšem není nic abnormálního, vesmír byl krátce po svém zrodu naplněn neprůhledným ionizovaným plynem, v dalším vývoji zprůhledněl, následně byl znovu ionizován a začaly se tvořit nejstarší známé vesmírné objekty. Tuto éru jsme nazvali érou reionizace, trvala 600 miliónů let a skončila v době, kdy byl vesmír stár asi jednu miliardu let.

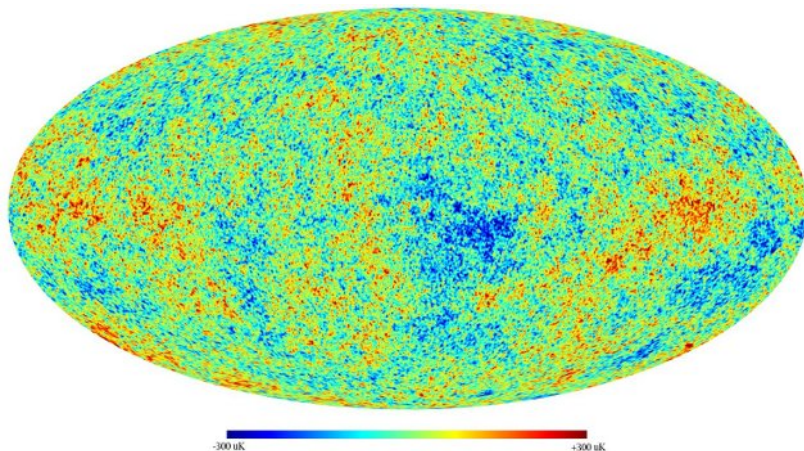
Budeme-li tedy vesmír pozorovat pouze lokálně, je možné, že narazíme na nějakou nerovnoměrnost v kladných a záporných částicích. Budeme-li se však na vesmír koukat jako na celek, žádnou nerovnováhu bychom neměli pozorovat. Konec konců veškerá pozorování naznačují, že vesmír skutečně neutrální je, ostatně jak je zmíněno v zadání, odpudivá síla by jinak nedovolila zformování hvězd, galaxií a ostatních vesmírných objektů. Kdyby ale lehká nerovnováha existovala, kde bychom ji pozorovali?

Můžeme s úspěchem předpokládat, že v celém vesmíru platí zákon zachování náboje. Tedy náboj byl ve vesmíru pořád a nikam nezmizel ani by se nemohl najednou objevit. Zkusme se teď zamyslet, jak nejlépe poznat, že se někde nachází přebytek kladného/záporného náboje. Stejně jako v našich lidských měřítkách bychom pozorovali, že dva stejně nabité náboje se odpuzují a dva rozdílně nabité náboje se přitahují. Velmi dobře to lze ilustrovat siločarami (obrázek 20).



Obr. 20. Siločáry kolem stejných nábojů

Ve vesmíru bychom tedy museli detekovat něco podobně vypadajícího, ale ve velkých škálách. Obdobné struktury by byly i jedním z projevů nerovnováhy náboje ve vesmíru. Teoreticky by měly být dobře detekovatelné ve vesmírném mikrovlnném pozadí (anglicky *Cosmic Microwave Background*, čili CMB), které vzniklo cca 380000 let po Velkém Třesku. Podíváme-li se na CMB dnes (obrázek 21), zjistíme, že je veskrze homogenní a žádné proudy se zde nevyskytují.



Obr. 21. Vizualizace dat z družice WMAP

Jak velká by musela být nerovnováha, třeba ve Slunci, abychom ji vůbec zvládli detekovat? Za předpokladu, že je Slunce pouze z vodíku, obsahuje $N_A M_R(\text{H})/M_{\text{Slunce}} \approx 10^{57}$ elektronů.¹⁶ To odpovídá náboji přibližně $2 \cdot 10^{38}$ C. Pokud si dovolíme mít o jeden elektron v miliardě víc, náboj bude stále v řádu 10^{29} C. Dejme si tedy elektrickou a gravitační sílu do poměru a dostaneme

$$\frac{Q_{\text{Slunce}}}{4\pi\epsilon_0} \approx M_{\text{Slunce}} = 10^{16}.$$

Tedy elektrická síla bude v řádech 10^{16} větší než síla gravitační. S úspěchem můžeme předpokládat, že takové Slunce by nemohlo existovat, tedy lze říct, že až do řádu okolo 10^{-25} je Slunce skutečně elektricky neutrální, tedy v rovnováze. Podobný výpočet pak můžeme aplikovat prakticky na jakýkoliv objekt ve vesmíru. Zmíněná hodnota nám také naznačuje, jakou nejmenší rovnováhu můžeme principiálně odhadnout.

¹⁶⁾ Hmotnost Slunce je $1,99 \cdot 10^{30}$ kg, $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$ mol⁻¹ je Avogadrova konstanta a $M_R(\text{H}) = 1,01$ g·mol⁻¹ je relativní atomová hmotnost vodíku.

Úloha VI.1 ... rozcvička

a) zprohýbané prkno

Prkno dané délky leží vodorovně. Z jednoho konce po něm pošleme kuličku. Za jakých podmínek bude na druhém konci prkna nejdříve?

- Prkno bude prohnuté nahoru.
- Prkno bude prohnuté dolů.
- Prkno bude rovně.
- Při libovolném prohnutí bude doba stejná.

Svoji volbu řádně odůvodněte.

b) zlomené prkno

Prohlubeň šířky L přemostíme prohnutým prknem. To se skládá ze dvou stejně dlouhých rovných částí, které jsou uprostřed spojeny zlomem. Na jeden konec položíme kuličku. Pro jakou hloubku prohnutí h bude kulička na druhém konci nejdříve? Zlom je tak hladký, že na něm kulička neztrácí energii. Mohlo by se vám hodit, že funkce $f(x) = x + 1/x$ má minimum v bodě $x = 1$.

Zprohýbané prkno

Jelikož má prkno konstantní délku, bude čas přejetí záviset pouze na průměrné rychlosti. Ze zákona zachování energie víme, že čím je kulička níž, tím větší má rychlost. Její potenciální energie v gravitačním poli se přemění na kinetickou energii. Tedy pro vodorovné prkno je rychlost konstantní, pro prkno prohnuté nahoru je rychlost menší a pro prkno prohnuté dolů je rychlost větší.

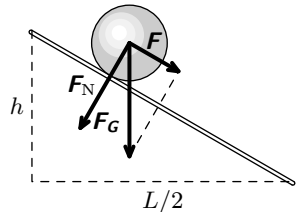
Pokud bychom se dívali jen na působení sil, vidíme, že je-li prkno rovné, žádná výsledná síla nepůsobí a pohyb je rovnoměrný. Je-li prkno prohnuté nahoru, kulička nejdříve zpomaluje a pak zrychluje. Průměrná rychlost je tedy menší. Naopak při prohnutí dolů kulička nejdříve jede z kopce a tedy zrychluje a pak zase zpomaluje. Průměrná rychlost je větší.

Správná odpověď je tedy b), protože kulička pojedě nejrychleji.

Zlomené prkno

Kuličku budeme modelovat jako hmotný bod. Spočítejme, za jak dlouho se dostane do poloviny. Rozložíme tíhovou sílu do kolmého a tečného směru k prknu. Kolmá složka je vyrušena reakcí prkna. Tečná složka urychluje kouli směrem dopředu (z kopce). Tato síla je po celou první polovinu cesty konstantní. Jedná se tedy o rovnoměrně zrychlený pohyb. Z podobnosti trojúhelníků (obrázek 22) můžeme urychlující sílu vyjádřit jako

$$F = mg \frac{h}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + h^2}}.$$



Obr. 22. Síly působící na kuličku

Tedy zrychlení, se kterým se bude pohybovat, bude

$$a = \frac{F}{m} = \frac{gh}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + h^2}}.$$

Do vzorce pro rovnoměrně zrychlený pohyb $s = \frac{1}{2}at^2$, kde s je dráha, kterou těleso urazí z klidu za čas t při zrychlení a , dosadíme

$$s = \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + h^2} \quad \text{a} \quad a = \frac{gh}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + h^2}}.$$

Odtud již jednoduše vyjádříme čas, za který kulička sjede do poloviny.

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + h^2} &= \frac{1}{2} \frac{gh}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + h^2}} t^2 \\ 2 \left(\left(\frac{L}{2}\right)^2 + h^2 \right) &= ght^2 \\ \frac{L^2}{2gh} + \frac{2h}{g} &= t^2, \quad \sqrt{\frac{L^2}{2gh} + \frac{2h}{g}} = t \end{aligned}$$

Čas, za který ujede druhou polovinu, bude stejný (rozmyslete si).

Nyní hledáme hodnotu h , pro kterou bude výraz

$$\sqrt{\frac{L^2}{2gh} + \frac{2h}{g}} \tag{27}$$

nejmenší. Druhá odmocnina je funkce rostoucí na kladných číslech, a proto bude výraz (27) nejmenší, když bude argument odmocniny

$$\frac{L^2}{2gh} + \frac{2h}{g} \tag{28}$$

také nejmenší. Pokud výraz (28) upravíme na

$$\frac{L}{g} \left(\frac{1}{\frac{2h}{L}} + \frac{2h}{L} \right),$$

stačí již jen použít nápovědu ze zadání a říct, že tento výraz nabývá minima pro

$$\frac{2h}{L} = 1 \quad \text{neboli} \quad h = \frac{L}{2}.$$

Přjetí bude kuličce trvat nejkratší dobu pro $h = L/2$.

Úloha VI.2 ... zlý trojúhelník

Máme dlouhou štěrbinu a vedle ní bodovou díрку. Jak bude vypadat interferenční obrazec na rovinném stínítku, posvítíme-li skrz ně koherentním světlem? Zanedbejte difrakci na samotné štěrbině a samotné díрке.

Za bodovou dírkou se bude světlo chovat, jako by dírka byla bodovým zdrojem koherentního záření. Výsledek průchodu světla štěrbinou si můžeme představit jako bodové zdroje nahuštěné vedle sebe. Jejich superpozicí dostaneme „válcový“ zdroj, vlnoplochy budou soustředné pláště válců se společnou osou, kterou tvoří štěrbinu.

Podmínkou pro interferenční maxima je, aby dráhový rozdíl, tj. rozdíl vzdálenosti od štěrbinu a vzdálenosti od bodové dírky, byl celým násobkem vlnové délky λ . Osu x ztotožníme se štěrbinou a dírku umístíme na osu y do vzdálenosti d , tedy bude mít souřadnice $(0, d)$. Vzdálenost roviny stínítka od roviny tvořené štěrbinou a dírkou označíme l , přičemž uvažujeme, že tyto roviny jsou rovnoběžné. Podmínku pro interferenční maximum pak zapíšeme jako

$$\sqrt{y^2 + l^2} - \sqrt{(y - d)^2 + l^2 + x^2} = k\lambda, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Z výše uvedené rovnice si vyjádříme y a dostaneme křivky k -tého interferenčního maxima popsané rovnicemi

$$y_{1,2} = \frac{d(x^2 + d^2 - k^2\lambda^2) \pm \sqrt{4k^2\lambda^2l^2(d^2 - k^2\lambda^2) + k^2\lambda^2(x^2 + d^2 - k^2\lambda^2)^2}}{2(d^2 - k^2\lambda^2)},$$

z takového předpisu si nijak přesnou představu o tvaru křivky neuděláme. Můžeme je nechat vykreslit počítačem. Předpis i získaný graf budou pro rozumné parametry nápadně připomínat paraboly. Nabízí se myšlenka, že při vhodné aproximaci dostaneme právě paraboly. Tou bude tak zvaná paraxiální aproximace – budeme předpokládat, že vzdálenost štěrbinu a bodu od stínítka je mnohem větší než všechny ostatní rozměry, $l \gg d$.

Odmocniny rozepíšeme jako Taylorův polynom, v daném přiblížení nám bude stačit prvního stupně. Platí tedy $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$ pro x malé.

Dostáváme podmínku pro interferenční maximum v podobě

$$l + \frac{y^2}{2l} - l - \frac{(y - d)^2 + x^2}{2l} = k\lambda, \quad k \in \mathbb{Z},$$

z čehož plyne rovnice pro křivku interferenčního maxima v paraxiální aproximaci

$$y = \frac{x^2 + d^2 - k\lambda l}{2d}.$$

Vidíme, že jsme skutečně dostali paraboly, což se vzhledem k tomu, že máme přímku a bod, které nám tyto křivky určují, dalo čekat.

Úloha VI.3 ... letadlo

Jak dlouhý čas uběhne v letadle mezi „západem“ a „východem“ slunce, letí-li v rovině ekliptiky? A jak to bude vypadat s délkou dne a noci? Potřebné údaje jako běžnou letovou hladinu si zjistíte na internetu. Rozeberte oba případy, kdy letadlo letí na západ i na východ.

Vzhledem k tomu, jaký je poměr výšky h , ve které letadla létají, a poloměru Země R a jaká je doba, po kterou slunce vychází nebo zapadá, můžeme si dovolit aproximaci, podle které budou sluneční paprsky na Zemi dopadat rovnoběžně.

Nejprve spočítáme rychlost v , kterou se letadlo pohybuje vůči soustavě spojené se Sluncem a Zemí. Jednak má svoji rychlost v_1 , a kromě toho je navíc unášeno rychlostí v_r danou rotací Země. Tato rychlost ale neleží v tečně trajektorie letu, a navíc její velikost je závislá na zeměpisné šířce. Její průmět do roviny ekliptiky má stále stejnou velikost, a to $\omega(R+h)\cos\varphi$, kde φ je odklon zemské osy od normály roviny ekliptiky. Pokud letadlo letí ve směru otáčení Země, tj. od západu na východ, tyto rychlosti se sčítají. Při pohybu od východu na západ od rychlosti otáčení Země odečítáme rychlost letadla v_1 .

Vlastní výpočet provedeme pouze pro pohyb od východu na západ, druhý případ je téměř identický. Označme T délku jednoho dne. Pak platí

$$v = v_r - v_1 = \omega(R+h)\cos\varphi - v_1 = \frac{2\pi}{T}(R+h)\cos\varphi - v_1.$$

Doba T_0 celého „dne“ (tj. od východu slunce po druhý východ) na palubě letadla je pak

$$T_0 = \frac{2\pi(R+h)}{v} = \frac{2\pi(R+h)T}{2\pi(R+h)\cos\varphi - v_1 T}.$$

Pokud nás zajímá čas, který uplyne od „západu“ slunce k jeho „východu“, musíme vypočítat, jakou dráhu proletí letadlo ve stínu Země. Označme α úhel, který svírá spojnice středů Země a Slunce se spojnicí středu Země a bodu, kde se letadlo vynořuje ze stínu Země. Pro tento úhel platí

$$\alpha = \arcsin \frac{R}{R+h}.$$

Odtud již snadno určíme dráhu d , kterou letadlo ve stínu urazí, / a pomocí které dopočteme hledaný čas

$$T' = \frac{d}{v} = \frac{2\alpha(R+h)}{\frac{2\pi}{T}(R+h)\cos\varphi - v_1} = \frac{2(R+h)\arcsin\frac{R}{R+h}}{\frac{2\pi}{T}(R+h)\cos\varphi - v_1}.$$

Pokud by nás zajímalo trvání dne (mezi východem a západem), pak ho stačí dopočítat jako rozdíl $T_0 - T'$. Pro pohyb od západu na východ (tj. ve směru otáčení Země) se výsledek odlišuje pouze součtem ve jmenovateli místo rozdílu.

Dopravní letadla (jako např. Boeing 747) se pohybují ve výšce okolo 11 km rychlostí $918\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$. Po dosažení vychází pro pohyb proti směru otáčení Země

$T_0 = 65,1$ h a $T' = 31,3$ h a pro pohyb ve směru otáčení Země $T_0 = 16,4$ h a $T' = 7,9$ h.

V řešení jsme neuvažovali to, že rotace Země značně vychyluje trajektorii letadla z roviny ekliptiky. Letadlo by tento pohyb muselo kompenzovat svým pohybem, a tedy by se uplatnila jen část z jeho rychlosti vůči vzduchu. Tento efekt by ve skutečnosti hrál velkou roli. Dále jsme zanedbali proudění vzduchu, které výrazně ovlivňuje pohyb letadel.

Úloha VI.4 ... konečné řešení otázky globálního oteplování

Jak by se změnil výkon slunečního záření dopadajícího na Zemi v odsluní, kdyby byla jednorázově vychýlena zemská dráha (změnou její okamžité rychlosti ve směru její dráhy) tak, aby byl pozemský rok o týden delší? Odhadněte teplotu Země v přísluní a odsluní, pokud by Země měla téměř nulovou tepelnou kapacitu. Stačí uvažovat, že původní dráha Země byla kruhová a přešla na eliptickou.

Vzpomeneme si na Keplerův třetí zákon, který dává do vztahu oběžné doby planet T obíhající centrální slunce s jejich hlavními poloosami a . Stejně bude platit i v našem případě pro změnu trajektorie Země

$$\frac{T_0^2}{a_0^3} = \frac{T_1^2}{a_1^3} \quad \Rightarrow \quad a_1 = \sqrt[3]{\frac{T_1^2}{T_0^2}} a_0,$$

kde indexy 0 budeme značit počáteční situaci, kdy Země obíhá Slunce po kružnici s poloměrem $a_0 = 1$ AU = $1,50 \cdot 10^{11}$ m s oběžnou dobou $T_0 = 365,2$ dne, a indexy 1 budou značené veličiny odpovídající situaci po změně zemské dráhy (doba oběhu $T_1 = 372,2$ dne).

Vzhledem k tomu, že přechod na eliptickou¹⁷ dráhu se uskutečnil rychle a ve směru pohybu Země, což znamená, že přísluní (perihelium) nové dráhy bude ve vzdálenosti $a_p = a_0$ od Slunce a odsluní (afelium) bude ve vzdálenosti $a_a = 2a_1 - a_0 = \left(2\sqrt[3]{T_1^2/T_0^2} - 1\right)a_0 \approx 1,025$ AU. Už z tohoto výsledku je vidět, že dramatické změny teplot v průběhu roku nebudou nastávat, protože excentricita této dráhy je pouze $e_1 = (a_a - a_p)/(a_a + a_p) = 1 - \sqrt[3]{T_0^2/T_1^2} = 0,0126$, což je menší excentricita, než má Země ve skutečnosti. Pokud bychom ale uvažovali eliptickou dráhu, záleželo by na tom, kdy v průběhu roku dojde ke změně dráhy. Excentricita by se pak mohla i zmenšit, střední vzdálenost Země-Slunce by vzrostla v každém případě tak, aby se velká poloosa zvětšila z a_0 na a_1 .

Hustota toku sluneční energie ve vzdálenosti 1 AU od Slunce se nazývá *sluneční konstanta* a její hodnota je $S_0 = 1370$ W/m². Ve skutečnosti se nejedná o konstantu, protože v průběhu roku kolísá o cca 1,7%¹⁸, ale v rámci řešení

¹⁷⁾ Případně více eliptickou, pokud bychom se rovnou rozhodli uvažovat i to, že původní dráha Země je ve skutečnosti eliptická s excentricitou $e = 0,0167$.

¹⁸⁾ Nemluvě o tom, že se i její střední hodnota periodicky mění v průběhu 11letého slunečního cyklu.

úlohy ji budeme považovat za konstantní. Hustota toku sluneční energie je nepřímo úměrná druhé mocnině vzdálenosti a ve vzdálenosti r od Slunce ji můžeme vypočítat podle vztahu

$$S_r = \frac{a_0^2}{r^2} S_0.$$

V přísluní naší nové dráhy je $S_p = S_0$ z definice a v odslnuí

$$S_a = \frac{a_p^2}{a_a^2} S_0 = \frac{1}{\left(2\sqrt{T_1^2/T_0^2} - 1\right)^2} S_0 = 0,95 S_0 = 1300 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}.$$

Pro odhad teploty budeme předpokládat, že Země je dokonale černé těleso a že v každý okamžik je vyrovnaná bilance zářivého výkonu dopadajícího na Zemi a výkonem, která je Zemí vyzařovaná jako černým tělesem. Jedná se o logický předpoklad, protože jinak by Země nebyla v tepelné rovnováze a buď by se neustále ohřívala, nebo ochlazovala. Ve skutečnosti má Země tepelnou kapacitu, takže není v tak dokonalé tepelné rovnováze – ani blízko takové, že by se dopadající záření z jedné strany na Zem okamžitě vyzařovalo všemi směry, ale berme to jako první přiblížení. Světelný výkon dopadající na Zemi, která je dokonalá koule o poloměru R_Z , ve vzdálenosti r , je úměrný průřezu Země a hustotě toku sluneční energie, $P_r = \pi R_Z^2 S_r$. Výkon, který Země vyzáří na svém celém povrchu, je dle Stefanova-Boltzmannova zákona

$$P = 4\pi R_Z^2 M = 4\pi R_Z^2 \sigma \tau^4,$$

kde M je intenzita vyzařování z povrchu tělesa, $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-4}$ Stefanova-Boltzmannova konstanta a τ je teplota černého tělesa. Vzhledem k tomu, že se mají oba výkony rovnat, dostáváme vzorec pro teplotu Země v našem přiblížení

$$\tau_r = \sqrt[4]{\frac{S_r}{4\sigma}} = \sqrt{\frac{a_0}{2r}} \sqrt[4]{\frac{S_0}{\sigma}}.$$

Teplota v perihelu pak vyjde $\tau_p \approx 6^\circ\text{C}$ a v afelu $\tau_a \approx 2^\circ\text{C}$. Teplota v perihelu by teoreticky podle našich předpokladů měla odpovídat střední teplotě na Zemi v průběhu roku, která se udává jako 14°C . Což na první pohled úplně nesedí, ale vzhledem k počtu zanedbání, kterých jsme se dopustili, je to poměrně dobrá shoda. Další vlivy, které by se pro správné určení teploty měly započítat, jsou například to, že ve skutečnosti spektrum Země při vyzařování nebude ideálně odpovídat vyzařování černého tělesa, ale mělo by určitou specifickou vyzařovací charakteristiku, navíc i tato celková charakteristika by byla jenom přiblížením, protože Země není jenom z jedné chemické látky, ale jinak bude vyzařovat pevnina a jinak oceány. Toto by vedlo spíš ke snížení očekávané teploty Země. Vliv na teplotu Země má také to, že má horké jádro – částečně obsahující tepelnou energii od doby vzniku Země pocházející z gravitační potenciální energie a dále v jádru dochází k rozpadu radioaktivních prvků, což také zvyšuje teplotu Země. Další věcí je přítomnost atmosféry, která díky skleníkovým plynům zvyšuje teplotu zemského povrchu.

Něco navíc

Pokud bychom tedy chtěli vyřešit globální oteplování jako ve Futuramě, kde roboti ovlivnili dráhu Země tak, že rok byl o týden (robotí pařby) delší, tak by nás kromě výkyvů teploty v průběhu roku zejména zajímala průměrná roční teplota. Respektive i s naším relativně primitivním modelem bychom mohli určit, o kolik zhruba stupňů by se teplota změnila vůči původní teplotě. Za tím účelem můžeme využít druhý Keplerův zákon – zákon ploch – říkající, že za jednotku času průvodič planety opíše stejnou plochu.¹⁹ Pro plošnou rychlost w pak platí

$$w = \frac{a_1 b_1}{T_1} = \frac{r v_r}{2},$$

kde b_1 je vedlejší poloosa elipsy a v_r je rychlost planety ve vzdálenosti r od Slunce. Pokud bychom chtěli, můžeme vypočítat i hodnotu w s pomocí vztahu $e = \sqrt{a_1^2 - b_1^2}/a_1$, která pak bude $w = \sqrt{a_a a_p} = a_0 \sqrt{2(T_1/T_0)^{2/3} - 1}$, ale toto číslo nebudeme dál potřebovat. Vystačíme si s úvahou, že když w je konstantní, můžeme vyjádřit oběžnou rychlost jako funkci vzdálenosti $v_r = 2w/r$. Vzhledem k tomu, že trajektorie Země je elipsa, můžeme si vybrat souřadnou soustavu, kde Slunce bude v jejím počátku a perihelium bude na ose x v kladném směru. Naši elipsu popíšeme v polárních souřadnicích jako

$$r_\varphi = a_1 - (a_1 - a_0) \cos \varphi,$$

kde φ je úhel měřený právě od periheliu v kladném smyslu (proti směru hodinových ručiček). Jde o aproximaci pro malé excentricity ε . Obecně můžeme kuželosečky v polárních souřadnicích zapsat ve tvaru

$$r(\varphi) = \frac{a_0}{1 - \varepsilon \cos \varphi},$$

kde a_0 je velikost hlavní poloosy a ε je excentricita. Pro $\varepsilon = 0$ jde o kružnici, pro $0 < \varepsilon < 1$ jde o elipsu, pro $\varepsilon = 1$ jde o parabolu a pro $\varepsilon > 1$ to je jedna větev hyperboly.

Pokud jste se ještě s polárními souřadnicemi nesetkali, tak místo souřadnice x a y máme souřadnice $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ určující vzdálenost od počátku a φ , což je právě zmíněný úhel, pro který platí $\varphi = \operatorname{tg} y/x$.

Poslední úvaha se týká toho, že teplotu bychom chtěli „vystředovat“ tak, že bychom si rozdělili dráhu Země v průběhu roku na malé kousičky, kdy má skoro stejnou teplotu určenou naším modelem, a teplotu vynásobili časem, za který Země příslušný kousíček dráhy urazila. Všechny tyto vynásobené kousky bychom pak sečetli a vydělili dobou oběhu. Vlastně bychom spočítali vážený průměr teploty. Čas, který Zemi potrvá, než urazí nějakou dráhu, je nepřímo úměrný její rychlosti. Rychlost je zase v našem případě nepřímo úměrná vzdálenosti od Slunce, takže čas je úměrný vzdálenosti. Takže můžeme jako váhovou funkci použít vzdálenost a ne

¹⁹⁾ Je to jen jiná formulace zákona zachování momentu hybnosti.

přímo čas. Také bude lepší, když kousičky, ve kterých považujeme rychlost Země za konstantní, půjdou k nekonečně krátkým dobám – tzn. přejdeme k integrování. Průměrná teplota bude

$$\bar{\tau} = \frac{\int_0^{2\pi} r_\varphi \tau_{r_\varphi} d\varphi}{\int_0^{2\pi} r_\varphi d\varphi}.$$

Tyto integrály si můžeme nechat numericky spočítat²⁰ a vyjde nám, že nemůžeme čekat změnu průměrné roční teploty ani o celé 2 °C, takže pokud by bylo potřeba Zemi ochladit v situaci, kdy by bylo všem nechutné vedro, ani o týden delší rok by nestačil.

Úloha VI. P ... nošení vody

V létě bylo zakázáno vynášet z bazénů vodu v bermudách. Kolik ale může člověk vynést vody ve vlasech? Předpokládejme, že vlasů je větší počet (z bazénu nevynáší vodu děd Vševed).

Vlasy, podobně jako ony zakázané bermudy, jsou složeny z mnoha jednotlivých vláken, která na sebe váží vodu. Způsoby, kterými k tomu dochází, jsou čtyři. Diskutujme tedy, jak moc jsou efektivní a jak se podílejí na celkovém množství navázané vody. Předtím ale připomeňme nějaké základní vlastnosti pokrývky hlavy. Průměr vlasu je asi 100 μm, jeho hustota objemová asi 1,3 kg·m⁻³, hustota pokrytí hlavy asi 200 cm⁻² a plocha vlasy pokryté části hlavy asi 500 cm². To dává dohromady asi 100000 vlasů na hlavě. Při sestřihu na 1 cm je hmotnost vlasů asi 10 g.

a) Vsáknutí vody do vlákna

Vlákno vlasu je tvořeno ze tří částí. Svrchní šupinatá *kutikula* chrání vnitřní vrstvu (*kortex*), ve které u tlustších vlasů (resp. vousů) je skryta dřev (medula). Voda se zachycuje především ve vláknitém kortexu, kutikula naopak vodu odpuzuje, protože pokud je vlas příliš navlhlý, vlákna nabobtnají a trhají se. Kolik vlas absorbuje, najdeme na internetu, většina zdrojů se shoduje na tom, že je to mezi 20 až 30 procenty hmotnosti vlasu, podle jeho druhu. Vzpomeňte-li si na text ze začátku, zjistíme, že pokrývka hlavy nasaje asi 3 ml vody na centimetr délky.

b) Záchyt vody mezi vlákny

Tento odstavec se týká především dlouhých vlasů, protože k tomu, aby se mohla voda zachytit mezi vlákna, musejí být vlasy zplihlé. Představme si, že vlasy reprezentované rovnými válci jsou naskládány těsně vedle sebe jako klády dřeva. Nyní si jistě vzpomínáte na úlohu Dr. Nec ze třetí série, kdy bylo potřeba vypočítat koeficient pro přepočítání mezi prostorovým metrem dřeva a plnometrem. Nyní potřebujeme zjistit, jaké množství vzduchu je mezi našimi kládami. Kdyby vlasy byly jen vyrovnané vedle sebe v hexagonální mříži

²⁰⁾ Například pomocí stroje na <http://www.wolframalpha.com/>.

jako ve zmíněné úloze dřevo, byl by převodní vztah mezi objemem vlasů (V_{v1}) a vzduchu (V_{vz}) následující

$$V_{vz} = V_{v1} \frac{1 - \nu}{\nu}.$$

Pro $\nu = 0,9$ ²¹ budeme objem vlasů násobit číslem $\frac{1}{9}$. Vlasy do mezer mezi sebou zachytí tolik vody, co je devítina jejich objemu. Přepočteno na centimetr délky (s tím, že minimální délka, pro kterou to platí, je asi 5 cm) to činí 0,9 ml. Pokud uvážíme to, že vlasy odděluje vrstva vody tenká 10 % jejich průměru, musíme toto číslo zdvojnásobit.

c) Záchyt na povrchu

Na povrchu vlasů se nějaká voda zachytí vždy. Povrch se však může dost lišit. Pro lidi s dlouhými vlasy je přibližně roven ploše, kterou zabere jejich mokřý skalp. To je přibližně součet zarostlé plochy hlavy (500 cm^2) a přechínající zbytek. Ten na šířku zabere asi tolik, co hlava (15 cm) a na délku stejně jako nejdelší vlas. Tato část by se měla násobit dvěma, protože i mezi kůží zad a vlasy se určitě něco zachytí. Osoba se třiceticentimetrovými vlasy tedy má aktivní plochu hlavy asi 1400 cm^2 . Jaká je tloušťka vrstvy vody? Malá. Vlasy jsou mastné a vodu spíše odpuzují, takže se na nich brzo začnou tvořit kapičky nebo přímo celé proudy, které stekou dřív, než vyjdeme z bazénu – zůstane na nich nejvýše několik mikrometrů vody, které (pokud by byly vlasy oddělené) rychle vyschnou. Na celé hlavě je tak nejvýše mililitr vody.

d) Záchyt v prostoru mezi kořínky

Pravděpodobně největší zásluhu na vynášení vody z bazénu mají prostory mezi kořínky vlasů. Kdybychom se snažili jakkoliv „uplátat“ vlasy tak, aby mezi nimi byly co nejmenší mezery, vždy nějaká malá (ale ne nezanedbatelná) zůstane právě u kořínku. Protože hlavu namáčíme rovnoměrně, nemá tato voda téměř kudy utéci, jen malými mezerami (viz výše) mezi vlákny, po jejich povrchu nebo bokem zůstane zachycená poměrně dlouhou dobu. Tyto mezirky jsou soustředěny u povrchu hlavy a dosahují několika milimetrů délky (můžeme si je představit jako zužující se a stáječící se kužely – protože dál už postupně přechází v mezivláknenný prostor. Takže takto se na hlavě zachytí okolo 50–100 ml vody. Lidé s krátkými vlasy se budou blížit nižší hodnotě.

Největší vliv na to, kolik vody vyneseme, má ovšem rychlost, kterou vyběhneme z bazénu ven. Ve vodě jsou totiž vlasy rozptýlené všude možné a při vynoření s sebou stáhnou velké množství vody, která ale rychle odteče, protože se na nich nemá jak zachytit. Vlasy tak nejsou naskládány těsně na sebe, ale může se stát,

²¹⁾ Pro připomenutí: Koeficient ν byl spočten pro jedno konkrétní uspořádání – obdélníkový průřez. Byl však uveden obecný vztah, do kterého jsme dosadili. Mokrá kštica má totiž v prvním přiblížení tvar tenkého kvádru o rozměrech *délka vlasu* \times *polovina obvodu hlavy* \times *cca 4 mm*, což dopočteme z údajů v úvodu řešení. Odhad dobře platí i pro krátké vlasy (které nestojí), protože si tento kvádr můžeme představit jako kosý, což na objem nemá vliv. Je důležité, že je tenký, protože se příliš neprojeví, že ve skutečnosti kopíruje povrch hlavy.

že máte na hlavě víc vody než vlasů. Tím se změní koeficient ze druhého bodu i několikanásobně, stejně tak i množství vody ve vlasech.

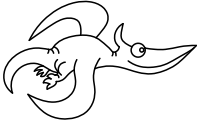
Sečteme-li všechny vlivy, které jsme diskutovali, odhadujeme, že vyneseme přibližně 5 ml vody na centimetr délky vlasů a průměrně asi 75 ml vody vždy. Autor tohoto řešení by tedy na vlasech z bazénu vynesl naráz asi 60 ml vody, zatímco někdo s hřívou pod lopatky by připravil plovárnu asi o 300 ml vody. Je to reálné? Udělali jsme menší experiment a dolní hodnota se potvrdila, protože jsme naměřili asi 50 ± 10 ml. Jak je to ve skutečnosti s delšími vlasy, nevíme. Nicméně hodnota bude spíš vyšší než odhadnutá, a proto je srovnání s bermudovými plavkami na místě.

Literatura

Pokud si chcete počíst ve zdrojích, z nichž jsme čerpali, jsou to především tyto tituly:

[1] Clarence R. Robbins: Chemical and physical behavior of human hair (najdete na Google Books),

[2] C. Barba et al.: Water absorption/desorption of human hair and nails, *Thermochimica Acta* 2010.



Zadání experimentálních úloh

Úloha I. E ... vrh koulí

Všichni dobře víme, že ve vakuu doletí všechny předměty vržené stejnou rychlostí a pod stejným úhlem stejně daleko. Co se ale stane, když je takto hážeme za normálního tlaku? Změřte, jak závisí dolet tělesa konkrétního tvaru na jeho hmotnosti. Jak tato závislost vypadá teoreticky? Můžete ji spočítat, nebo nasimulovat na počítači např. v Excelu. (řešení str. 72)

Úloha II. E ... Jin a Young

Pravděpodobně jsme již všichni slyšeli o dvoušterbinovém Youngově experimentu. Zkoušel si ale někdo podomácku „vyrobit“ interferenční proužky na stínítku osvětleném dvěma šterbinami? K optickému Youngově pokusu existuje i mechanická analogie, kdy sledujeme skládání dvou vlnění na vodě, nebo akustická analogie, kdy se skládají dvě zvukové vlny. Ve všech třech případech je možné zkoumat interferenční obrazec vznikající v určité rovině. Pokuste se realizovat jeden nebo i více z uvedených tří pokusů, a získat tak interferenční obrazec. Poté určete vlnovou délku, případně rychlost šíření vlnění. Uvítáme fotodokumentaci. (řešení str. 75)

Úloha III. E ... papír

Změřte, jak závisí průsvitnost papíru na úhlu, pod kterým je sklopený. Máme soustavu oko papír žárovka v jedné přímce. Měříme závislost intenzity prošlého světla na úhlu stočení papíru vzhledem k ose aparatury. (řešení str. 79)

Úloha IV. E ... vejce sebevrah

Z jaké nejvyšší výšky můžete shodit obyčejné slepičí vajíčko na tvrdou podlahu, aniž by se nakráplo? Co když vajíčko natěsno obalíme nějakým měkkým obalovým materiálem (tj. papír, bublinková folie apod.) s tloušťkou nejvýše 5 mm? Z kolikrát vyšší výšky ho pak můžeme pustit, aniž by se nějak viditelně poškodilo? Vyzkoušejte několik různých obalů. (řešení str. 83)

Úloha V. E ... strunatci

Vytvořte si zařízení, na kterém bude moci být upevněna struna (či gumička) s proměnlivou délkou tak, že bude napínána stále stejnou silou. Prozkoumejte, jak se mění hlavní frekvence vydávané strunou (či gumičkou) v závislosti na délce struny. Na zpracování zvuku můžete použít například program Audacity. (řešení str. 85)

Úloha VI. E ... zeměplocha

Vymyslete co nejvíce způsobů, jak ověřit předpoklad o kulatosti Země. Pokud zjistíte, že je Země opravdu kulatá, dokázali byste určit i její poloměr? (řešení str. 90)



Řešení experimentálních úloh

Úloha I. E ... vrh koulí

Všichni dobře víme, že ve vakuu doletí všechny předměty vržené stejnou rychlostí a pod stejným úhlem stejně daleko. Co se ale stane, když je takto házíme za normálního tlaku? Změřte, jak závisí dolet tělesa konkrétního tvaru na jeho hmotnosti. Jak tato závislost vypadá teoreticky? Můžete ji spočítat, nebo nasimulovat na počítači např. v Excelu.

Teorie

Abychom určili brzdné zrychlení pro tělesa pohybující se ve vzduchu, vyjdeme z Newtonova vztahu pro odporovou sílu závislou na kvadrátu rychlosti, z čehož pro brzdné zrychlení dostaneme vztah

$$a_{\text{odp}} = \frac{C_{\rho} S v^2}{2m},$$

kde C je koeficient odporu určený tvarem tělesa, v je rychlost tělesa, S je plocha jeho průřezu, m je hmotnost tělesa a ρ je hustota prostředí, v našem případě vzduchu. Úloha má analytické řešení, pokud se jedná pouze o vrh ve svislém směru. Jakkmile má ale předmět nějakou rychlost podél horizontální (x -ové) osy, analytické řešení neexistuje a je třeba si vypomoci počítačem.

Simulace

K simulaci bylo použito fiktivní těleso o koeficientu odporu $C = 0,5$, tedy koule nebo kornout. Počáteční hodnoty rychlosti tělesa byly zvoleny tak, aby byly v doletu viditelné co největší rozdíly.

Po časových intervalech o velikosti $\Delta t = 0,001$ s se počítaly rychlost, souřadnice a zrychlení tělesa. Tento interval zajistil přesnost určení x -ové uražené vzdálenosti s odchylkou 1 až 4 mm, což je vzhledem k rozpětí uražených vzdáleností dostačující. Předpokládáme, že kladný směr pro složky rychlosti je ve směru osy x a proti směru osy y . Rychlosti jako i zrychlení se v čase t vypočetly po složkách z údajů o rychlostech, poloze a zrychlení pro čas $t - \Delta t$ podle následujících vztahů (index 1 značí hodnotu pro čas t , index 0 značí hodnotu pro čas $t - \Delta t$)

$$v_{x1} = v_{x0} - a_{x0} \Delta t, \quad v_{y1} = v_{y0} + (g - a_{y0}) \Delta t,$$

$$v_1 = \sqrt{v_{x1}^2 + v_{y1}^2}, \quad a_1 = \frac{C_{\rho} S v_1^2}{m},$$

$$a_{x1} = a \frac{v_{x1}}{v} \text{ „průmět odporového zrychlení do směru } x\text{-ové osy“},$$

$$a_{y1} = a \frac{v_{y1}}{v} \text{ „průmět odporového zrychlení do směru } x\text{-ové osy“ ,}$$

$$x = x_0 + v_{x0}\Delta t - \frac{1}{2}a_{x0}\Delta t, \quad y = y_0 - v_{y0}\Delta t - \frac{1}{2}(g - a_{x0})\Delta t.$$

Ve chvíli, kdy y -ová souřadnice mění znaménko, byla odečtena hodnota x -ové souřadnice, tedy dolet. Rozdíl x -ové souřadnice v dobách $\pm\Delta t$ byl zaznamenán jako odchylka. Následně byla změněna hmotnost simulovaného tělesa, aby se znovu odečetl dolet.

Na první pohled by $x(m)$ měla být asymptotická funkce, což je očekávatelné, neboť pro vysoké hmotnosti bude vliv odporu vzduchu zanedbatelný a všechny těžší předměty začnou padat, stejně jako ve vakuu, téměř na stejné místo. Počáteční hodnoty pro simulaci byly zvoleny následovně:

$$v_x = 2,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}, \quad v_y = 0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}, \quad y = 0,93 \text{ m}, \quad x = 0 \text{ m},$$

$$C = 0,5, \quad S = 0,004 \text{ m}^2, \quad \rho_{\text{vzduchu}} = 1,2759 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}.$$

Dolet pro různé hmotnosti tělesa

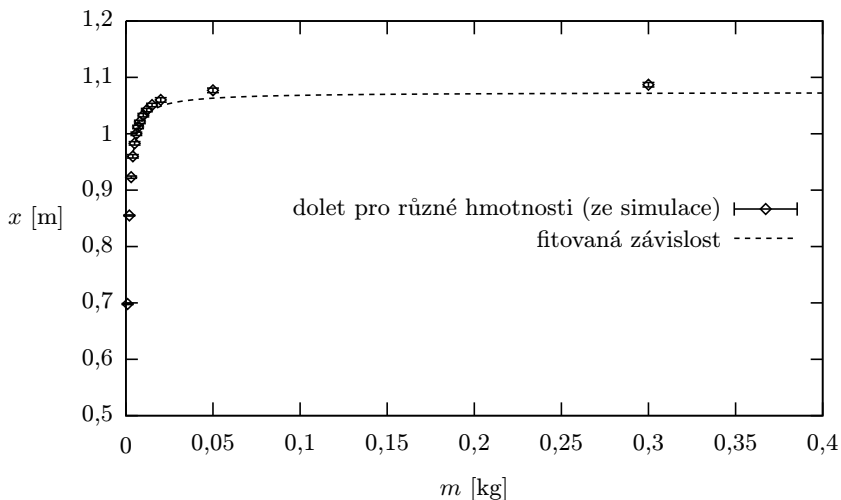
hmotnost [kg]	dolet [m]	odchylka [m]
0,001	0,698	0,001
0,002	0,855	0,001
0,003	0,923	0,002
0,004	0,960	0,003
0,005	0,983	0,003
0,006	1,000	0,003
0,007	1,012	0,003
0,008	1,021	0,003
0,010	1,033	0,003
0,012	1,042	0,003
0,015	1,051	0,003
0,020	1,060	0,004
0,050	1,077	0,004
0,300	1,087	0,004
0,800	1,086	0,004
1,500	1,087	0,004
5,000	1,087	0,004

Naměřená data byla fitována funkcí

$$f(x) = \frac{a}{x^b} + c$$

s výslednými parametry $a = (-6,9 \pm 4,5) \cdot 10^{-4}$ (chyba 65 %), $b = (9,1 \pm 0,9) \cdot 10^{-1}$ (chyba 10 %) a $c = (1,1 \pm 0,01)$ (chyba 1 %).

Bohužel fitovaná funkce na simulované hodnoty nesedí až tak dobře (jeden parametr byl vypočten s velkou chybou 65 %), ale je to nejlepší výsledek mezi funkcemi, které byly ozkoušeny (logaritmus, exponenciála, ...).



Obr. 23. Graf závislosti $x(m)$ pro badmintonový míček

Měření

K měření byly jako tělesa stejného tvaru a různých hmotností použity badmintonové míčky s různými závažími upevněnými ve špičce. Tyto byly zvoleny, protože jev je nejlépe rozpoznatelný na lehkých tělesech (vezmeme-li v úvahu, jakých rychlostí je možno v domácích podmínkách dosáhnout). Jako stroj, který zaručí stejnou výletovou rychlost bylo použito těžké kyvadlo o hmotnosti 1,77 kg (aby bylo možno u něj zanedbat odpor vzduchu) s upevněnou trubicí, ze které vylétávaly badmintonové míčky. V nejnižším bodě kyvadlo narazilo do vyměkčené zábrany (k tomuto účelu posloužil malý polštář, aby se zabránilo odrazu kyvadla a výletu míčku jiným směrem). Míček, který mohl v trubici volně klouzat, pokračoval dál původní rychlostí. Jako závaží do špičky míčku byly postupně použity hliněná kulička, olověná kostka a dvě olověné kostky. Jako konstrukce pro kyvadlo byly použity štafle. Bylo ovšem těžké dosáhnout výletu míčku vždy jedním směrem, neboť polštář jako tlumidlo nestačil. Vhodnější by byla třeba plastelína.

Kyvadlo překonávalo výškový rozdíl 60 cm, což v dolní úvratí odpovídá rychlosti $v_x = 3,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Výletová rychlost byla ale pravděpodobně o něco menší (kvůli tření při výletu z trubice).

Měření doletu badmintonových míčků

hmotnost [kg]	0,005	0,005	0,005	0,005	0,010	0,026	0,050
dolet 1 [m]	1,01	1,12	1,01	1,03	1,30	1,04	1,03
dolet 2 [m]	0,80	0,97	1,10	1,01	1,02	1,17	1,09
dolet 3 [m]	0,99	1,05	1,12	1,14	1,41	1,23	1,25
dolet 4 [m]	0,98	1,00	0,88	0,95	1,18	1,00	1,31
dolet 5 [m]	0,94	0,90	0,82	0,77	1,03	1,26	1,10
dolet 6 [m]	0,96	0,97	0,87	0,99	1,17	1,26	1,14
průměr [m]	0,95	1,00	0,97	0,98	1,19	1,16	1,15
směrodatná odchylka [m]	0,07	0,07	0,12	0,11	0,14	0,10	0,10

Z měření je vidět, že těžší míčky létají dál. Kvůli velikosti chyby způsobené nepřesností výletové rychlosti (nebylo v mých silách eliminovat tření míčku, než vylétí z trubice, ani pohyby konstrukce kyvadla při nárazu) není ovšem možné z naměřených hodnot ověřit, jak korespondují simulovaná data s naměřenými.

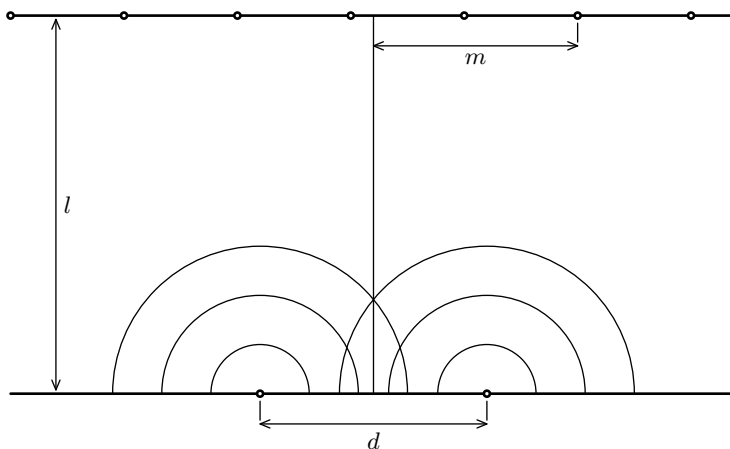
Úloha II. E ... *Jin a Young*

Pravděpodobně jsme již všichni slyšeli o dvoušterbinovém Youngově experimentu. Zkoušel si ale někdo z Vás podomácku „vyrobit“ interferenční proužky na stínítku osvětleném dvěma šterbinami? K optickému Youngově pokusu existují i mechanická analogie, kdy sledujeme skládání dvou vlnění na vodě, nebo akustická analogie, kdy se skládají dvě zvukové vlny. Ve všech třech případech je možné zkoumat interferenční obrazec vznikající v určité rovině. Pokuste se realizovat jeden nebo i více z uvedených třech pokusů a získat tak interferenční obrazec. Poté určete vlnovou délku, případně rychlost šíření vlnění. Uvítáme fotodokumentaci.

V roce 1801 Thomas Young experimentálně ukázal, že světlo je vlna. Demonstroval, že světlo vykazuje interferenci stejně jako vodní vlny, zvukové vlny a všechny ostatní typy vln. Na obrázku je jedno z možných uspořádání Youngova experimentu.

Teorie

Monochromatický, koherentní zdroj záření jsme umístili za přepážku se dvěma šterbinami o zanedbatelné šířce. Podle Huyghensova principu se každý bod, tedy i šterbiny, které v důsledku zanedbatelné šířky můžeme považovat za body, stávají zdroji záření. Za přepážkou záření z dvou nově vzniklých zdrojů interferuje a na stínítku ve vzdálenosti l vzniká interferenční obraz maxim a minim.



Obr. 24. Schéma experimentu

Zaměříme se na mechanické analogie a to konkrétně na interferenci vln na vodní hladině a interferenci zvuku. V klasickém pokusu se při odvozování vzdáleností maxim, resp. minim, může v případě kdy $l \gg d$ použít pro úhel φ sevřený rovinou clony a bodem na stínítku aproximace $\sin \varphi = \text{tg } \varphi = \varphi$. Tento předpoklad, však v uspořádání, které je popsáno níže nelze použít a proto vyjdeme ze vztahu

$$\sqrt{l^2 + \left(m_k + \frac{d}{2}\right)^2} - \sqrt{l^2 + \left(m_k - \frac{d}{2}\right)^2} = \frac{2k-1}{2}\lambda,$$

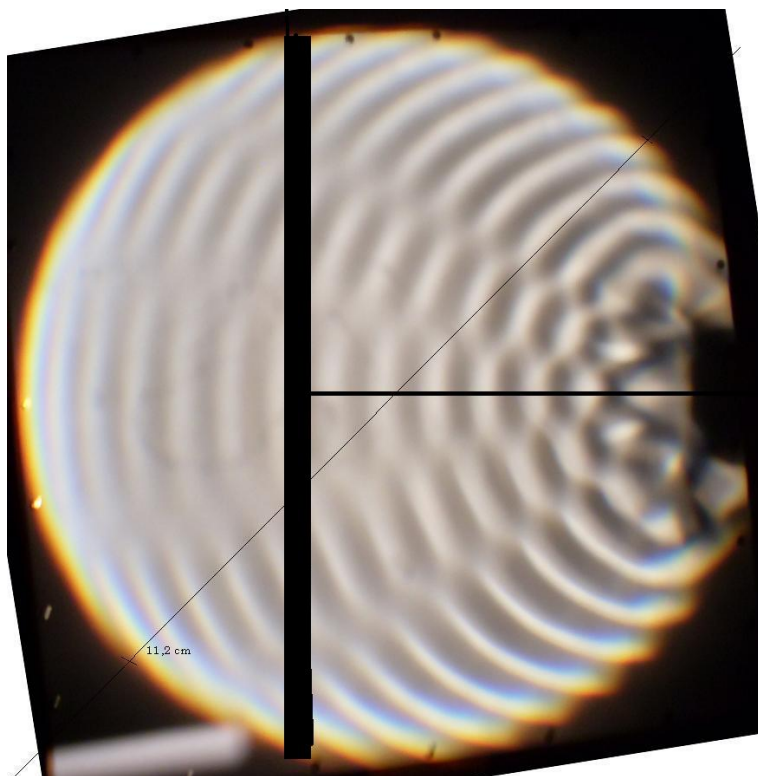
kde m je vzdálenost minima od osy aparatury a k je „pořadové číslo minima“ směrem od středu.

Pro vlnovou délku, jejíž hodnotu chceme změřit, dostáváme vztah

$$\lambda = \frac{2}{2k-1} \sqrt{l^2 + \left(m_k + \frac{d}{2}\right)^2} - \sqrt{l^2 + \left(m_k - \frac{d}{2}\right)^2}.$$

Měření

- a) Interference na vodní hladině: V Petriho misce jsme pomoci dvou oscilátorů vybudili vlnění (dvě štěrby na nichž difraktuje rovinná vlna můžeme nahradit dvěma zdroji kruhových vln). Dvě vzniklé vlny navzájem interferovaly. Interferenční obrazce byly zachyceny fotoaparátem, viz obrázek 25. Průměr čočky, kterou meotar promítal misku na plátno, tedy průměr zobrazeného světlého kruhu je 11,2 cm, což nám posloužilo jako měřítko.



Obr. 25. Interference na vodní hladině

Na obrázku byla vzdálenost $l = 6 \text{ cm}$ a $d = 1,5 \text{ cm}$. Odečtené polohy minim jsou: $m_{-2} = 3,6 \text{ cm}$, $m_{-1} = 1,5 \text{ cm}$.

Dosazením těchto hodnot do výše uvedeného vztahu dostaneme

$$\lambda_1 = (0,75 \pm 0,03) \text{ cm}.$$

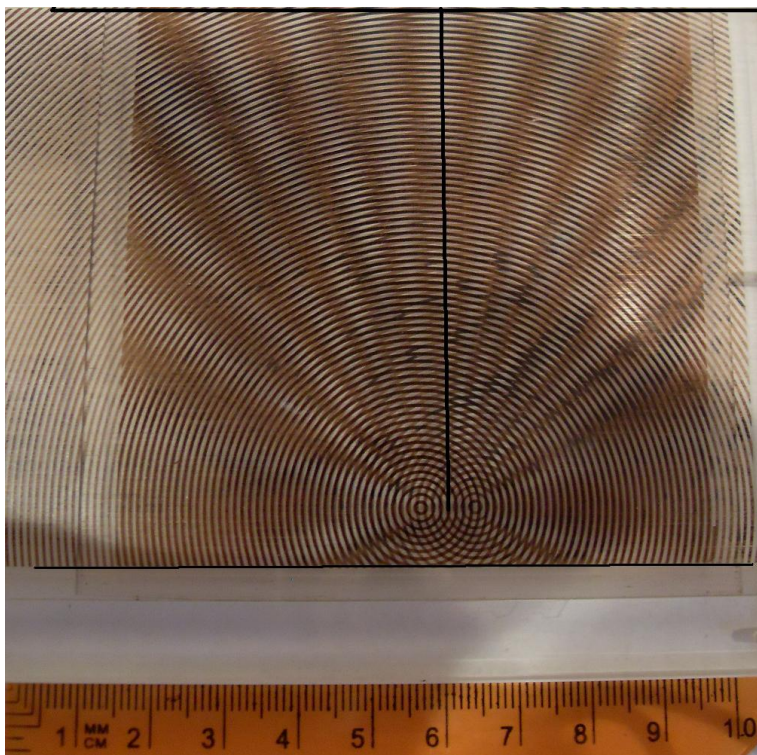
Vlnová délka odečtená z obrázku je

$$\lambda_0 = (0,75 \pm 0,05) \text{ cm},$$

což v rámci chyby odpovídá

- b) „Interference obrázku:“ Dvě průhledné fólie se soustřednými kružnicemi o poloměrech zvětšujícími se po 1 mm (označme $\lambda = 1 \text{ mm}$) jsme překryli tak, že středy od sebe byly vzdálené $d = 7 \text{ mm}$. Vidíme, že i toto je analogie Youngova

experimentu, jen ve statickém provedení. V tomto případě, na rozdíl od ana-



Obr. 26. Interference obrázků

logie s vodou budeme sledovat polohy maxim. Zaměníme-li význam m v dříve uvedeném vztahu z minima na maximum, změní se vztah pro λ takto

$$\lambda = \frac{1}{k} \left(\sqrt{l^2 + \left(m_k + \frac{d}{2}\right)^2} - \sqrt{l^2 + \left(m_k - \frac{d}{2}\right)^2} \right).$$

Z obrázku 26 odečteme hodnoty maxim: $m_{-2} = 3,6$ cm, $m_{-1} = 1,5$ cm.

Rovinu, kde jsme odečítali maxima, jsme umístili do vzdálenosti $l = 6,8$ cm a $d = 0,7$ cm, jak jsme již uvedli. Odečtené polohy minim jsou: $m_{-1} = 0,5$ cm, $m_{-2} = 1$ cm, $m_{-3} = 2,6$ cm, $m_{-4} = 3,7$ cm.

Hodnoty λ pro jednotlivá m jsme shrnuli do tabulky.

Dopočet výsledků experimentu

k	-1	-2	-3	-4
m_k [cm]	0,5	1,0	2,6	3,7
λ_k [cm]	0,0513	0,0753	0,0832	0,0862

Diskuse výsledků

V experimentu zkoumajícím interferenci vln na vodní hladině jsme dospěli ke stejnému výsledku jak přímým měření vlnové délky, tak výpočtem na základě teoretického vztahu a naměřených parametrů. Vzniklé odchylka je jak statistická (původem zejména v měření délek), tak i systematická. Příčina systematické chyby je pravděpodobně hlavně ve zvoleném způsobu udávání měřítka.

V druhém pokusu zkoumajícím „interferenci obrázků“ můžeme vidět poměrně velkou systematickou chybu, opět způsobenou měřítkem, tedy přepočítáváním naměřených délek, čímž chyba rychle narůstá. V prvním maximu však i přesto sedí vypočtená hodnota s tou naměřenou velmi pěkně.

Úloha III. E ... papír

Změřte, jak závisí průsvitnost papíru na úhlu, pod kterým je sklopený. Máme soustavu oko papír žárovka v jedné přímce. Měříme závislost intenzity prošlého světla na úhlu stočení papíru vzhledem k ose aparatury.

V této experimentální úloze zkoumáme velice komplexní případ; k měřenému signálu přispívá hned několik jevů. Proto bychom v teoretické části měli provést výčet těchto jevů, pokusit se je srovnat podle významu, uvést případné zjednodušující předpoklady a na závěr navrhnout vhodnou modelovou funkci.

Teorie

- Kancelářský papír je bílý a velké množství světla se od jeho povrchu odráží. Budeme-li předpokládat, že intenzita odraženého světla nezávisí na úhlu dopadu, pak můžeme tento jev zahrnout do veličiny I_0 , tedy intenzity světla na vstupu do materiálu papíru čili efektivní intenzity světla vycházejícího ze zdroje.
- Největší část světla se pohlcuje v materiálu papíru. Materiál budeme v prvním přiblížení považovat za homogenní (v každém místě objemu jsou stejné vlastnosti) a izotropní (v každém směru budou platit dále uvedené vztahy). Pak můžeme využít Lambertův-Beerův zákon pro intenzitu světla po průchodu absorbujiícím materiálem tloušťky d

$$I_{\max} = I_0 e^{-\kappa d},$$

kde κ je absorpční koeficient a I_0 je intenzita světla vycházejícího ze zdroje (na vstupu).

- Významná část světla se rozptýlí do jiných směrů, než byl původní směr chodu paprsků ze zdroje. Rozptyl nastává jak v objemu, tak na povrchu papíru, nicméně popis těchto případů by byl velmi složitý s ohledem na složitější strukturu kancelářského papíru. Pokud posvítíme na kancelářský bílý papír zezadu např. červeným laserovým ukazovátkem, uvidíme zepředu v místě dopadu laserového paprsku jasnou stopu. Tato stopa bude velmi dobře patrná, i když

se na plochu papíru podíváme z velmi šikmého úhlu. Tzn. na povrchu kancelářského papíru se světlo po průchodu rozptyluje prakticky do všech směrů daného poloprostoru. V prvním přiblížení můžeme pro velmi šikmé úhly jeho intenzitu považovat za konstantu I_{bg} . Do této konstanty pak v principu můžeme zahrnout případné světelné pozadí (background).

Zmínili jsme nejvýznamnější jevy a příspěvky k měřenému signálu. Zbývá dořešit geometrii úlohy, jak se změní intenzita světla $I(\alpha)$ při naklonění kancelářského papíru o úhel α . Očekáváme, že pro kolmý dopad ($\alpha = 0$) naměříme právě maximální možnou intenzitu $I(0) = I_{max}$, pro niž platí Lambertův-Beerův zákon výše. Tento zákon použijeme díky předpokladům homogenity a izotropie i v případě náklonu papíru o úhel α , kdy přímý paprsek ze zdroje prochází efektivně silnější vrstvou materiálu papíru. Pro efektivní tloušťku pak z geometrie platí $d(\alpha) = d/\cos\alpha$. Tloušťku papíru d i počáteční (vstupní) intenzitu světla I_0 jsme zavedli výše, proto můžeme zapsat Lambertův-Beerův zákon pro námi zkoumanou závislost

$$I(\alpha) = I_0 e^{-\kappa d(\alpha)}.$$

Nyní můžeme zformulovat modelovou funkci, kterou se pokusíme proložit experimentální body změřené závislosti $I(\alpha)$.

$$I(\alpha) = I_0 e^{-\kappa d/\cos\alpha} + I_{bg} = I_0 \left(e^{-\kappa d} \right)^{1/\cos\alpha} + I_{bg} = I_0 K^{1/\cos\alpha} + I_{bg}.$$

K měřenému signálu tedy přispívá zeslabená světelná intenzita ze zdroje kvůli absorpci v materiálu a dále intenzita světla rozptýleného povrchem papíru, které vstupuje do detektoru z větší plochy papíru, je-li tento papír nakloněn zejména pod většími úhly, příp. z pozadí. Budeme měnit úhel náklonu papíru α , změříme příslušnou intenzitu zeslabeného světla $I(\alpha)$ a koeficienty I , K a I_{bg} získáme proložením experimentálních bodů modelovou funkcí. Pokud bychom neměli jistotu v odečítání úhlu α , pak bychom mohli ještě přidat počátek odečítání úhlu, tzn. kosinus by měl argument $\alpha - \alpha_0$.

Experiment

Pomůcky: kancelářský papír „office paper 80 g · m⁻²“; souprava ISES připojená k PC, modul optická závora (obsahuje fotodetektor a zdroj – IR dioda); dvakrát laboratorní stojan a svorka (jeden drží optickou závoru, druhý rovný proužek kancelářského papíru a ukazatel k odečítání úhlu náklonu), kartón pro vyznačení úhlu náklonu, izolepa, propiska. Rovnost vzorku papíru můžeme zajistit ohnutím podél delšího okraje a následnou kontrolou rovinnosti.

Podmínky: vzdálenost vysílače a fotodetektoru optické závory: 27 mm, teplota: 24 °C; měření v zatemněné místnosti (pozadí zanedbatelné).

Postup měření: Nastavíme velký úhel (jak nám dovolí délka optické závory), kdy máme nejmenší signál, a vyznačíme polohu ukazatele úhlu natočení na kartónu. Vzorek kancelářského papíru je vždy umístěn uprostřed mezi vysílačem a detektorem optické závory. Dále zmenšujeme úhel α a po ustálení signálu zaznameneáme polohu ukazatele na kartón – opakujeme do kolmé polohy vzorku papíru vůči ose optické závory. Ideálně změříme aspoň 10 bodů závislosti $I(\alpha)$.

Zpracování a výsledky měření: Zde jsme si tedy nepřipravili předem žádnou úhlovou stupnici, ale zaznamenali jsme všechny měřené polohy (sklony) papíru. Tento úhel sklonu α můžeme vyhodnotit z našich rysek na kartónu např. pomocí triangulace – použití věty kosinové. Příslušnou intenzitu světla měřenou detektorem odečítáme z grafu v ovládacím programu soupravy ISES, samozřejmě s odhadem možné chyby měření. Výsledky jsou uvedeny v tabulce, intenzita světla je uvedena v relativních jednotkách.

Tab. Naměřená data

α [°]	α [rad]	$I(\alpha)$	Chyba $I(\alpha)$
66,3	1,157	0,07	0,01
64,8	1,132	0,08	0,01
62,8	1,097	0,09	0,01
60,5	1,056	0,10	0,01
57,9	1,011	0,11	0,01
54,5	0,952	0,14	0,01
50,7	0,886	0,16	0,01
46,6	0,813	0,18	0,01
42,3	0,738	0,22	0,01
35,9	0,627	0,26	0,01
30,9	0,538	0,30	0,01
25,8	0,450	0,33	0,01
20,0	0,349	0,36	0,01
14,6	0,254	0,39	0,01
9,1	0,160	0,41	0,01
0,0	0,000	0,42	–

Pro grafické zpracování v programu gnuplot použijeme zejména tyto příkazy (za úhel dosazujeme hodnoty z druhého sloupce v radiánech):

```
I(x)=I0*K**(1/cos(x))+Ibg
fit I(x) 'data.txt' using 2:3 via I0,K,Ibg
plot I(x), 'data.txt' using 2:3:4 with yerrorbars
```

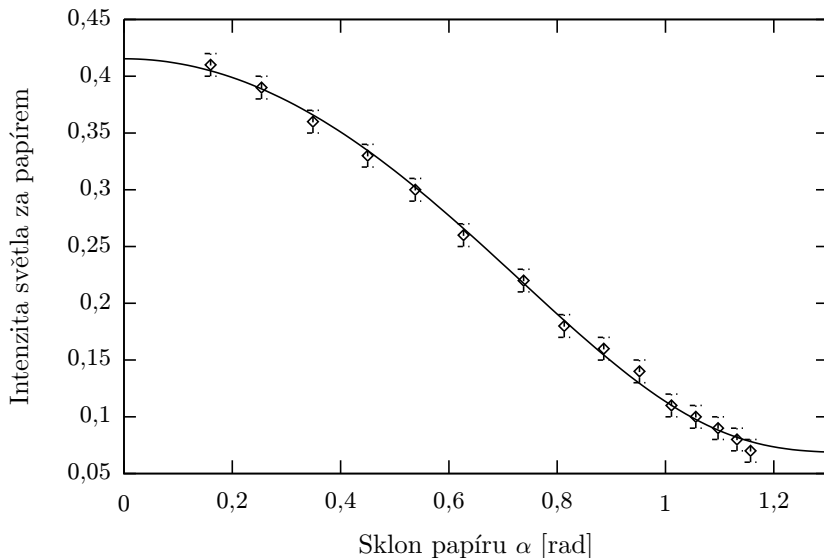
Výstup příkazu fit:

```
I0 = 3.82714 +/- 0.3289 (8.595%)
K = 0.0906561 +/- 0.008188 (9.032%)
Ibg = 0.0684463 +/- 0.004129 (6.033%)
```

Z grafu je patrné, že všechny experimentální body jsou v souladu s teoretickou závislostí, tedy zvolili jsme vhodnou modelovou funkci a učiněné předpoklady byly oprávněné. Případné větší odchylky lze snadno zdůvodnit lokální neplatností předpokladů, zejména homogenity a izotropie, příp. větším rozptylem na povrchu papíru do určitého směru. Z výstupu příkazu fit dále vidíme, že intenzita světla na vstupu je asi $(3,8 \pm 0,4)$ a intenzita světla od pozadí (resp. rozptylu při velkých úhlech sklonu) je $(0,068 \pm 0,004)$, obojí v relativních jednotkách. Z bezrozměrného koeficientu K bychom se znalostí tloušťky papíru mohli určit absorpční koeficient κ .

Závěr

Proměřili jsme závislost intenzity prošlého světla kancelářským papírem v závislosti na úhlu náklonu papíru a navrhli jsme modelovou funkci, která je v dobrém souladu s experimentálními daty. Měření je však zatíženo většími chybami výsledných parametrů a příp. většími odchylkami od teoretických hodnot pravděpodobně z důvodu lokálního porušení zjednodušujících předpokladů.



Obr. 27. Graf závislosti $I(\alpha)$ s naměřenými hodnotami

Poznámky k došlým řešením

Někteří řešitelé přišli se zajímavými nápady, jak měření realizovat (použití laseru – dobře definovaný světelný svazek, použití fotovoltaického článku jako detektoru s předpokladem jeho linearitu). Bohužel se však objevily hrubé chyby v odvození správného tvaru modelové funkce (úpravy výrazů pomocí základních vztahů pro mocniny): mnozí uvažovali násobení/dělení faktorem $\cos \alpha$, avšak jak jsme odvodili, tento faktor se vyskytuje v exponentu mocninné funkce! Dalším kamenem úrazu bylo správné používání veličin $I(\alpha)$, I_0 a I_{\max} , resp. úvahy o nich. Bohužel nikdo si nevzpomněl na příspěvek pozadí, resp. neuvědomil si příspěvek rozptýleného světla pro více šikmé úhly sklonu papíru. Proto mnohým nemohl program gnuplot optimálně proložit vaše experimentálně zjištěné body.

Úloha IV . E ... vejce sebevrah

Z jaké nejvyšší výšky můžete shodit obyčejné slepičí vajíčko na tvrdou podlahu, aniž by se nakráplo? Co když vajíčko natěsno obalíme nějakým měkkým obalovým materiálem (tj. papír, bublinková folie apod.) s tloušťkou nejvýše 5 mm? Z kolikrát vyšší výšky ho pak můžeme pustit, aniž by se nějak viditelně poškodilo? Vyzkoušejte několik různých obalů.

Měřili jsme pád vajíčka na tvrdou podložku pro různé obalové materiály. Vajíčko dopadalo buď na špičku, patku, nebo na bok.

Teorie

Popsat teoreticky deformaci vejce je velmi složité, zvláště kvůli variabilitě vajec. Pokud bychom se vůbec dopočítali k nějakému kvantitativnímu výsledku, pak by se kvůli všem možným aproximacím stejně neshodoval s praxí.

Intuitivně bychom řekli, že bude rozdíl při pádu vajec obalených daným materiálem a pádem vajec dopadajících na podložku ze stejného materiálu. Popsat tuto situaci teoreticky je opět velmi náročný úkol. Proto raději zůstaneme nohama na zemi a zachováme pragmatický pohled na náš problém.

Tedy jsme měřili rozbitnou výšku h , což je vzdálenost nejbližšího bodu vejce k podložce (mezní výška, ze které se vejce při pádu již rozbije) a tloušťku obalového materiálu d . To, že vejce obalené nějakým materiálem může spadnout z větší výšky než vajíčko samotné, vás jistě nepřekvapí. Asi vás nepřekvapí ani to, že vítězem mezi obaly je bublinková fólie. Pokud bychom ovšem porovnávali tloušťku obalovacího materiálu s naměřenou výškou, pak se do vedení dostane třívrstvý balónek.

Postup měření

Měřicí soustava se skládala z vodorovné podložky a na ní kolmého měřicího pravítka s nejmenším dílkem 1 mm.

Pro každé vajíčko se začalo na odhadnuté výšce takové, že se při pádu z ní vajíčko ještě nerozbilo. Výška se postupně zvyšovala až na rozbitnou výšku h .

Výsledky

V rámci chyby je prokazatelné, že vajíčko dopadající na patku resp. špičku vydrží pád z větší výšky. To lze vysvětlit prostým rozbořením sil na vajíčko působících v okamžiku dotyku s podložkou. Podobného efektu se dříve používalo při stavbě budov, vzpomeňte na klenuté stropy historických chrámů a katedrál.

Dále jsme zkoušeli zjistit, zdali je rozdíl v pádu vejce obaleného v daném materiálu a vejcem, které holé dopadá na podložku z onoho materiálu. Jisté odchylky zde byly (konkrétně vejce obalené se jevílo býti pevnější), ale v rámci velké chyby měření, je tento závěr neprokazatelný.

Tabulka naměřených dat

	d_{obal} [mm]	h_{patka} [cm]	$h_{\text{špička}}$ [cm]	h_{bok} [cm]
Holé vajíčko	0	$1,2 \pm 0,3$	$1,4 \pm 0,3$	$0,7 \pm 0,4$
Potravinářská folie	3–4	$2,9 \pm 0,2$	$2,7 \pm 0,3$	$1,9 \pm 0,3$
3 vrstvý balónek	1–2	$4,4 \pm 0,2$	$4,3 \pm 0,2$	$3,8 \pm 0,4$
Noviny	3–4	$3,2 \pm 0,3$	$2,9 \pm 0,2$	$2,5 \pm 0,3$
Toaletní papír	3–4	$3,5 \pm 0,2$	$3,2 \pm 0,3$	$3,0 \pm 0,3$
Bublinková folie	3–5	$5,1 \pm 0,3$	$4,6 \pm 0,3$	$3,9 \pm 0,3$

Diskuse

Již několikrát zmiňovaná velká chyba je způsobená převážně malou přípustnou výškou. Měření by také bylo možné řešit porovnáváním časů pádu jednotlivých vajec (příčemž bychom jako počáteční výšku brali bod na vejci, který se nachází nejbližší podložce). Leč to možná vypadá nadějně, tak při pádu z takto malé výšky bychom vlivem nepřesnosti vyhodnocování naměřených času neměřili vůbec nic.

Další nepřesnost nám přináší samotná nepravidelnost vajíček. Jak již zmiňovaná tvarová, pak také různá tloušťka stěny vajec a nepochybně i jejich vnitřní nehomogenita. Další nepřesnosti vnáší určení výšky h , která je rovněž ovlivněna tvarem jednotlivých vajec.

Chyby u naměřených hodnot jsou možná překvapivě veliké, přesnost určení výšky pádu jsme odhadli na 0,2 cm. Chyba se nám nepodařila zmenšit ani obrovským množstvím naměřených hodnot a tedy i rozbitých vajec.

Závěr

Naměřené hodnoty si můžete prohlédnout v tabulce výše. Měřením jsme ověřili předpokládanou korelaci mezi tloušťkou obalové vrstvy a rozbitnou výškou. Rozdíl mezi obalením vejce a materiálem podložky se ověřit nepodařilo.

Poznámky k došlým řešením

Různorodost hodnot, které jste naměřili, nás poměrně překvapila. Tento rozptyl může být způsoben nestejnou kvalitou vajec. Například řešitelé mající vajíčka od domácích slepic naměřili průkazně větší rozbitnou výšku.

Doufáme, že se vám po měření experimentální úlohy nezvýšila hladina cholesterolu, ať při následné konzumaci rozbitých vajec, nebo při zpracování naměřených hodnot.

Úloha V.E ... strunatci

Vytvořte si zařízení, na kterém bude moci být upevněna struna (či gumička) s proměnlivou délkou tak, že bude napínána stále stejnou silou. Prozkoumejte, jak se mění hlavní frekvence vydávané strunou (či gumičkou) v závislosti na délce struny. Na zpracování zvuku můžete použít například program Audacity.

Teorie

Příčné vlny se šíří v napjaté struně přibližně rychlostí

$$v = \sqrt{\frac{\sigma}{\varrho}},$$

kde σ je napětí ve struně a ϱ je hustota materiálu struny. Vzhledem k tomu, že napjatá gumička je podobná struně, můžeme aplikovat tento vzoreček i na náš experiment.

Jsou dvě možnosti, jak podle zadání zatížit gumičku. Buď tak, že máme zatíženou stále stejnou délkou pružiny, ale měníme délkou, na které pružina vibruje (např. pomocí kladky), nebo zatěžujeme pouze délkou, na které pružina vibruje, a jenom nezbytně krátký úsek pro zavěšení přes kladku. V obou případech ovšem, při použití stejné hmotnosti závaží, mělo být napětí v gumičce stejné, protože to závisí pouze na hmotnosti a na průřezu gumičky, který považujeme za konstantní. Označme délkou mezi upevněním gumičky a vrchem kladky, přes kterou je zavěšené závaží, jako l .

Frekvence f_k , které se brnknutím na gumičku vybudí, budou odpovídat vlnovým délkám λ_k a rychlosti šíření vln v materiálu vztahem

$$f_k = \frac{v}{\lambda_k},$$

kde f_k označuje k -tou harmonickou frekvenci. Vlnové délky vypočteme z předpokladu, že na okrajích, kde je gumička upevněná, bude nulová výchylka v každém čase a bude tam tedy uzel. Z toho vyplývá, že se do kmitající délky pružiny l musí vejít celočíselný počet půlvln.

$$l = k \frac{\lambda_k}{2}.$$

Z toho pak pro frekvence vyplývá celkový vztah

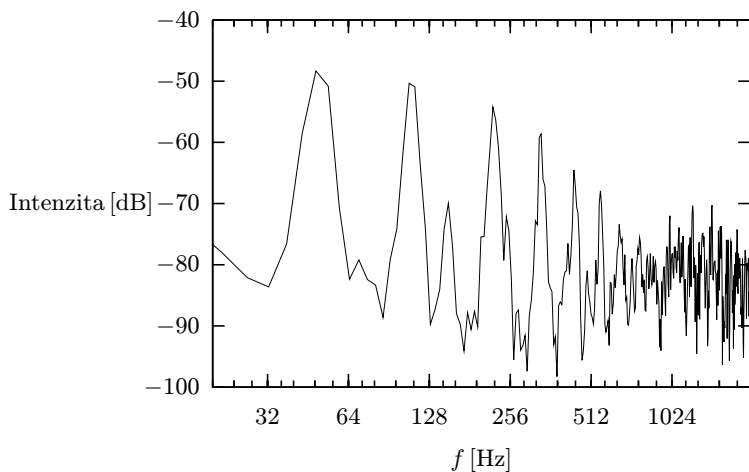
$$f_k = \sqrt{\frac{\sigma}{\varrho}} \frac{1}{\lambda_k} = \sqrt{\frac{\sigma}{\varrho}} \frac{k}{2l} = v \frac{k}{2l},$$

kde $v/2$ je konstanta, kterou budeme fitovat ve zpracování měření.

Postup měření

Při měření byla využita kladka, jak již bylo zmíněno v teorii. Pro co nejlepší určení délky gumičky byla použita co nejmenší kladka s poloměrem 1,0 cm. Pro všechna měření byla použita jedna obyčejná kancelářská gumička. Závaží, kterým byla zatížena, mělo hmotnost $m = 200$ g. Nejprve byla gumička na jedné straně upevněna a na druhé straně bylo přes kladku zavěšeno volně závaží. Pak byla kladka zafixována, aby se v průběhu kmitů gumičky příliš nepohybovala. Měření délky probíhala pomocí obyčejného pravítka s dílkou po 1 mm, ale vzhledem k tomu, že místo upevnění gumičky a místo vrchu kladky není zcela přesně určující části pružiny, na které pružiny kmitá, bereme chybu měření jako 0,5 cm.

Zvuk gumičky byl měřen pomocí mikrofonu připojeného na počítač a zvuk byl zaznamenáván pomocí programu Audacity, kde posléze probíhala spektrální analýza zvuku. Vždy bylo naměřeno více brnknutí, z nichž pak 3 byla analyzována. Zaznamenány byly první nejvýraznější frekvence vyšší než cca 100 Hz, protože mikrofony v oblasti nízkých frekvencí nejsou příliš přesné a hlavně protože okolo 50 Hz se objevoval zvuk, který jednak nezávisel na délce l , navíc se vždy objevoval i v oblastech záznamu zvuku, kde nebylo na gumičku brnkáno a nejpádnejším argumentem je, že právě tato frekvence je v elektrické síti a proto se má může objevit relativně pravděpodobně jako šum.



Obr. 28. Ukázka spektrální analýzy zvuku pro nastavení $l = 24$ cm při délce gumičky 41 cm

Na obrázku 28 můžete vidět ukázkou spektrální analýzy zvuku v Audacity. Zvolili jsme velikost okna 8192 vzorků, protože při nižších hodnotách jsme nedosahovali dostatečného frekvenčního rozlišení (nakonec bylo zhruba 2 Hz). Logaritmickou stupnicí jsme použili z důvodů jednoduššího odečítání hodnot.

Při každém nastavení délky byly vybrány tři brnknutí a z odečtených hodnot frekvencí, které si odpovídaly, byl vypočten aritmetický průměr.

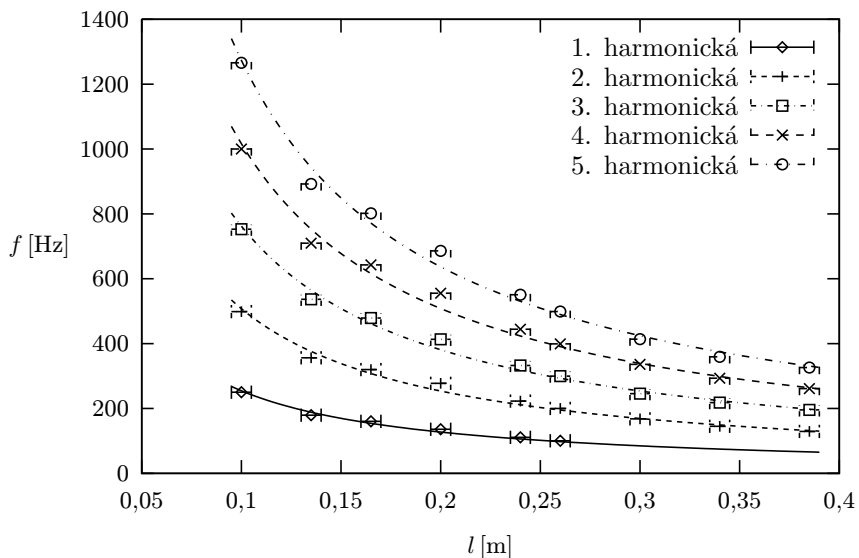
Výsledky

Naměřená data pro gumičku, kde bylo zavěšeno závaží ve vzdálenosti 41 cm od upevnění, jsou v grafu 29 a data pro závaží upevněné za kladkou jsou v grafu 30. V obou grafech jsou nafitované frekvence přes parametr rychlosti, který považujeme za neznámý. Většinou bylo měřeno prvních 5 frekvencí, které byly přibližně celočíselným násobkem první frekvence (resp. 1, 2, 3, 4 a 5násobkem), z čehož můžeme usuzovat, že se opravdu jedná o prvních pět harmonických frekvencí vydávaných gumičkou. Všechny nafitované závislosti odpovídají (podle výpočtu metodou nejmenších čtverců v Gnuplotu) s odchylkou menší než 2% nepřímo úměrné závislosti frekvence na délce l .

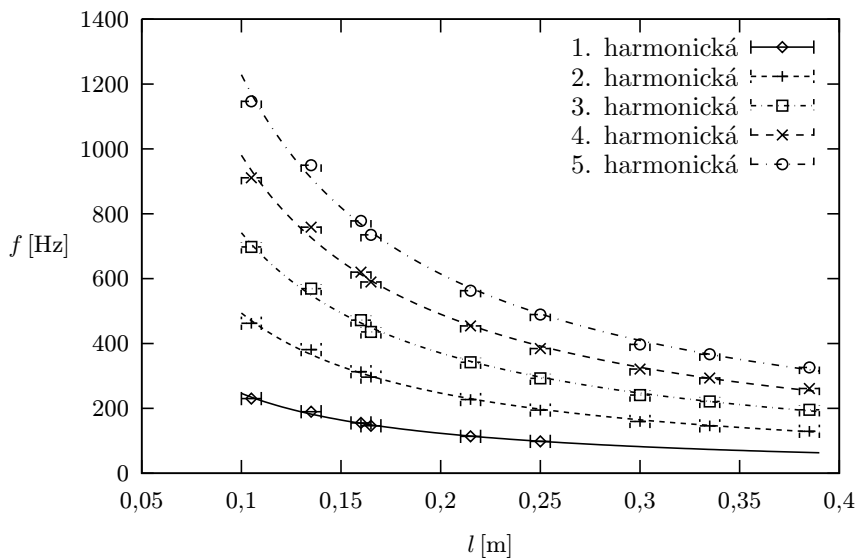
Tabulka nafitovaných hodnot rychlostí šíření zvukových vln v gumičce

harmonická	v_k [ms^{-1}]	v_n [ms^{-1}]
1.	50,9	49,3
2.	50,8	49,4
3.	50,8	49,4
4.	50,8	49,0
5.	50,9	49,2

V tabulce můžete vidět hodnoty nafitovaných rychlostí. Jako v_k je označen tento parametr u měření s konstantní délkou napnuté gumičky, kdežto v_n je pro nekonstantní délku gumičky. Je vidět, že u fitů v rámci jednoho grafu vychází prakticky stejná hodnota a pokud srovnáme obě dvě metody, tak se hodnoty liší jenom zhruba o 3%, což potvrzuje teorii, že by měly být frekvenční závislosti stejné u obou metod.



Obr. 29. Graf závislosti frekvencí vydávaných gumičkou konstantní délky v závislosti na vzdálenosti l



Obr. 30. Graf závislosti frekvencí vydávaných gumičkou s upravovanou délkou (závaží upevněno těsně za kladkou)

Diskuze

Měření mohlo jednak ovlivnit nepřesné určení délky gumičky, ve které vznikal zvuk, protože kvůli použití kladky nebylo přesně definované místo upevnění.

Další možná chyba mohla vzniknout už kvůli způsobu záznamu zvuku, protože mikrofon je směrový a zaznamenával tak více zvuk z určité oblasti gumičky. Další vliv mikrofonu je takový, že je potřeba, aby v místě detekce zvuku byla kmitna nebo alespoň aby se nenacházel v oblasti uzlu, protože v uzlu není mikrofon schopný měřit (takřkajíc – nic neslyší). Podobný vliv by mohlo mít i to, na kterém místě byla gumička rozkmitaná, protože by se mohlo stát, že některé frekvence by byly utlumené, ale protože byla rozkmitávaná prsty, tak prakticky vždy se vybudily všechny frekvence.

Je také možné, že síla nebyla přesně určená závažím, vzhledem k tomu, že gumička byla po zatížení zafixována upevněním kladky, ale na druhou stranu by nejspíše chyba byla větší, pokud by kladka byla volná a mohla by sama kmitat. Pak bychom nejspíše generovali i jiné zvukové frekvence a ty, které jsme chtěli pozorovat, by byly posunuté/rozmazané.

Vzhledem k tomu, že gumička byla relativně dost zatížena, měření mohlo být ovlivněno i trvalou změnou jejích fyzikálních vlastností v průběhu měření.

Závěr

Ověřili jsme, že frekvence vydávané gumičkou jsou nepřímou úměrné délce gumičky mezi upevněním a kladkou. Také jsme pozorovali prvních 5 harmonických frekvencí a z naměřených hodnot jsme přibližně určili rychlost šíření příčných vln v gumičce.

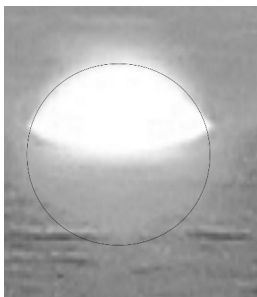
Úloha VI. E ... zeměplocha

Vymyslete co nejvíce způsobů, jak ověřit předpoklad o kulatosti Země. Pokud zjistíte, že je Země opravdu kulatá, dokázali byste určit i její poloměr?

Odraz Slunce na hladině jezera

Důkaz toho, že Země není kulatá, nám poskytnete pouhá fotografie západu Slunce.²² Dokonce z ní dokážeme určit i horní odhad zemského poloměru. (Pokud ukážeme, že Země není placka, budeme předpokládat, že nemá žádný jiný tvar – krychle, válec atp. – nebylo by těžké pro každé, které vás napadne, najít argument, proč by takový tvar Země mít nemohla. Pokud vás žádný nenapadne, pak se klidně ozvěte a můžeme si o tom poslat pár mailů.)

Podívejte se na obrázek 31. Zde je zobrazen západ Slunce nad hladinou jezera. Slunce zde vidíme dvakrát – jednou skutečné Slunce a podruhé jeho odraz v hladině. Není jednoduché pořádit takovou fotografii – pokud se podíváte na většinu takových obrázků, odraz se „rozpije“ přes celou hladinu vlivem nerovností na hladině.



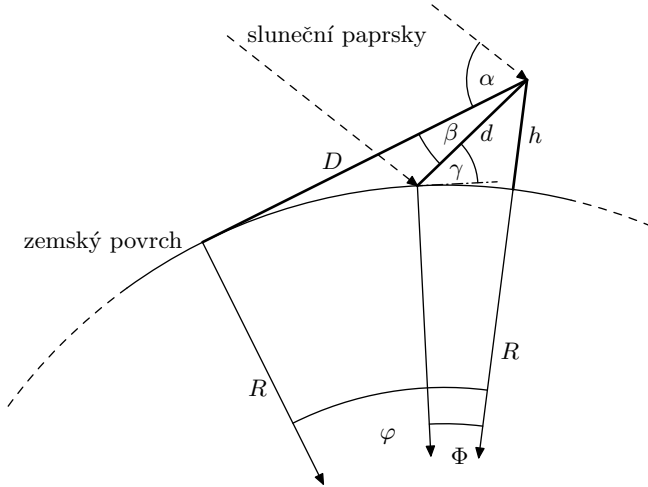
Obr. 31

Zde byla hladina jezera dostatečně klidná, takže pozorujeme odraz Slunce zmenšený. Při odečtení patřičných hodnot z obrázku 31 lze pomocí klasické geometrické optiky odhadnout poloměr Země. Hladina jezera se vlastně chová jako kulové zrcadlo o poloměru Země (kdyby Země byla placka, pozorovali bychom odraz nezmenšený); viz obrázek 32, který zároveň definuje veličiny potřebné pro výpočet:

- a) R – poloměr Země,
- b) h – výšku fotoaparátu nad hladinou vody,
- c) D – vzdálenost fotoaparátu od horizontu,
- d) φ – úhel příslušný vzdálenosti D ,
- e) d – vzdálenost místa odrazu a fotoaparátu,
- f) Φ – úhel příslušný vzdálenosti d ,

²²⁾ Tuto metodu navrhl a aplikoval Robert J. Vanderbei z Princetonské University. Všechny informace a fotografie jsou zde s jeho svolením.

- g) α – úhel svírající spojnice horizontu a pozorovatele se směrem paprsků Slunce,
 h) β – úhel svírající spojnicí horizontu a pozorovatele a spojnicí místa odrazu a pozorovatele,
 i) γ – úhel odrazu paprsku.



Obr. 32

Máme tedy devět neznámých veličin, které potřebujeme změřit. Veličinu h odhadneme hodnotou 2,135 m. Z fotografie určíme hodnoty úhlů α a β , přičemž velikost slunečního kotouče je přibližně $0,5^\circ$. Při větším rozlišení určíme z obrázku 31, že průměr Slunce je 76 dílů, vršek Slunce je 18 dílů nad horizontem a spodní část odrazu Slunce je 7 dílů pod horizontem. Pak tedy,

$$\alpha = \frac{18}{76} \cdot 0,5^\circ, \quad \beta = \frac{7}{76} \cdot 0,5^\circ.$$

Máme tedy už pouze šest neznámých. Zároveň ovšem také šest lineárně nezávislých rovnic snadno odvoditelných z obrázku 32,

$$\begin{aligned} \Phi + \gamma &= \varphi + \beta, \\ \alpha &= 2\gamma + \beta, \\ R \cos \Phi + d \sin (\Phi + \gamma) &= R + h, \\ R \sin \Phi - d \cos (\Phi + \gamma) &= 0, \\ R \cos \varphi + D \sin \varphi &= R + h, \\ R \sin \varphi - D \cos \varphi &= 0. \end{aligned}$$

Máme tedy systém šesti nelineárních rovnic o šesti neznámých. Numerické²³ řešení v programu Mathematica nese hodnotu

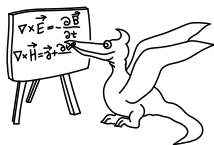
$$R = 5\,500 \text{ km}.$$

Pro $\beta < \alpha$, máme $\varphi > 0$ a tedy $R < \infty$. Pro $\beta = \alpha$ je $\varphi = 0$ a R směřuje k nekonečnu, tj. Země by se podobala placce.

Největší nepřesnost měření spočívá v umístění horizontu. Ohyb světla v atmosféře (refrakce) nemá na měření vliv, mění pouze zdánlivou polohu Slunce na obloze, která je pro měření nepodstatná – snímáme Slunce a jeho odraz na hladině, ale na tom přesně v jaké poloze měření nijak neovlivní.

Pokud bychom měli fotografii ve větším rozlišení, byli bychom schopni určit hodnotu poloměru přesněji. Nicméně pouhou fotografií jsme dokázali, že poloměr Země je konečný a přibližně jsme dokázali určit jeho hodnotu, což je podle mne v uvážení „náročnosti“ měření docela působivé.

²³⁾ Pro malé úhly je možné najít i aproximativní řešení, je však třeba nezanedbat ještě druhé mocniny rozvoje goniometrických funkcí. Numerické řešení je sice méně elegantní, avšak méně pracné a výslednou hodnotu dostaneme s uspokojivou přesností.



Seriál o komplexních číslech

FYKOSí seriál v tomto ročníku byl doplněn i videopřednáškami, které jsou k nalezení na internetu na serveru YouTube (<http://www.youtube.com/fykosak>).

Kapitola 0: Úvod

Komplexní čísla neskutečně zjednoduší problémy, které mají vnitřní stupeň volnosti (například fázi). Jejich výčet zahrnuje rovinné problémy v mechanice a elektromagnetismu, polarizaci v optice, stacionární stavy elektrických obvodů, spřažené oscilátory ve fyzice pevných látek, krystalografii. Kdekoliv se vyskytuje vlnění a kmitání, tam si zavedením komplexních čísel ušetříme práci, takže jiný přístup se dnes prakticky nepoužívá: Z obecného popisu vlnění vychází i popis kvantové mechaniky, které se věnoval seriál 20. ročníku. Bez komplexních čísel nelze řešit některé zvláštní problémy, třeba Onsagerovo řešení Isingova modelu ve statistické fyzice.

Pokud vám přišel tento výčet příliš abstraktní, zde jsou tři konkrétní příklady z FYKOSu: úloha smrtící kolotoč (23.IV.3), seriál o optice (23.IV), elektrický obvod (16.I.S).

Dosud jsme pod číslem rozuměli dvojici znaménka a velikosti. Nově pojem znaménka rozšíříme na fázi, takže číslem nově rozumíme dvojici fáze, velikost.²⁴

Komplexní čísla mají některé vlastnosti vektorů v rovině (sčítání). Liší se ale tím, že násobením dvou komplexních čísel dostaneme zase komplexní číslo, zatímco vektory v rovině umíme násobit skalárně nebo vektorově, ale vektor v rovině nevyjde nikdy. Dále uvidíme, že komplexní čísla jsou příjemnější v tom, že libovolný polynom $P_n(x)$ stupně n můžeme rozložit na součin lineárních polynomů. (Zatím to pro $P_2 = x^2 \pm 4$ umíme jen se záporným znaménkem, kdy $P_2(x) = (x+2)(x-2)$.) Obecněji lze říci, že kde metoda záležela na znaménku, bude se s komplexními čísly postupovat jednoduše.

Cardanovy vzorce a Bombelliho rovnice

V roce 1545 vyšel spis *Ars Magna*, kde Geralamo Cardano zkoumal kubickou rovnici $P_3(x) = 0$ a odhalil²⁵ její řešení:

$$P_3(x) = x^3 - 3px - 2q,$$

²⁴⁾ Podobně se dá postupovat i u matic: Každou nedegenerovanou matici \mathbf{C} můžeme rozložit na součin \mathbf{OP} pozitivně definitní matice \mathbf{P} a ortogonální matice \mathbf{O} , pokud prostě položíme $\mathbf{P} = \sqrt{\mathbf{C}\mathbf{C}^T}$ a \mathbf{O} aby to vyšlo. Pak nás existence komplexních čísel nepřekvapí, protože ta se chovají stejně jako matice 2×2 tvaru $a\mathbf{1} + \mathbf{C}$, kde a je reálné číslo a \mathbf{C} antisymetrická matice.

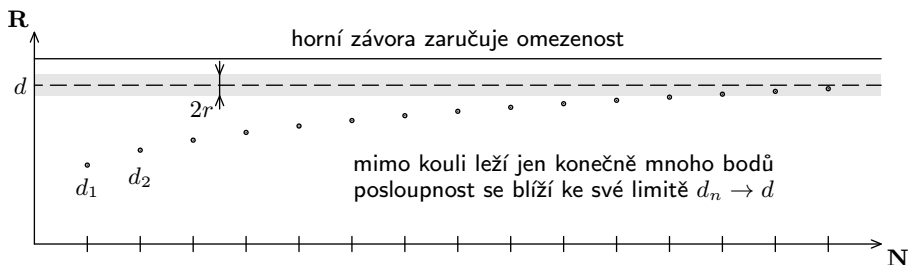
²⁵⁾ Zkuste si to sami: Dosadte za $x = (t + at^{-1})$, roznásobte a zvolte a tak, aby vám vyšla bkvadratická rovnice.

$$x_1 = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}. \quad (29)$$

O několik let později uvažoval Bombelli tuto rovnici pro $p = 5$, $q = 2$. Lze ověřit dosazením, že rovnici $P_3(x) = 0$ řeší $x = 4$. Ve formálním zápise řešení (29) vystupují odmocniny ze záporných čísel, jako to známe z kvadratické rovnice se záporným diskriminantem, ale řešení $x = 4$ je jistě reálné! Tento problém lze vyřešit právě zavedením komplexních čísel. Cardano se k podobným úvahám vyjádřil, že jsou „tak jemné, jako zbytečné“; asi proto, že mu scházela jasná geometrická představa. Před ní však několik přípravných poznámek.

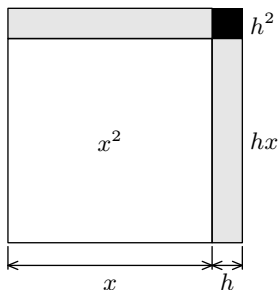
Představa blízkosti

Teď si osvojíme důležitý koncept blízkosti, zde si vystačíme s jednoduchou definicí. Slova *skoro všechny* body posloupnosti pro nás budou znamenat všechny body až možná na nějaký konečný počet bodů. Koule o poloměru r a středu S pro nás bude znamenat všechny body, které mají od středu vzdálenost menší než r . Potom řekneme, že se posloupnost blíží bodu S (limitě), pokud libovolná koule s tímto středem obsahuje skoro všechny body posloupnosti. Tuto skutečnost zapisujeme $d_n \rightarrow d$ pro $n \rightarrow \infty$ (obr. 33).



Obr. 33. Rostoucí omezená posloupnost má limitu

Reálná čísla \mathbb{R} se odlišují od zlomků \mathbb{Q} tím, že omezená a rostoucí posloupnost má automaticky limitu (věta o omezené a rostoucí posloupnosti). U této posloupnosti pak nemusíme ukazovat, že v libovolné kouli leží skoro všechny body; stačí pokud v ní leží aspoň jeden. U zlomků limita rostoucí a omezené posloupnosti existovat nemusí; stačí za posloupnost prohlásit desetinné rozvoje iracionálního čísla d do prvních n cifer. Tato posloupnost je rostoucí (přidáváme vždy další desetinné místo) a omezená právě číslem $d \notin \mathbb{Q}$, které je zároveň její limitou (tak se dají reálná čísla definovat) v reálných číslech. Posloupnost ale nemůže mít druhou, různou limitu, protože pak bychom sestrojili kolem obou limit koule, které se neprotínají. Skoro všechny body by musely ležet zároveň v jedné i ve druhé kouli. Protože ale koule mají prázdný průnik, není to možné.



Obr. 34. Roztažení plechu

Značení s malým o

Proč zavádět značení s malým o ? Ve fyzice nás většinou zajímá, jak se chovají jisté veličiny v malém okolí daného bodu (mluvili jsme též o kouli se středem v daném bodě). Ku příkladu nás může zajímat, jak se mění obsah čtverce, pokud o málo změním velikost jeho strany.

Ukažme si nejdříve na příkladu změny délky, obsahu a objemu, jak používat malé o . Mějme úsečku, čtverec resp. krychli se stranou délky x , kterou zvětšíme o h a budeme uvažovat, že h je malé vůči x (obr. 34). Pro jejich objemy platí

$$\begin{aligned} L &= x + h, \\ S &= (x + h)^2 = x^2 + 2xh + h^2 = x^2 + 2xh + o(h), \\ V &= (x + h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3h^2x + h^3 = x^3 + 3x^2h + o(h). \end{aligned} \quad (30)$$

Členy, ve kterých objem tělesa závisel na vyšší mocnině h než druhé, jsme zahrnuli do symbolu $o(h)$. Do jakého řádu budeme zanedbávat zkoumané veličiny závisí na samozřejmě na úloze, kterou řešíme; např. zjišťujeme-li potenciální energii matematického kyvadla, zajímá nás přinejmenším druhý řád; další nás zajímají při opravách na velké výchytky.

Nyní již přikročíme k řádné definici symbolu malé o . Řekneme-li, že pro nějakou veličinu platí $f(h) = o(h^n)$, znamená to

$$f(h) = o(h^n) \quad \Rightarrow \quad \frac{f(h)}{h^n} \rightarrow 0 \quad \text{pro} \quad h \rightarrow 0. \quad (31)$$

Aplikujeme tuto definici na vztahy uvedené výše pro objemy rozličných těles. Pro úsečku jsme uvažovali $0 = o(h)$. Pro čtverec $h^2 = o(h)$, ale dle definice (31) je $h^2/h = h \rightarrow 0$ z předpokladu. Stejnou úvahu můžeme provést pro krychli. Zkuste si zopakovat podobné úvahy pro kruh a kouli.

Bernoulliho limita

Kolem roku 1683 si Jacob Bernoulli položil otázku, zda má pro pevné $x \in (0, 1)$ posloupnost

$$B_N = \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N = 1 + x + \left(1 - \frac{1}{N}\right) \frac{x^2}{2!} + \left(1 - \frac{1}{N}\right) \left(1 - \frac{2}{N}\right) \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^N}{N^N}$$

limitu (rovnost ověřte roznásobením). Posloupnost je pro x z uvažovaného intervalu součet N kladných členů. Proto je ale určitě rostoucí, protože když zvětšíme N , zvětšují se i všechny členy typu $(1 - k/N)$ a navíc vždy jeden kladný člen přibude. Je také omezená, konkrétně číslem

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \\ &\leq 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1 - x}. \end{aligned} \quad (32)$$

Poslední rovnost se nazývá součet geometrické řady, a lze ji ověřit vynásobením obou stran $1 - x$ (pro $x \geq 1$ tato úvaha neplatí!). Podle věty o omezené a rostoucí posloupnosti má B_N limitu.²⁶ Protože B_N je rostoucí, není těžké si rozmyslet, že se blíží e^x . Bernoulliho limitou definujeme *exponenciálu*²⁷

$$e^x = \left(1 + \frac{x}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right) \right)^N, \quad N \rightarrow \infty.$$

Jistě lze funkci roznásobit

$$e^x e^y = \left(1 + \frac{x+y}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right) \right)^N = e^{x+y},$$

čimž jsme ověřili, že exponenciálu lze definovat i pro x záporná, položíme-li $y = -x$.

Kombinace malého o a exponenciály

Ukážeme ještě důležitý aproximativní vztah, který je zobecněním vztahů pro objemy těles (31). Platí

$$(1+x)^n = 1 + nx + o(x), \quad x \rightarrow 0.$$

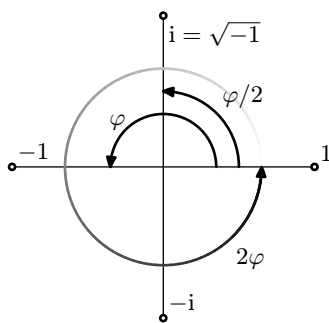
Pro n přirozené to je přímý důsledek binomické věty, viz (30), pro n záporné si pomůžeme rozvojem výrazu do geometrické řady

$$\left(\frac{1}{1+x} \right)^n = (1-x+o(x))^n = 1 - nx + o(x).$$

Zajímavé je, že tento vztah platí pro obecné, tedy i komplexní n . Chcete-li si jej ověřit, použijte identitu $z = \exp(\ln z)$ a $\exp(y) = 1 + y + o(y)$ pro $y \rightarrow 0$.

Výše uvedeného aproximativního vztahu můžeme například využít při výpočtu periody kmitání adiabatického oscilátoru, kde platí $p \sim F \sim x \sim V$ a $pV^\alpha = \text{konst.}$

Uvážíme-li malou výchytku a použijeme-li výše uvedený aproximativní vzorec, dostaneme pohybovou rovnici, která tvarem odpovídá rovnici harmonického oscilátoru. Proto můžeme již jednoduše vypočítat periodu.



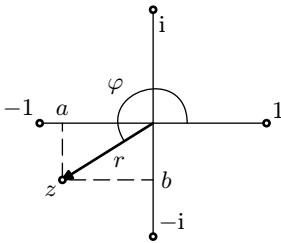
Obr. 35. Umocňování a odmocňování -1

²⁶⁾ Zkuste si přepsat $N = N^k$ ve vztahu pro B_N zdůvodnit, že totéž platí i pro $x \geq 1$. Naše zavedení Bernoulliho limitou funguje i pro komplexní čísla, ale důkazy jsou složitější.

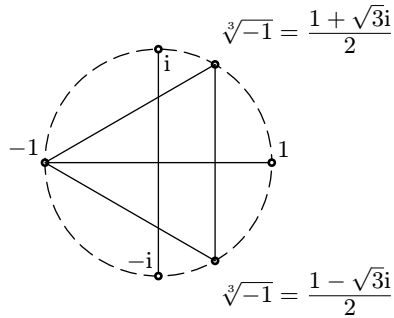
²⁷⁾ Exponenciálu lze zavést na libovolném lineárním prostoru s představou velikosti; obvykle se používá výraz (32). Nabízí se aplikace na matice nebo na operátor derivace, který odpovídá posunutí (stačí dosadit a vzorec se formálně shoduje s Taylorovým).

Kapitola 1: Geometrická představa

Pro motivaci uvažujme čísla -1 a $+1$: Zkoumejme jejich druhé mocniny. Druhá mocnina přenesle obě tato čísla do obrazu, který je $+1$ (obr. 35). Ze základních geometrických shodných zobrání známe následující: středová souměrnost, zrcadlení (osová souměrnost) a otočení. Pokud trváme na tom, že umocňování čísel, jejichž absolutní hodnota se rovná jedné (tzv. komplexních jednotek), koresponduje s nějakým shodným geometrickým zobráním,²⁸ musí to být otočení, které jedině podmínkami na obrazy ± 1 vyhovuje. Konkrétně u -1 o přímý úhel a u $+1$ o žádný úhel.



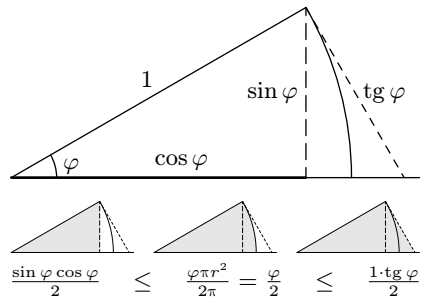
Obr. 36. Různá vyjádření čísla $z = \cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi} = a + bi$



Obr. 37. Třetí odmocnina z -1

Zbývá k tomu definovat inverzní operaci: Protože úhel se vždy zdvojnásobil, odpovídá odmocňování půlení úhlu. Definujeme i jako takové číslo, pro něž $i^2 = -1$. Nesmíme se divit, že jsme definovali něco, co nespadá pod reálná čísla; vždyť víme, že žádné reálné číslo nemá druhou mocninu zápornou! Naším argumentem o násobení nebo dělení úhlu bychom mohli postupovat pro libovolnou mocninu a zavádět další imaginární jednotky. Ty už ale lze vyjádřit pomocí námi zvoleného i . Například ověřte $\sqrt[3]{-8} = 1 + i\sqrt{3}$. Pro nově definovaná komplexní čísla, která jsou tvaru $a + bi$ platí stejná algebraická pravidla jako pro reálná čísla a představujeme si je jako body v komplexní rovině (obr. 36).

Každé komplexní číslo lze dostat jako obraz jednotky při geometrickém zobrání otočení a roztážení roviny. Tento poznatek použijeme ve druhém díle.



Obr. 38. Jednotková kružnice s goniometrickými funkcemi a nerovnost mezi obsahy

²⁸⁾ Libovolné shodné zobrání lze složit z otočení a zrcadlení.

Goniometrické funkce

Funkce \sin , \cos a tg zavedeme jako orientované vzdálenosti podle náčrtku jednotkové kružnice (obr. 38). Z nerovnosti obsahů trojúhelníků plyne

$$\frac{1}{2} \cos \varphi \cdot \sin \varphi \leq \frac{1}{2} \varphi \leq \frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi.$$

Úpravou a přechodem $\varphi \rightarrow 0$ zjistíme, že výraz $\sin \varphi / \varphi$ je sevřen jedničkami a sám se tedy blíží jedničce. Z toho vyplývá přibližná rovnost

$$\sin \varphi = \varphi + o(\varphi).$$

Nyní přijde na řadu součtový vzorec pro poloviční úhel. Jeho aplikací obdržíme rovnost

$$\frac{\cos \varphi - 1}{\varphi^2} = \frac{2 \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right)}{4 \left(\frac{\varphi}{2} \right)^2} = \frac{1}{2} + o(1).$$

V předchozích limitách pro \sin a \cos klidně pišme v malém o mocninu o řád vyšší, protože vyjadřovaná funkce je lichá, resp. sudá.

Násobení komplexních čísel

Každé komplexní číslo $z = a + bi$ lze přepsat do *goniometrického tvaru*

$$a + bi \equiv \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

kde jsme zavedli velikost čísla $r = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$ a orientovaný úhel $\varphi = \arctg(b/a) = \arg z$, které mají názornou geometrickou interpretaci v podobě polárních souřadnic místo původních kartézských (obr. 36).

Vynásobíme teď dvě komplexní jednotky $\arg(z_1) = \varphi_1$ a $\arg(z_2) = \varphi_2$ (pro obecná čísla by přibyl jen součin velikostí)

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i(\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2) = \\ &= \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2), \end{aligned}$$

kde jsme použili známé součtové vzorce, které jsou přímočarým důsledkem zavedení z náčrtku jednotkové kružnice. Náš postup je konzistentní s původní geometrickou představou v tom smyslu, že pro libovolné číslo n dostáváme z násobení dvou komplexních čísel *Moiurovu větu*

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

Eulerův vzorec

Moivrovu větu, poznatky o goniometrických funkcích a definici exponenciály zkombinujeme do *Eulerova vzorce*

$$\begin{aligned} \cos \varphi + i \sin \varphi &= \left(\cos \left(\frac{\varphi}{N} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{N} \right) \right)^N \\ &= \left(1 + i \frac{\varphi}{N} + o \left(\frac{1}{N} \right) \right)^N = e^{i\varphi}, \quad N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Přičtení nebo odečtení komplexně sdruženého výrazu vyjví komplexní vyjádření kosinu a sinu

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Úloha I. S ... komplexní rychlokvaška

- a) Uvědomte si, že n -té odmocniny z komplexní jednotky leží na n -úhelníku, a dořešte Bombelliho rovnici $x^3 - 15x - 4 = 0$. Náповědu naleznete v textu seriálu.
- b) Vyjádřete goniometrické součtové vzorce pomocí komplexních exponenciál.
- c) Ukažte oprávněnost zanedbání vyšších mocnin v odvození Bernoulliho limity, tj. že do závorky můžeme přidat člen $o(1/N)$.
- d) Použijte značení s malým o , abyste vyřešili úlohu, s jakou frekvencí kmitají body hmotnosti m po ose x v Yukawově potenciálu $ke^{x/\lambda}/x$ kolem rovnovážné polohy.
- e) Dokažte, že Čebyševovy polynomy $\cos(n \arccos x)$ jsou skutečně polynomy. Návod: Uvažujte komplexní jednotku z , která má reálnou část x . Pak se vyšetřovaný výraz rovná reálné části z^n , což musí být polynom, protože odmocniny a imaginární jednotky drží pospolu.

(6 bodů)

Kapitola 2: Derivace a harmonický oscilátor

Vzpomínky na exponenciálu

Ukažme si ještě jednu názornou drobnost k exponenciále. Jinými slovy provedeme grafický důkaz Eulerovy věty bez toho, aniž bychom museli znát vlastnosti goniometrických funkcí.

Označme $z = a + bi$ a využijme možnosti roznásobení, kterou jsme dokázali minule, tj. $e^z = e^a \cdot e^{bi}$. Druhý činitel definuje Bernoulliho limita $z_n = (1 + bi/n)^n$. Pro nějaké n si nakresleme náčrtek (obr. 39). Nejprve zjistíme velikost čísla

$$|z_n| = \left(1 + \frac{b^2}{n^2} \right)^{n/2} = \left(\left(1 + \frac{b^2}{n^2} \right)^{n^2} \right)^{1/2n} \rightarrow e^{b \cdot 0} = 1.$$

Pro $n \rightarrow \infty$ tedy leží z_n na jednotkové kružnici, stejně jako na ní leží všechna čísla $(1 + bi/n)^k$, kde $k < n$, protože ta mají menší velikost; v této posloupnosti se vždy

zvyšuje argument o konstantu (definice násobení) a čísla leží přibližně na jednotkové kružnici. Obvod takto vzniklého mnohoúhelníka je vždy b , ale podle právě dokázaného se mnohoúhelník blíží ke kružnici. Tedy číslo e^{bi} je právě komplexní jednotka, jejíž oblouk od jedničky v kladném směru měří b (tak je definován úhel v radiánech).

Závěr pro exponenciálu: Reálná část vzoru určuje velikost obrazu, zatímco argument obrazu určíme tak, že „namotáme“ imaginární složku vzoru na jednotkovou kružnici jako na kůl.

Pohyb v rovině

V předchozí kapitole jsme získali geometrickou představu komplexního čísla jako bodu v rovině. Nezapomínejme ale, že k této představě bodu v rovině jsme dospěli tak, že jsme konstruovali vzory jednotky na kladné reálné ose! Na komplexní čísla je proto často výhodnější pohled jako na zobrazení roviny samotné do sebe. (Exponenciální tvar komplexního čísla nám pak řekl, že tato zobrazení jsou složením otočení a roztahení.)

Odtud pramení i kouzelná vlastnost komplexních čísel: Nejsou to jenom šipky z počátku, ale zároveň podobná zobrazení na těchto šipkách.

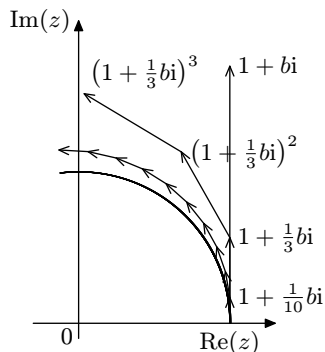
Uvažujme na chvilku trochu jiná zobrazení – shodná zobrazení roviny na sebe. Představme si mříž s roztečí ε v rovině (vodorovné a svislé přímky navzájem vzdálené o ε). Stojí za to uvést základní tvrzení, že otočení R_a této mříže kolem libovolného bodu roviny a je totéž jako otočení o stejný úhel kolem počátku $R_0 = e^{i\vartheta}$ a nějaké posunutí $T_a = a+$. To vyplývá z toho, že obrazovou souřadnicovou mříž lze na vzorovou mříž převést prostě posunutím obrazového počátku zpět do vzorového počátku a otočením, rovnoběžnost i vzdálenost mřížových přímek se totiž zachovávají. Samotné zobrazení R_a pak lze provést oklikou

$$R_a = T_a R_0 T_{-a},$$

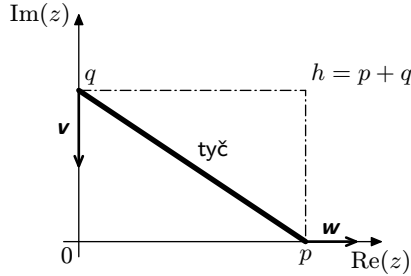
kde posunutí T_{-a} a T_a jsou navzájem inverzní, čili jejich složení dá dohromady jednotku $1 = T_{-a} T_a = T_a T_{-a}$. Dosazením konkrétního tvaru operátorů, např. $T_{-a} = -a+$ dostaneme

$$z' = a + (-a + z) e^{i\vartheta} = a - a e^{i\vartheta} + z e^{i\vartheta},$$

odkud vyplývá, že celou transformaci můžeme také psát $T_v R_0$, kde $v = a(1 - e^{i\vartheta})$. Naopak libovolnou kombinaci otočení R_0 a následného posunutí lze zapsat jako otočení kolem jednoho konkrétního bodu h (viz úloha). Tento bod se nazývá pól a v jednoduchých případech lze ho najít jako průsečík přímek kolmých na rychlost (obr. 40).



Obr. 39. Bernoulliho limita



Obr. 40. Padající tyč

Derivace

Derivace je strašné slovo a komplexní derivace ještě horší. Naštěstí právě opak je pravdou a komplexní derivace je velice jednoduchý koncept. Uvažujme komplexní funkci $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, pak ve vyšetřovaném bodě z_0 je derivace A , pokud

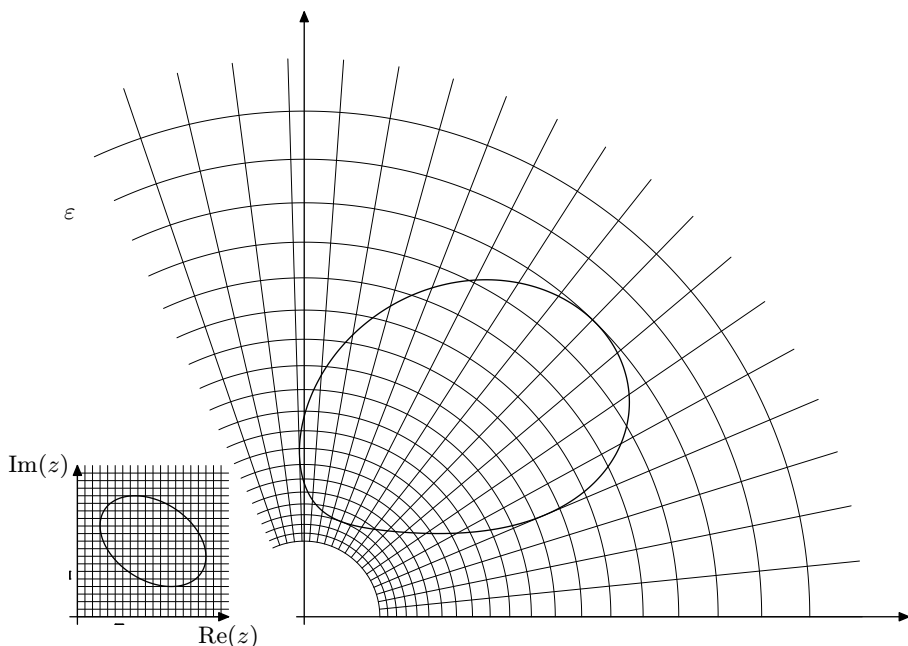
$$\Delta f = A\Delta z + o(\Delta z), \quad \Delta z \rightarrow 0, \quad (33)$$

kde $\Delta z = z - z_0$ je komplexní číslo mířící z vyšetřovaného bodu z_0 do jiného bodu z v okolí a $\Delta f = f(z) - f(z_0)$ odpovídá rozdílu funkčních hodnot. Definicí (33) budeme ekvivalentně zapisovat

$$df = A dx \Leftrightarrow A = \frac{df}{dx}$$

Je velice přísné žádat, aby tato podmínka platila pro všechny body na nějakém malém okolí vyšetřovaného bodu z_0 . Jinými slovy požadujeme, aby na malém okolí vyšetřovaného bodu šlo rozdíl funkčních hodnot psát jako součin nějaké komplexní konstanty A a rozdílu poloh dz . To ale znamená, že rozdíl funkčních hodnot je na uvažovaném okolí vždycky přibližně roven rozdílu poloh, který je vhodně potočen a roztažen! Násobení komplexním číslem je totiž zobrazení odpovídající otočení a roztažení; dále budeme mluvit o *kroutové vlastnosti* (angl. amplitwist, něm. Drehstreckung.)

Pro zajímavost si ukažme základní důsledky kroutové vlastnosti. Na okolí bodu z_0 , na kterém má funkce derivaci, uvažujme souřadnicovou čtvercovou mříž o malé rozteči ε (viz obr. 41). Pak podle kroutové vlastnosti bude obraz mříže na malém okolí bodu z_0 jiná čtvercová mříž, akorát roztažená a pootočená. Na větším okolí už čtverečky budou sice různě velké, ale podle kroutové vlastnosti zůstanou přibližně čtverečky.


 Obr. 41. Zobrazení mříže funkcí e^z

- a) Pro strany obrazového čtverce můžeme psát přibližně $f(z_0 + \varepsilon) - f(z_0) = f_x \varepsilon + o(\varepsilon)$ a $f(z_0 + \varepsilon i) - f(z_0) = f_y \varepsilon + o(\varepsilon)$, kde f_x a f_y jsou derivace funkce ve směru vodorovné a svislé osy. To znamená, že ve vztahu (33) se omezujeme na dz reálné nebo ryze imaginární. Podle krouživé vlastnosti však obraz čtverce musí být čtverec, takže ihned dostáváme *Cauchyho-Riemannovy podmínky*

$$f_y = if_x.$$

Pokud funkce nesplňuje ani tyto podmínky, nemá krouživou vlastnost a nemůže mít derivaci (jedná se například o funkce absolutní hodnota, reálná část).

- b) Uvažujme čtvereček o straně ε , který se zobrazí na jiný čtvereček. Spočítáme cirkulaci po obvodu toho malého čtverečku. Cirkulaci přitom rozumíme, že se sečteme u všech čtyř stran funkční hodnotu ve středu strany vynásobenou hranou jako komplexním číslem.²⁹ Například první hraně odpovídá přímo z definice derivace obraz $A\varepsilon$, další je vždy násobená i :

$$\text{Cirkulace} = A\varepsilon(f(z_1) - f(z_3)) + iA\varepsilon(f(z_2) - f(z_4)) = o(\varepsilon^2),$$

²⁹⁾ Cirkulace je užitečná, protože vystupuje ve fyzikálních rovnicích. Například u rychlosti vody odpovídá vírovosti funkce, tj. pokud bychom na hladinu položili malé pádélko, roztáčelo by se úměrně cirkulaci.

kde jsme využili definice derivace, že $f(z_1) - f(z_3) = A\varepsilon + o(\varepsilon)$ a $f(z_2) - f(z_4) = A\varepsilon + o(\varepsilon)$. Chceme-li vypočítat cirkulaci po nějaké uzavřené křivce je to to samé, jako bychom sečetli cirkulace přes všechny malé čtverečky uvnitř. Příspěvky uvnitř oblasti se vzájemně vyruší kvůli shodné orientaci sousedních čtverečků. Cirkulace okolo každého z nich je $o(\varepsilon^2)$, celkový počet čtverečků je úměrný ε^{-2} , protože jde o konečný rovinný problém. Bude-li síť dostatečně hustá, celková cirkulace pro křivku se rovná $o(\varepsilon^2)\varepsilon^{-2} = o(1) \rightarrow 0$. Se zmenšujícím se průměrem čtverečků tedy cirkulace po libovolné křivce, uvnitř níž má funkce derivaci, mizí. Toto tvrzení se nazývá *Cauchyho věta* a obvykle se zapisuje cirkulace zapisuje integrálem

$$\text{Cirkulace} = \oint_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

Tato dvě tvrzení lze použít při řešení parciálních diferenciálních rovnic v rovině, čemuž se budeme věnovat v příští kapitole.

Derivace základních funkcí

Derivace mocninných funkcí jsme odvodili v nulté kapitole, platí totiž $d(z^n) = nz^{n-1} dz$. Exponenciála se derivuje na sebe samu $d(e^z) = e^z dz$, jak vyplývá z použití vzorce pro mocninou funkci³⁰

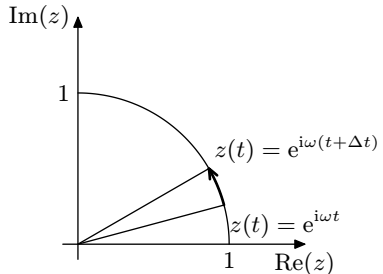
$$\frac{d\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n}{dz} = \frac{n\left(1 + \frac{z}{n}\right)^{n-1}}{n\left(1 + \frac{z}{n}\right)} \rightarrow \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \rightarrow e^z.$$

Ovšem pokud se spokojíme s komplexní exponenciálou $z(t) = e^{i\omega t}$ reálné proměnné t , má komplexní derivace mimořádně jednoduchou grafickou interpretaci.

Funkce $z(t)$ udává polohu a její derivace $\dot{z}(t)$ udává rychlost (obr. 42). Při derivování lineárního členu vypadne konstanta před t , takže rychlost se rovná poloze násobené $i\omega$ a rychlost je kolmá na polohu. Protože $|z| = 1$, pohybuje se sledovaný bod po jednotkové kružnici s úhlovou rychlostí ω . Podrobně byl tento případ probrán v úloze Smrtící kolotoč (IV.3 v XXIII. ročníku).

Ústřední důvod použití komplexní exponenciály je tedy ten, že pro monochromatické vlny $z(t) = re^{i\omega t}$ lze složité derivování nahradit prostým násobením:

$$\frac{d}{dt} = i\omega. \tag{34}$$



Obr. 42. Rovnoměrný pohyb po kružnici

³⁰⁾ Samozřejmě pro přehození limity a derivace musí být splněny jisté podmínky. Posloupnost musí být lokálně stejnoměrně konvergentní, což jsme ověřili v řešené úloze k předchozí kapitole seriálu.

Klíčem k obecnému řešení je fakt, že každou vlnu můžeme zapsat jako vhodný součet velkého množství monochromatických vln. K této identitě se ještě vrátíme, až budeme zavádět spektrum, které má řadu fyzikálních použití.

Harmonický oscilátor

Pro závaží hmotnosti m na pružince o tuhosti k plyne z Hookova zákona pohybová rovnice

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x,$$

Dvojí aplikací (34) na pravou stranu bychom pro případ, že kdyby bylo místo x komplexní z , dostali podmínku $\omega^2 = k/m$. Tomu odpovídá kladný a záporný kořen a řešení musí být tvaru součtu $z(t) = re^{i\omega t} + se^{-i\omega t}$. Ale co je proboha komplexní poloha u harmonického oscilátoru? Stačí si uvědomit, dvě komplexní čísla jsou si rovná, pokud se rovnají jejich reálné a imaginární části, a platí tedy třeba $x(t) = \text{Re}(z(t))$ pro vhodné konstanty r a s , které určíme ze znalosti počáteční polohy $r + s$ a počáteční rychlosti $\omega(r - s)$.

Teď přeznačíme proměnné, abychom ukázali trochu jiný pohled na věc, kterým se snadno řeší třeba vlnová rovnice. Stačí nám vzorec $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$, který platí pro A a B za předpokladu, že $AB = BA$ neboli $[AB] = 0$ (komutují). V našem případě jsou poloha $x(t)$ a hybnost $p(t) = m dx/dt$ funkce reálné proměnné a bodově násobené funkce samozřejmě komutují. Potom se energie rovná

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{(p + i\alpha x)(p - i\alpha x)}{2m},$$

kde $\alpha^2 = km$. Zjevně jsme tedy dostali výraz tvaru $E = z\bar{z}$, přičemž $z = p + i\alpha x$. Ze zákona zachování energie musí energie být konstantní, což lze snadno splnit, pokud $z = \text{konst.}$ Posunutím celého systému $x \mapsto x + x_0$, při kterém se hybnost nemění, lze zajistit $z = 0$, takže dostáváme rovnici

$$z = 0, \quad \frac{dx}{dt} = -i\omega x,$$

což je definiční rovnice exponenciály $z = re^{-i\omega t}$. Druhé nezávislé řešení $\bar{z} = se^{i\omega t}$ je komplexně sdružené; naše výsledky se shodují s předchozí částí.

Ve kvantové mechanice postupujeme úplně stejně, akorát místo funkcí času jsou x a p lineární zobrazení stavového prostoru na sebe (operátory). Tyto operátory ale na rozdíl od bodového násobení splňují komutační relace $[xp] = i\hbar \neq 0$, takže se za součinem $z\bar{z}$ objeví ještě jednotka, která stojí za tím, že vlastní stavy tvoří nekonečný „žebřík“ a z a \bar{z} se nazývají anihilační a kreační operátor, které posouvají o číslované stavy na nekonečném žebříku o jednotku dolů nebo nahoru.

Elektrické obvody

Ukažme si jednoduchou fyzikální aplikaci harmonického oscilátoru – střídavé elektrické obvody. Co znamená, že nějaký obvod má komplexní odpor?

Uvažujme elektrický obvod, ve kterém se nachází pouze cívky, kondenzátory a odpory. Nesporná výhoda těchto součástek je jejich linearita.

- a) Připojíme-li na rezistor dvakrát větší napětí, procházející proud bude také dvakrát větší:

$$U = RI, \quad (35)$$

kde U značí napětí, I proud a R odpor.

- b) Pokud na cívku připojíme dvakrát větší napětí protékající proud bude růst dvakrát rychleji. Konstanta, která svazuje napětí se změnou proudu se nazývá indukčnost L a platí

$$U = L \frac{dI}{dt}. \quad (36)$$

Na pravé straně se občas píše znaménko mínus, které vyjadřuje Lenzův zákon, že indukované napětí má opačný směr než změna proudu. My ale cívku považujeme za spotřebič, nikoliv zdroj napětí, a proto mínus nepíšeme.

- c) Pro kondenzátor o kapacitě C platí

$$I = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dU}{dt}. \quad (37)$$

K takovému obvodu připojíme střídavé napětí o úhlové frekvenci ω

$$U = U_0 e^{i\omega t}, \quad (38)$$

$$I = I_0 e^{i\omega t}, \quad (39)$$

kde U_0 a I_0 jsou komplexní konstanty.

Nyní byste se ale měli zděsit! Nebo snad už ne? Co je to komplexní napětí či proud? Správná odpověď je nic. Pokud budeme měřit napětí či proud, vždy změříme pouze reálnou složku. Je ale užitečné s ním počítat, protože změnu fáze pak zařídíme pouze vynásobením komplexní jednotkou.

Zavedení impedance

Podívejme se nyní, co se stane, pokud dosadíme (38) a (39) do rovnic (35) až (37). Označme $Z = U/I$ a řekněme této veličině impedance.

- a) Pro impedanci rezistoru platí

$$Z_R = R.$$

- b) Jak to je s impedancí cívky? Na pravé straně výrazu (36) se vyskytuje derivace a té se musíme zbavit; využijeme výše zmíněný fakt, že pro monochromatickou vlnu (zde harmonické napětí) přechází diferenciální rovnice na algebraické:

$$L \frac{dI}{dt} = L \frac{dI_0 e^{i\omega t}}{dt} = LI_0 i\omega e^{i\omega t} = LI i\omega.$$

Pro impedanci cívky proto platí

$$Z_L = \frac{U}{I} = i\omega L.$$

- c) Pro kondenzátor obdobným postupem získáme

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C}.$$

Velikost a fáze impedance

Podívejme se nyní, co znamená reálná a imaginární část impedance (kartézský tvar), resp. fáze a velikost (goniometrický tvar).

Vyjděme z definičního vztahu impedance $Z = U/I$. Vypočtěme velikost levé i pravé strany této rovnice.

$$|Z| = \left| \frac{U}{I} \right| = \frac{|U|}{|I|} = \frac{U_0}{I_0}.$$

Vhodnou volbou časového počátku zařídíme, aby U_0 bylo reálné. Dále platí $I = U/Z$, a proto fáze impedance udává zpoždění proudu vůči napětí. Platí stará poučka *Cívka je jako dívka: Nejdřív napětí, potom proud*.

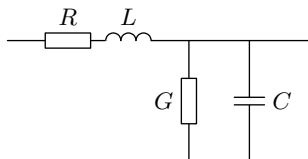
Ještě si odvodíme základní pravidla pro vzájemné řazení impedancí.

- Řadíme-li sériově, je stejně jako v případě odporů celkové napětí rovno součtu parciálních napětí, a proto se impedance sčítají.
- Pro paralelní řazení je celkový proud součtem parciálních proudů a sčítají se převrácené hodnoty impedancí.

Další metodou řešení užívanou převážně na střední škole je tzv. fázorová. Fázor totiž reprezentuje zmiňovanou amplitudu napětí resp. proudu a impedance je poměr komplexního čísla reprezentujícího napětí a proud.

Úloha II. S ... zakomplexovaná

- Po jaké trajektorii (polodii) se pohybuje pól při pohybu tyče padající v rohu? Vyřešte užitím komplexních čísel.
- Pro $\varepsilon \rightarrow 0$ uvažujte otočení o úhel ε , které zapisujeme R_ε , a posunutí T_ε . Vyšetřete a porovnejte zobrazení $R_\varepsilon T_\varepsilon R_{-\varepsilon} T_{-\varepsilon}$ a komutátor $[R_\varepsilon T_\varepsilon]$.
- Otočení jsme v úvodní poznámce poskládali z miniaturních otočení $e^{i\vartheta} = (1 + i\vartheta/N)^N$. Dokážete pomocí exponenciály zapsat také posunutí funkce?
- Nakreslete obrázek, na co funkce z^2 zobrazí mříž rozteče ε . Za bonus můžete nakreslit obraz mříže po funkci $\cos(z)$.
- Pomocí komplexních čísel vypočtěte impedanci střídavého obvodu série cívky, rezistoru a paralelně zapojeného kondenzátoru s odporem, přičemž obvod pokračuje iterativně dále (viz obr. 43).



Obr. 43. Koaxiální kabel

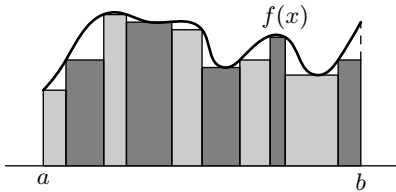
Kapitola 3: Použití holomorfních funkcí k řešení fyzikálních úloh

V této kapitole si ukážeme, k čemu můžeme využít Cauchy-Riemannovy podmínky ve fyzice. Budeme se zabývat hledáním elektrického pole v různých situacích, které jsme doposud nedokázali řešit, například elektrickým polem ve vodivém rohu.

Nebude však všechno tak růžové, jak se zatím zdá. Budeme vždy omezeni pouze na dvojrozměrné úlohy. Budeme proto u úloh z elektrostatiky předpokládat nezávislost parametrů úlohy na souřadnici z .

Co to je integrál?

Nyní se ještě budeme potřebovat seznámit s tím, co je integrál. To slovo zní strašně, ale skrývá se za ním jednoduchá myšlenka, a to vypočítat plochu pod grafem.



Obr. 44. Dolní Riemannův integrál

Chceme-li například vypočítat plochu pod grafem na obrázku, můžeme ji zdola odhadnout obsahem obdélníků širokých nejvýše ε (tomu říkáme dělení intervalu) a vysokých tak, aby se každý vešel pod graf funkce. Za hodnotu integrálu budeme považovat supremum³¹ přes všechna dělení tohoto intervalu. Této definici se říká dolní Riemannův integrál.

Analogicky definujeme horní Riemannův integrál, kde uvažujeme obsah obdélníků vyšších než graf funkce. Riemannův horní i dolní integrál existují vždy, ale rovnají se pouze pro funkce, které jsou spojité skoro všude.

Riemannova definice integrálu je jistě názorná, ale není moc příjemné, plochu pod křivkou z této definice počítat. Slavný Newton si integrál definoval jinak. Tvrdil, že integrál přes nějaký interval $\langle a, b \rangle$ je rozdíl hodnot primitivní funkce $F(x)$. Primitivní funkce je každá taková, jejíž derivace je původní funkce. Budeme užívat symboliku

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad \Leftrightarrow \quad F'(x) = f(x).$$

Celé integrování se redukuje na problém nalezení $F(x)$, pokud známe $f(x)$. Pro polynomy, exponenciálu a goniometrické funkce lze výsledek uhádnout ze znalosti derivace.

Ještě si ukážeme, že oba dva postupy integrace dávají pro spojité funkce stejný výsledek. Pro to stačí ukázat

$$\frac{d}{dx} \int_0^x f(t) dt = f(x).$$

³¹⁾ Supremum je nejmenší horní závora množiny (viz kapitola 0). Pro množiny v \mathbb{R} existuje vždy.

Tento výrok je podle naší definice derivace ekvivalentní

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = f(x)\Delta x + o(\Delta x).$$

Nicméně určitě najdeme takové Δx , aby se funkce $f(t)$ na intervalu $\langle x, x + \Delta x \rangle$ lišila od $f(x)$ nejvýše o $1/N$. Levá strana se bude pohybovat v rozmezí $f(x)\Delta x \pm 1/N\Delta x$, vydělením Δx a přechodem $N \rightarrow \infty$ lze docílit kýženého výsledku. Grafický význam spočívá v tom, že přírůstek obsahu pod grafem (integrálu) je přibližně obdélník o základně Δx a výšce $f(x)$, která zůstává v limitním procesu konstantní.

Křivky

V dalším uvažujeme křivku γ z bodu A_1 procházející body A_2, \dots, A_{n-1} a končící v bodě A_n , kterou značíme $\gamma = A_1A_2 \dots A_n$, podobně jako jsme značili úsečku.

V dalším uvažování se bude hodit koncept průmětu na křivku. Pro vektorové pole $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ a křivku γ rozumíme průmětem pole na křivku výraz

$$\int_{\gamma} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l},$$

kde $d\mathbf{l}$ je diferenciál posunutí po křivce. Analogicky definujeme průmět na normálu plochy výrazem

$$\int_{\Sigma} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S},$$

kde diferenciál plochy $d\mathbf{S}$ má směr vnější normály k povrchu. Typickým příkladem průmětu na křivku je cirkulace, kdy uvažujeme uzavřenou křivku (viz minulá kapitola). Průmět pole na normálu plochy se nazývá tok.

Zavedeme ještě alternativní notaci derivace. Tato notace je velmi výhodná, pokud derivujeme vektory. Budeme používat

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} \equiv E_{x,x}.$$

Obecně ty proměnné, podle kterých derivujeme, budeme nadále psát za čárku a indexy před čárku.

Základní rovnice elektrostatiky

Jako základní postulát elektrostatiky můžeme vzít jedno ze tří tvrzení:

a) Gaussův zákon, který říká

tok elektrického pole uzavřenou plochou $= \frac{1}{\epsilon_0}$ celkový náboj uvnitř této plochy .

Pomocí integrálu, který jsme právě definovali, to znamená

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Omega} \varrho dV, \quad (40)$$

kde Ω značí oblast,³² $\partial\Omega$ hranici této oblasti (uzavřená plocha), $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ průmět pole na diferenciál plochy a ϱ objemovou hustotu náboje.

- b) Dalším ekvivalentním postulátem elektrostatiky je Coulombův zákon. Ten nám přímo říká, jak velká je intenzita elektrického pole v konkrétním bodu prostoru

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{n},$$

kde r značí vzdálenost náboje q od místa pozorování a \mathbf{n} odpovídající směrový vektor³³ od náboje k pozorovateli.

- c) Gaussův zákon lze formulovat i v diferenciálním tvaru jako jednu z Maxwellových rovnic

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}. \quad (41)$$

Nám je nejbližší první a druhý výše uvedený koncept, budeme je proto výhradně dále využívat. V dalším výkladu se již striktně omezíme na rovinný problém.

Uvažujme nejprve úlohu, ve které se nebudou vyskytovat žádné zdroje. V našem případě to znamená, že v prostoru nebudou žádné volné náboje a celá úloha bude určena potenciály na vodičích. Za oblast Ω budeme uvažovat hranol výšky $2H$, který rovinu xy protíná kolmo ve čtverečku $\varepsilon \times \varepsilon$ (viz obr. 45 a 46). Z Gaussova zákona (40) dostáváme

$$0 = 2\varepsilon H \left(E_x(x - \frac{1}{2}\varepsilon, y) + E_y(x, y - \frac{1}{2}\varepsilon) - E_x(x + \frac{1}{2}\varepsilon, y) - E_y(x, y + \frac{1}{2}\varepsilon) \right).$$

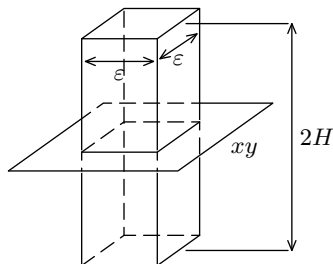
Vytkneme-li ještě ze závorky ε dostaneme

$$0 = E_{x,x}(x, y) + E_{y,y}(x, y), \quad (42)$$

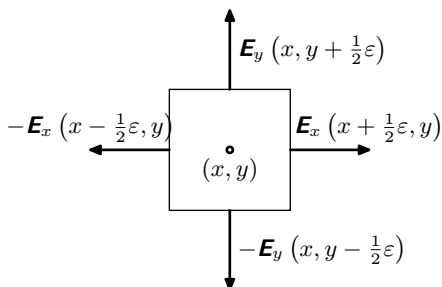
kde musíme používat parciální derivace, protože ty zajistí, aby druhá souřadnice zůstala při derivaci konstantní. Nyní jsme dostali bezbolestně vyjádření Maxwellovy rovnice (41).

³²⁾ Oblast zde definujeme jako jednoduše souvislou a otevřenou množinu. (To znamená, že každou uzavřenou křivku lze spojitě „stáhnout“ do jednoho bodu, resp. nemá v sobě díry.)

³³⁾ Proto má jednotkovou velikost.



Obr. 45. Aplikace Gaussova zákona



Obr. 46. Aplikace Gaussova zákona na čtvereček

Podívejme se ještě na zákon elektromagnetické indukce. Ten nám říká, jaké je napětí indukované na uzavřené křivce, pokud změníme tok magnetického pole jejím vnitřkem. Jako uzavřenou křivku budeme opět uvažovat čtvereček (obr. 47). Změna magnetického toku jeho vnitřkem musí být nulová, protože v elektrostatice neuvažujeme magnetické pole. Proto musí být nulové také indukované napětí

$$0 = \varepsilon \left(E_x(x, y + \frac{1}{2}\varepsilon) - E_y(x + \frac{1}{2}\varepsilon, y) - E_x(x, y - \frac{1}{2}\varepsilon) + E_y(x - \frac{1}{2}\varepsilon, y) \right),$$

Využijeme-li definice derivace z minulého dílu seriálu, dostáváme

$$0 = E_{x,y}(x, y) - E_{y,x}(x, y). \quad (43)$$

Zamysleme se nyní nad tím, jak vhodně použít holomorfní funkce k řešení tohoto problému.

Pokud jsou funkce

$$f(z) = E_y + iE_x \quad (44)$$

a

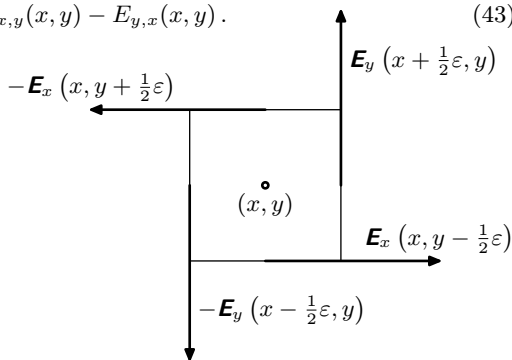
$$g(z) = if(z) = -E_x + iE_y$$

holomorfní, jsou rovnice (42)

a (43) splněny automaticky,

protože jsou jen přepisem Cauchyho-Riemannových podmínek pro funkci $f(z)$. Pro všechna z jsou $f(z)$ a $g(z)$ navzájem kolmé; dále zkoumáme jen $f(z)$.

Povedlo se nám splnit Maxwellovy rovnice pro elektrostatiku pouze volbou holomorfní funkce $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Tento tvar ale není ještě příliš vhodný pro řešení problémů, ve kterých známe okrajové podmínky, tj. potenciály na vodičích.³⁴



Obr. 47. Aplikace zákona elektromagnetické indukce

³⁴⁾ V elektrostatice rozlišujeme dvě prostředí: Jednak vakuum, ve kterém se budeme snažit určit potenciál, jednak vodiče, na kterých je potenciál zadaný.

Potenciál elektrostatického pole

Zavedme konečně potenciál elektrostatického pole φ tak, aby platilo

$$E_x(x, y) = -\varphi_{,x}, \quad E_y(x, y) = -\varphi_{,y}. \quad (45)$$

Reálnou funkci $\varphi(x, y)$ teď explicitně zkonstruujeme z vhodné komplexní funkce $w(z)$. Necht' O je pevně zvolený bod. Vypočteme-li integrál $f(z)$ po křivce $\gamma = OX$, dostaneme pro každý bod X komplexní číslo

$$w(X) = \int_{OX} f(z) dz.$$

Toto číslo je však určeno jednoznačně, nezávisle na volbě křivky. To lze nahlédnout jednoduše (důkaz sporem). Pro bod X uvažujme dvě křivky OX označené γ_1 a γ_2 takové, že

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz \neq \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

Protože obrácení průběhu křivky mění znaménko integrálu, platí

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{-\gamma_2} f(z) dz \neq 0$$

a integrál po uzavřené křivce OXO nevymizí. To ale zjevně odporuje Cauchyho větě z minulé kapitoly seriálu!

Vyšli jsme z definice $f(z)$ podle rovnice (44). Postupným dosazováním vztahů jako je $y_{,z} = -i$ dostaneme

$$f(z) = E_y + iE_x = -(\varphi_{,y} + i\varphi_{,x}) = -i(\varphi_{,x}x_{,z} + \varphi_{,y}y_{,z}) = -i\varphi_{,z},$$

odkud plyne

$$\varphi(X) = i \int_{OX} f(z) dz = iw(X).$$

Protože funkce φ je reálná, platí

$$\varphi = -\operatorname{Im} w.$$

My však zvolíme opačný postup: Budeme volit holomorfní funkci $w(z)$ a bude nás zajímat, jak vypadá potenciál φ považmo vektor elektrické intenzity \mathbf{E} . Velmi příjemnou vlastností je, že funkce $f(z) = dw/dz$ je také holomorfní. Poznamenejme ještě na okraj, že křivky $\operatorname{Re} w(z) = \text{konst}$ jsou siločáry elektrického pole, protože jsou kolmé na ekvipotenciály $\operatorname{Im} w(z) = \text{konst}$. Tyto křivky zároveň odpovídají potenciálu generovanému funkcí $g(z)$, pro kterou se siločáry a ekvipotenciály prohodi.

Řešení jednoduchých, ale nevšedních úloh

Pro funkci $w(z) = \text{konst}$ dostaneme konstantní potenciál, protože její imaginární složka je konstantní $dw/dz = E_y + iE_x = 0$, což odpovídá nulovému elektrickému poli.

Pro funkci $w(z) = az$, kde $a \in \mathbb{R}$, platí $\text{Im } w = ay$, tedy ekvipotenciály odpovídají situaci $y = \text{konst}$, můžeme proto předpokládat homogenní pole. Ověříme toto tvrzení $dw/dz = a = E_y + iE_x$, takže $E_y = a, E_x = 0$ a jde opravdu o homogenní pole.

Pro funkci $w(z) = az^2$ je situace mnohem zajímavější. Funkci $w(z)$ můžeme přepsat

$$w(z) = az^2 = a(x^2 - y^2) + 2axyi.$$

Za ekvipotenciály budeme uvažovat imaginární část této funkce.

$$2axy = -\varphi, \quad \Rightarrow \quad y = \frac{-\varphi}{2ax}.$$

To jsou rovnomoce hyperboly nacházející se mimo jiné v prvním kvadrantu. Zamysleme se nad tím, jak vypadají ekvipotenciály pro $\varphi \rightarrow 0$. Jsou to přímo polopřímky $x > 0, y = 0$ a $x = 0, y > 0$. Tyto dvě polopřímky však svírají pravý úhel a určují tak roh. Tato volba určuje, jak vypadá pole uvnitř vodivého rohu. Takový výsledek jsme klasickými cestami nebyli schopni dostat. Můžeme ještě vypočítat složky elektrického pole derivací funkce $w(z)$. Z rovnice $dw(z)/dz = 2az$ platí

$$E_x = 2ay, \quad E_y = 2ax.$$

Póly holomorfní funkce

Zkusme se ještě podívat na elektrické pole dané funkcí $f(z) = ai/z$. Protože tato funkce není definována v počátku, platí sice Cauchyho věta, ale musíme opatrně volit oblast, ze které vybíráme integrační křivku. Tato oblast nesmí obsahovat počátek! Naopak na libovolné oblasti, která neobsahuje počátek můžeme použít výše odvozenou teorii a považovat tuto funkci za řešení rovnic elektrostatiky.

Pro řešení se hodí vědět, jak se derivuje přirozený logaritmus $\ln y$, což je inverzní funkce k exponenciále $y = e^x$

$$y = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d \ln y} \quad \Rightarrow \quad \frac{d \ln y}{dy} = \frac{1}{y}.$$

Podívejme se nyní, jak vypadá potenciál odpovídající funkci

$$f(z) = \frac{ai}{z} = \frac{ia\bar{z}}{|z|^2}. \quad (46)$$

Integrací funkce $f(z)$ dostáváme

$$w(z) = ia \ln z$$

Nyní se podíváme na imaginární složku funkce w , tak abychom určily tvar ekvipotenciál

$$\begin{aligned} -\operatorname{Im} w(z) &= -a \operatorname{Im} (i \ln z) = -a \operatorname{Im} \left(i \ln \left(|z| e^{i \arg z} \right) \right) = \\ &= -a \operatorname{Im} (i \ln |z| - \arg z) = -a \ln |z| = \varphi. \end{aligned}$$

Proto jsou ekvipotenciály kružnice se středem v počátku. Podle (44) toto řešení fyzikálně odpovídá poli

$$E_x = \frac{ax}{x^2 + y^2}, \quad E_y = \frac{ay}{x^2 + y^2}.$$

Toto pole odpovídá vodiči s konstantní délkovou hustotou náboje.

Úloha III. S ... hluboká orba

- a) Dopočítejte fyzikální význam konstanty a pro funkci $f(z) = ai/z$, znáte-li délkovou hustotu náboje τ .
- b) Vypočítejte a nakreslete ekvipotenciály a silokřivky pole v okolí rohu, který má vrcholový úhel ϑ . Náповěda: použijte funkci tvaru $w(z) = Az^s$, kde s je vhodná reálná konstanta.
- c) Určete pole, které generuje elektrický dublet. Dublet jsou dvě tyče vzdálené d s opačnou nábojovou hustotou, přičemž $d\tau = \text{konst.}$ Zajímá nás limita $d \rightarrow 0$. Náповěda: platí $\ln(1+x) \approx x$ pro x blízke 0.
- d) Rozmyslete si, co se stane, pokud existující komplexní potenciál $w(z)$ zobrazíme jinou holomorfní funkcí $v(z)$. Bude potenciál tvaru $v(w(z))$ i nadále řešit rovnice elektrostatiky?

Kapitola 4: Möbiova transformace

V poslední úloze minulé kapitoly jsme dokázali jednoduchým způsobem větu, podle které libovolný holomorfní obraz řešení rovnic elektrostatiky rovněž splňuje rovnice elektrostatiky, ovšem je potřeba zvlášť ošetřit okrajové podmínky. Teď v tomto problému pokročíme.

Obecné pojednání o transformacích

Probereme nyní první z řady transformací. Co je to taková transformace? Nejprve motivační příklad: Stojíte přede dveřmi, kterými máte protáhnout stůl, který má vodorovné rozměry větší než šířka dveří. Jak jen protáhnout stůl dveřmi, aniž byste cokoli poškodili a neporušili žádný fyzikální zákon?

Naštěstí existuje jednoduchý způsob. Stůl přetransformujeme, čímž získáme úlohu, která má jednoduché řešení, a provedeme zpětnou transformaci. V tomto případě se transformace provede prostě tak, že se stůl otočí na svislo, kdy lze dveřmi snadno projít. Nakonec provedeme inverzní transformaci, která stůl zase postaví na nohy.

Krátce, transformace umožňují přepsat úlohu, u které řešení neznáme, na úlohu, kde ho jsme schopni (většinou snadno) zjistit. Inverzní transformace převádí

řešení jednoduché úlohy zpět na původní úlohu; existenci inverzní transformace budeme v dalším vždy požadovat.³⁵ Často také nazýváme původní úlohu vzor a transformovanou obraz.

Möbiova transformace je jedna z řady komplexních transformací.³⁶ Postupně se seznámíme i s transformací Fourierovou (neboli spektrem) a transformací Laplaceovou, které se úzce pojí s komplexními čísly. V klasické mechanice a termodynamice se používá Legendrova transformace (impulsový prostor). Není to tak složité, jak se na první pohled zdá. Prostě už nepopisujeme funkce v kartézských souřadnicích jako obvykle, ale pomocí spektra (Fourier) nebo pomocí absolutního členu a derivace (Legendre). Nejbanálnějšími příklady transformací jsou transformace souřadnic (otočení os, posunutí, přechod do sférických souřadnic); to byl ostatně i příklad našeho stolu.

Řada fyzikálních zákonů je formulována jako invariance (neměnnost) vůči určitým transformacím; například kvantová mechanika je důsledkem invariance vůči Galileově transformaci. Jistě znáte i Lorentzovou transformaci, vůči níž jsou přírodní zákony invariantní, i když se blížíme rychlostem světla.

Starý známý: Kruhová inverze

Kruhová inverze podle kružnice K je geometrické zobrazení komplexní roviny do sebe, které prohodí vnitřek a vnějšek kružnice. Stejně definujeme sdružené body pro osovou souměrnost, středovou souměrnost atp., definujeme i kruhovou souměrnost: Dva body jsou souměrné právě tehdy, pokud leží společně se středem kružnice K na přímkě a součin jejich vzdáleností od středu se rovná poloměru kružnice na druhou. Zkuste použít Eulerovu větu o odvěsně, abyste získali názornou geometrickou představu.

Nejzajímavější fakt ohledně kruhové inverze je, že zobrazuje zobecněné kružnice na zobecněné kružnice.³⁷ Pro důkaz si stačí uvědomit, že osa osové souměrnosti vzorové kružnice, která prochází středem kružnice K vytíná na vzorové kružnici průměr. Vzorová kružnice je tedy Thaletovou kružnicí průměru. Nicméně průměr se zobrazí na jiné dva body na ose a z podobnosti trojúhelníku lze vyvodit, že obraz bodu na vzorové kružnici tvoří s body průměru opět pravoúhlý trojúhelník, takže obrazem je opět Thaletova kružnice průměru. Odsud lze již snadno vyvodit, že kruhová inverze je antikonformní zobrazení (zachovává velikost úhlu, ale mění jeho znaménko).

Kruhovou inverzi lze použít na fyzikální úlohu, jejímž řešením jsou harmonické funkce. Pokud už jedno řešení máme, můžeme ho kruhovou inverzí zobrazit na jiné řešení, které má fyzikální význam.

Möbiova rovina

Občas je užitečné se dívat na body v komplexní rovině jako na faktorprostor dvojice komplexních rovin. To znamená, že o dvou dvojicích (p, q) a (r, s) řek-

³⁵⁾ Proto například neidentickou projekci mezi transformace neřadíme.

³⁶⁾ Pro krásný a názorný úvod doporučujeme dvouminutové video na stránce <http://www.ima.umn.edu/~arnold/Mobius>.

³⁷⁾ Zobecněnými kružnicemi se zde rozumí kružnice a přímky.

neme, že jsou ekvivalentní, pokud platí $ps = rq$. Jinými slovy význam má pouze formální podíl $(p, q) \sim p/q \sim pc/qc$ (homogenní souřadnice³⁸). Takto dostaneme třídu ekvivalentních dvojic, která je izomorfní původní komplexní rovině. Až na jednu výjimku! Prvky jedné třídy ekvivalence mají tvar $(a, 0)$ – těmto prvkům je zvykem říkat nekonečno a značit je ∞ (to lze formálně zjistit ze vztahu „ $a/0 = \infty$ “). Alternativním způsobem, je rozšířit rovinu o bod, který se v kruhové inverzi zobrazí na její střed. Tak jako tak získáme novou množinu $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, kterou nazýváme Möbiova rovina.

Proto lze také na rozdíl od komplexní roviny zobrazuje Möbiova transformace Möbiovu rovinu samu na sebe, a to vzájemně jednoznačně (dokažte).

Möbiova transformace

Möbiovu transformaci Möbiovy roviny definujeme jako lineárně lomené zobrazení komplexní roviny na sebe

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

kde $ad - bc \neq 0$ jsou komplexní konstanty (tuto podmínku zveme podmínka regulárnosti, speciálně bereme nenulové číslo jako jedna; není-li splněna, dává zobrazení konstantu).

Konstrukcí homogenních souřadnic výše popsaným způsobem lze zjednodušit některé důkazy (viz následující text), protože Möbiova transformace v nich má význam prostě násobení čtvercovou maticí 2×2 . Součin dvou regulárních matic je ovšem opět regulární matice (výsledná Möbiova transformace tudíž zase splňuje podmínku regulárnosti, resp. unimodularity).

Möbiova transformace Möbiovy roviny vznikne vhodným rozšířením transformace komplexní roviny; pak lze odvodit následující tvrzení:

- a) Möbiova transformace je složení posunutí, otočení, kruhové inverze, komplexního sdružení a roztažení.
- b) Möbiova transformace je holomorfní funkce (důsledek a).
- c) Möbiova transformace zobrazuje zobecněné kružnice na zobecněné kružnice (důsledek a).
- d) Möbiova transformace je konformní zobrazení neboli zachovává úhly (důsledek c).
- e) Složením dvou Möbiových transformací vznikne opět Möbiova transformace, inverzní transformace je opět Möbiova (transformace tvoří grupu).
- f) Möbiova transformace má nejvýše dva pevné body, pro které je $Mz = z$.

Penroseho konstrukce a Riemannova sféra

Po úvodním výkladu Möbiovy transformace je čas přehodnotit naše pojetí komplexního čísla. Představme si pevný světelný zdroj, který se zableskne ve všech

³⁸⁾ Homogenní souřadnice hrají například klíčovou roli v geometrické optice.

směrech. To znamená, že do všech směrů³⁹ (ϑ, φ) vyšle foton (fotony mají rychlost světla, kterou uvažujeme jednotkovou). Ukážeme způsob, jak každému fotonu přiřadit komplexní číslo. Roger Penrose navrhl tuto konstrukci: Zdroj Z se vznášá na pevném místě jednotku nad komplexní rovinou. V okamžiku záblesku se komplexní rovina začne přibližovat ke zdroji jednotkovou rychlostí. Rychlost kolmá na komplexní rovinu se rovná $\cos \vartheta$, čili foton dopadne na komplexní rovinu za čas

$$\frac{1}{1 + \cos \vartheta} = \frac{1}{2 \cos^2 \vartheta}$$

na bod komplexní roviny

$$z = e^{i\varphi} \operatorname{cotg} \left(\frac{\vartheta}{2} \right) \quad (47).$$

Tím jsme každému fotonu záblesku přiřadili číslo z z komplexní roviny.

Klasický způsob ovšem využívá Riemannovu sféru \mathbb{S} : Uvažujme nad počátkem O komplexní rovinou zdroj Z světla v jednotkové vzdálenosti od komplexní roviny. Riemannovou sférou nazýváme sféru s průměrem OZ . Vzájemně jednoznačné zobrazení mezi \mathbb{C} a \mathbb{S} definujeme tak, že bod na Riemannově sféře a bod v komplexní rovině leží na paprsku, který vychází ze zdroje Z . Nevlastní bod Möbiovy roviny ∞ identifikujeme se zdrojem Z . Ověřte, že zavedením sférických souřadnic (ϑ, φ) dostaneme vztah (47).

Takto definovaná stereografická projekce zobrazuje zobecněné kružnice v Möbiově rovině na kružnice na Riemannově sféře. To zjevně platí pro přímky v komplexní rovině, které odpovídají kružnicím na Riemannově sféře procházejícím zdrojem Z . Odsud rovněž vyplývá, že dvě kružnice na Riemannově sféře se protínají pod stejným úhlem jako vzorové přímky.

Jak to vypadá pro kružnice? Pomůžeme si malou obezličkou: Zobrazení na Riemannovu sféru není totiž nic jiného, než jistá speciální kulová inverze kolem sféry K . Vskutku: Hledáme takovou sféru, ve které se komplexní rovina zobrazí kulovou inverzí na Riemannovu sféru. Tato sféra musí zcela jistě procházet počátkem O a musí mít střed ve zdroji Z . Ze symetrie jde tedy o sféru s průměrem OZ . Z toho je i zřejmé, že obrazem zobecněné kružnice v komplexní rovině je kružnice na Riemannově sféře, protože vzorová kružnice je průnikem koule a roviny, které se obě zobrazí na koule, jejichž průsečíkem je vždy kružnice.

Dokážeme teď konečně tvrzení, které nám přinese geometrický vhléd do Möbiovy transformace. Möbiova transformace je vzájemně jednoznačné zobrazení Riemannovy sféry na sebe, které lze složit z rotací a posouvání Riemannovy sféry v prostoru. Probereme nejprve rotace: Uvažujme dva body p a q na Möbiově rovině (Riemannově sféře); rotace R zachovávají skalární součin, čili dostaneme $(p, q) = (Rp, Rq) = (p, R^+Rq)$, takže tvrzení je splněno, pokud $R^+R = 1$ neboli $R^+ = R^{-1}$. V konkrétním vyjádření homogenních souřadnic jsou operátory R matice 2×2

$$R = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{d} & -\bar{b} \\ -\bar{c} & \bar{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{d} & -\bar{b} \\ -\bar{c} & \bar{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ -\bar{c} & \bar{a} \end{pmatrix}.$$

³⁹⁾ Jak je zvykem, značíme ϑ úhel svírající s osou z a φ azimutální úhel.

Proto každé rotaci Riemannovy sféry odpovídá Möbiova transformace

$$Rz = \frac{az + c}{-\bar{c}z + \bar{a}}.$$

Situace $a = 0$, $c = 1$ odpovídá převrácené hodnotě se změnou znaménka. Pro ostatní zobrazení je situace jednodušší: Posunutí sféry odpovídá posunutí komplexní roviny, oddálení sféry odpovídá kontrakci komplexní roviny.

Tím jsme položili základní geometrické představy, jejichž fyzikální aplikaci rozvineme v příští kapitole seriálu.

Úloha IV. S ... Möbiova transformace a konformní zobrazení

- a) Dokažte tvrzení d), podle něhož Möbiova transformace zachovává úhly. Jedna z možností je uvést si, že v kruhové inverzi existují kružnice, které se zobrazují samy na sebe.
- b) Najděte podmínku na koeficienty Möbiovy transformace, aby zobrazovala komplexní kruh na komplexní kruh ($|z| \leq 1$) a najděte konkrétní transformaci, která zobrazuje komplexní kruh na horní komplexní polorovinu. Co to fyzikálně znamená?
- c) Podle teorie relativity se tělesa pohybující se rychlostí blízkou rychlosti světla zkracují (Lorentzova kontrakce). To ovšem ještě neznamená, že bychom je viděli kratší (například, že bychom místo pohybující se koule viděli pohybující se elipsoid). Využijte představy, který jsme v tomto díle vybudovali, abyste odvodili, že předměty letící rychlostí světla vidíme o kousek pootočené, nikoliv zkrácené (Terellova rotace).

Kapitola 5: Aplikace teorie konformních zobrazení

Od elektrostatiky k hydrodynamice. . .

V předminulém dílu jsme se zabývali vztahem harmonických⁴⁰ resp. holomorfních⁴¹ funkcí k elektrostatice. Nyní se budeme zajímat o proudění tzv. „suché“ vody. Na první poslech to zní úsměvně, ale termíny „suchá“ a „mokrú“ voda se používají jako synonyma pro neviskózní resp. viskózní kapalinu.

Omezíme se na kapalinu, která lokálně nerotuje. Myslíme tím, že cirkulace vektoru rychlosti je nulová v každém bodě. Toto ale neznamená, že by kapalina nemohla rotovat, což si ukážeme dále.

Jak jsme výše uvedli, budeme se zabývat prouděním nestlačitelné tekutiny a nebudeme uvažovat zdroje. Proto veškerý objem tekutiny, který vteče do jistého objemu, musí též vytéci.⁴² Toto můžeme vyjádřit podmínkou

$$v_{x,x} + v_{y,y} = 0, \tag{48}$$

⁴⁰⁾ Harmonické funkce jsou takové, které řeší Laplaceovu rovnici.

⁴¹⁾ Reálná i imaginární část holomorfní funkce je také funkcí harmonickou. Obráceně, ke každé harmonické funkci ve 2D existují dvě holomorfní funkce splňující předešlou podmínku.

⁴²⁾ Srovnejme toto s Gaussovým zákonem elektrostatiky.

kde jsme označili v rychlost proudění a použili konvenci značení derivace ze třetího dílu seriálu. Dále budeme uvažovat lokálně nerotující kapalinu, což vyjadřuje podmínka

$$v_{x,y} - v_{y,x} = 0. \quad (49)$$

Vztahy (48) a (49) jsou opět Cauchy-Riemannovy podmínky. Proto můžeme vektorovou funkci v nahradit vhodnou holomorfní funkcí, kterou budeme značit též v .

$$v = v_y + i v_x. \quad (50)$$

Potenciál proudění v okolí válce

Opět, jako v elektrostátice, budeme hledat komplexní potenciál proudění. Nyní nás ale bude zajímat jeho reálná část představující proudnice (imaginární část odpovídá ekvipotenciálám).

Komplexní potenciál budeme značit $w = \psi + i\varphi$. Jak jsme již odvodili v předešlých dílech, pro rychlost proudění platí $v = dw/dz$.

Abychom mohli pokročit dále, budeme potřebovat ještě jedno hlubší tvrzení, které však nebudeme dokazovat.

Je-li funkce $f(z)$ holomorfní uvnitř mezikruží o vnitřním poloměru r , vnějším poloměru R se středem z_0 , potom platí

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k \quad \text{pro } r < |z - z_0| < R,$$

kde jsme označili $f^{(k)}(z_0)$ k -tou derivací funkce f v bodě z_0 ; speciálně tato řada má smysl.

Této řadě říkáme *Laurentova*. Má dvě části: První pro $k < 0$ se nazývá hlavní, pro $k \geq 0$ jde o část regulární. Pokusme se nyní využít tohoto tvrzení pro nalezení funkce v resp. funkce w , tj. komplexního potenciálu.

Uvažujme nyní v počátku stojící válec obtékáný tekutinou, která má v nekonečné vzdálenosti od válce rychlost U_∞ ve směru osy x .

Protože nyní zkoumáme proudění okolo válce, stačí nám, aby funkce v byla holomorfní na „mezikruží“ o poloměrech $r = a$, $R = \infty$, kde jsme označili a poloměr obtékaného válce. Dále bychom byli rádi, aby rychlostní pole ve velké vzdálenosti bylo téměř konstantní. Proto budeme rychlost v hledat ve tvaru

$$v = \frac{dw}{dz} = C_0 + \frac{C_1}{z} + \frac{C_2}{z^2} + \frac{C_3}{z^3} + \dots \quad (51)$$

Provedeme-li integraci výrazu (51), pro potenciál dostáváme

$$w = C_0 z + C_1 \ln z - \frac{C_2}{z} - \frac{C_3}{2z^2} - \dots \quad (52)$$

Nyní ještě rozepíšeme konstanty $C_k = A_k + iB_k$.

Pokud dosadíme $z \rightarrow \infty$ do rovnice (51) a použijeme-li definici (50), dostáváme z okrajové podmínky $A_0 = 0, B_0 = U_\infty$.

Další podmínka, která by měla být splněna je, aby s obvodem válce splývala nějaká proudnice. Toto můžeme vyjádřit podmínkou

$$\psi(|z| = a) = \operatorname{Re} w = \text{konst.}$$

Pokud platí $|z| = a$, můžeme jej napsat ve tvaru $z = ae^{i\vartheta}$. Toto vyjádření dosadíme do rovnice (52) a rovnou určíme její reálnou část.

$$\psi = -B_0 a \sin \vartheta + A_1 \ln a - B_1 \vartheta - \frac{A_2}{a} \cos \vartheta - \frac{B_2}{a} \sin \vartheta - \frac{A_3}{2a^2} \cos 2\vartheta - \frac{B_3}{2a^2} \sin 2\vartheta - \dots$$

Tento výraz se ale musí rovnat konstantě pro všechny úhly ϑ z intervalu $(-\pi, \pi)$. Tato podmínka implikuje⁴³ $A_k = B_k = 0$ pro $k \geq 3$, $B_1 = A_2 = 0$ a $B_2 = -B_0 a^2$.

Dosadíme-li zpětně do (52), pro komplexní potenciál a rychlost dostáváme

$$w = iU_\infty \left(z + \frac{a^2}{z} \right) + A_1 \ln z, \quad (53)$$

$$v = iU_\infty \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) + \frac{A_1}{z}. \quad (54)$$

Toto je nejobecnější tvar komplexního potenciálu pro laminární proudění okolo stojícího válce. Jak vidíme, vyskytují se zde dva volné parametry U_∞ a A_1 . Nyní si vysvětlíme, jaký mají fyzikální význam.

Význam U_∞ již známe – jde o rychlost proudění tekutiny ve veliké vzdálenosti od válce.

Uvažujme nyní situaci $U_\infty = 0$. Náš potenciál přejde do tvaru

$$w = A_1 \ln z.$$

Ale zde nastává malý problém. Funkci logaritmus jsme definovali jako inverzní k exponenciále. Ta je ale periodická, jelikož platí

$$\exp(x + 2k\pi i) = \exp(x) \quad \text{pro } k \in \mathbb{Z}.$$

Jedna z možností, jak tento problém překonat, je požadovat, aby $\operatorname{Im} \ln z \in (-\pi, \pi)$. Potom ale nastane při derivování problém. Budeme-li přecházet zápornou část reálné osy, tak budeme pozorovat skok ve funkčních hodnotách právě o výše zmínované 2π . Této nepříjemnosti se však můžeme bez problémů zbavit, pokud si uvědomíme vlastnosti logaritmu. Vzhledem k tomu, že se nám nepříjemný logaritmus vyskytuje pouze v potenciálu proudění, nikoli v rychlosti, který je fyzikálně

⁴³⁾ Funkce e^{ikx} , $k \in \mathbb{Z}$ tvoří bázi prostoru $L^2((-\pi, \pi))$. L^2 je prostor kvadraticky integrovatelných funkcí, tj. $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < \infty$. Říkáme, že dvě funkce z tohoto prostoru jsou si rovny, pokud se jejich funkční hodnoty rovnají skoro všude.

neměřitelný,⁴⁴ můžeme k němu na nějaké množině přičíst konstantu 2π a tímto zařídit, aby nespojitost byla někde jinde. Použijeme malý trik

$$\ln z = \ln \left(z e^{i\alpha} e^{-i\alpha} \right) = \ln e^{-i\alpha} + \ln \left(z e^{i\alpha} \right) = -i\alpha + \ln \left(z e^{i\alpha} \right).$$

Funkce na pravé straně je již spojitá na záporné reálné přímce, ale nikde nepozměnila rychlostní pole.

Zamysleme se ještě nad tím, jaké situaci toto fyzikálně odpovídá. Protože je funkce logaritmus holomorfní, splňuje lokálně Cauchy-Riemannovy podmínky, a proto je proudění lokálně necirkulující, však proudnicemi jsou kružnice, tj. tekutina krouží okolo středu.⁴⁵ Toto je důvod, proč neexistuje globální potenciál, jak je tomu v elektrostátice.

d'Alembertovo paradoxon

Právě jsme vyřešili problém, jaký potenciál odpovídá proudění kapaliny okolo válce. Nyní ještě vyřešíme, jaké síly na tento válec působí.

Abychom byli schopni určit silové působení na válec, musíme určit, jaký tlak je na jeho povrchu. K tomuto účelu nám pomůže znalost Bernoulliho rovnice

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{konst.}$$

Vypočteme proto velikost rychlosti obtékání válce. Uvažujme opět případ $A_1 = 0$.

$$v = \frac{dw}{dz} = iU_\infty \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right),$$

dosadíme-li $z = a e^{i\vartheta}$, tj. povrch válce, pro velikost rychlosti dostáváme

$$|v| = U_\infty \left| 1 - e^{-2i\vartheta} \right| = 2U_\infty |\sin \vartheta|.$$

Proto pro tlak platí

$$p = C - 2\rho U_\infty^2 \sin^2 \vartheta.$$

Zjišťujeme, že tlak na protilehlých stranách válce je shodný, tedy na válec nebude působit žádná síla! Tomuto rozporuplnému výsledku, který je experimentálně nepozorovatelný, protože neexistuje neviskózní kapalina, se říká *d'Alembertovo paradoxon*. Obecně lze dokázat, že toto platí pro těleso libovolného tvaru v libovolné dimenzi > 1 .

⁴⁴⁾ Jediná měřitelná veličina je rychlost, která je jeho derivací, proto můžeme k potenciálu přičíst libovolnou konstantu, aniž by se změnilo pozorované proudění.

⁴⁵⁾ Pokud by nebylo proudění omezeno u středu např. naším válcem, rychlost by musela růst nad všechny meze. V počátku by potom neplatily C.-R. podmínky.

Vztlaková síla

Rozeberme nyní ještě, jaké síly působí na válec, pokud $A_1 \neq 0$. Položme

$$A_1 = \frac{\Gamma}{2\pi},$$

kde Γ je cirkulace vektoru rychlosti po libovolné křivce obsahující počátek soustavy souřadnic.⁴⁶

Zderivujeme-li vztah (53) podle z , získáme komplexní rychlost proudění. Dále určíme velikost rychlosti na povrchu válce.

$$\begin{aligned} v &= \frac{dw}{dz} = iU_\infty \left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi z}, \\ v &= iU_\infty \left(1 - e^{-2i\vartheta}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi a} e^{-i\vartheta}, \\ |v|^2 &= 4U_\infty^2 \sin^2 \vartheta - \frac{4U_\infty \Gamma}{2\pi a} \sin \vartheta + \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 a^2}. \end{aligned} \quad (55)$$

Nyní můžeme z Bernoulliho rovnice již jednoduše určit, jaký tlak je na povrchu válce

$$p = C - \frac{1}{2} \rho |v|^2,$$

kde za $|v|^2$ dosazujeme z rovnice (55), C je libovolná konstanta a ρ je hustota uvažované tekutiny.

Určeme nyní jaké jsou síly, které působí na válec. Platí

$$\begin{aligned} R_x &= \int_0^{2\pi} -p(\vartheta) \cdot a \cos \vartheta \, d\vartheta = \frac{\rho a}{2} \int_0^{2\pi} |v|^2 \cos \vartheta \, d\vartheta, \\ R_y &= \int_0^{2\pi} -p(\vartheta) \cdot a \sin \vartheta \, d\vartheta = \frac{\rho a}{2} \int_0^{2\pi} |v|^2 \sin \vartheta \, d\vartheta. \end{aligned}$$

Zde $R_{x;y}$ značí velikost síly, která působí na jednotkovou délku válce ve směru osy z . Faktor a se zde vyskytuje, protože $a \cos \vartheta \, d\vartheta$ je velikost plošky, na kterou tlak působí. Formálně jsme mohli tyto výrazy použít i pro určení výslednice působící síly pro nevířivé proudění. Nyní do těchto výrazů dosadíme ze vztahu (55). První výraz je shodný s případem $\Gamma = 0$, proto reakční síla jím způsobená je nulová. Poslední člen mění okolní tlak jen o konstantu, tedy příspěvek od něj je také nulový. Proto platí

$$\begin{aligned} R_x &= -\frac{U_\infty \Gamma \rho}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin \vartheta \cos \vartheta \, d\vartheta = 0, \quad R_y = -\frac{U_\infty \Gamma \rho}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \vartheta \, d\vartheta = -U_\infty \Gamma \rho, \\ R &= R_y + iR_x = -U_\infty \Gamma \rho. \end{aligned} \quad (56)$$

⁴⁶⁾ Obecně platí $\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = n\Gamma$, kde $n \in \mathbb{Z}$ a uvažujeme integraci tečné složky \mathbf{v} po uzavřené křivce. Číslo n značí počet „oběhů“ křivky okolo počátku (v kladném/záporném smyslu).

Pro integraci jsme užili identit $\sin \vartheta \cos \vartheta = \frac{1}{2} \sin 2\vartheta$ a $\sin^2 \vartheta = (1 - \cos 2\vartheta)/2$. Zavedli jsme zde komplexní sílu R , se kterou budeme pracovat v poslední části.

Nyní již víme, jak závisí vztahová síla na parametrech proudění Γ a U_∞ . V poslední části si ukážeme, jaký je vztah mezi těmito veličinami. Před tím ale ještě budeme muset transformovat potenciál proudění.

Žukovského transformace

Nyní se vrátíme na samý začátek vývoje letectví. Jeden z prvních, kdo systematicky zkoumal tvary křídel letadel, byl N. J. Žukovskij. Na jeho počest se jmenují také profily křídel, kterými se zde budeme zabývat. Byly konstruovány za velmi zjednodušených předpokladů: laminárního obtékání, nestlačitelnosti okolní tekutiny a také nulové viskozity, však v časech první světové války byly používány.

Tyto profily vzniknou konformním zobrazením kružnice.

$$\xi = z + \frac{l^2}{z}, \quad (57)$$

kde ξ je poloha transformovaného bodu z a l je parametr transformace.

Jak jsme si ukázali v úloze k předminulému dílu, zobrazíme-li konformně řešení Laplaceovy rovnice, jde opět o řešení Laplaceovy rovnice. Výše jsme však našli potenciál, který řeší obtékání válce. Pokud tento potenciál konformně zobrazíme např. pomocí (57), stále bude splňovat rovnice (48) a (49).

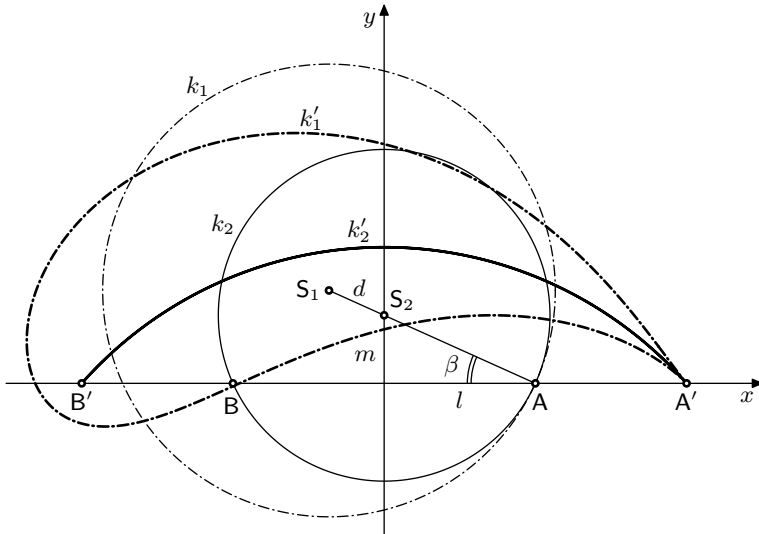
Chceme-li docílit zobrazením kružnice tvarů podobných profilům křídel, musíme speciálně volit střed zobrazované kružnice. To znamená, že zobrazovaná kružnice musí procházet jedním z bodů, kde má transformace nulovou derivaci, tj. $\pm l$, jak si ukážeme později. Tato volba nám zaručí existenci ostrého hrotu. Celá situace je znázorněna na obrázku 48.

Kritické body

Studujeme-li proudění kapaliny, existují body, ve kterých se kapalina nepohybuje. Těmto bodům říkáme kritické.

Nyní se zaměříme opět na obtékání válce. Pokud je cirkulace $\Gamma = 0$, potom jsou tyto body dva: $-a$ a a , kde a opět značí poloměr válce. Jestliže se bude cirkulace zvětšovat, budou se oba kritické body k sobě po povrchu válce přibližovat, až splynou v jeden. Pro větší cirkulace bude jeden z kritických bodů uvnitř kružnice a druhý vně. Celá posloupnost je na obrázku 49.

Jeich poloha se určí jednoduše, položíme-li $v = 0$ v rovnici (54).



Obr. 48. Konstrukce Žukovského profilu

Žukovského hypotéza

S tím, co jsme zatím odvodili, nemůžeme ještě vypočítat přímo vztlak působící na profil křídla, protože neznáme cirkulaci Γ . Toto nám objasní právě Žukovského hypotéza.

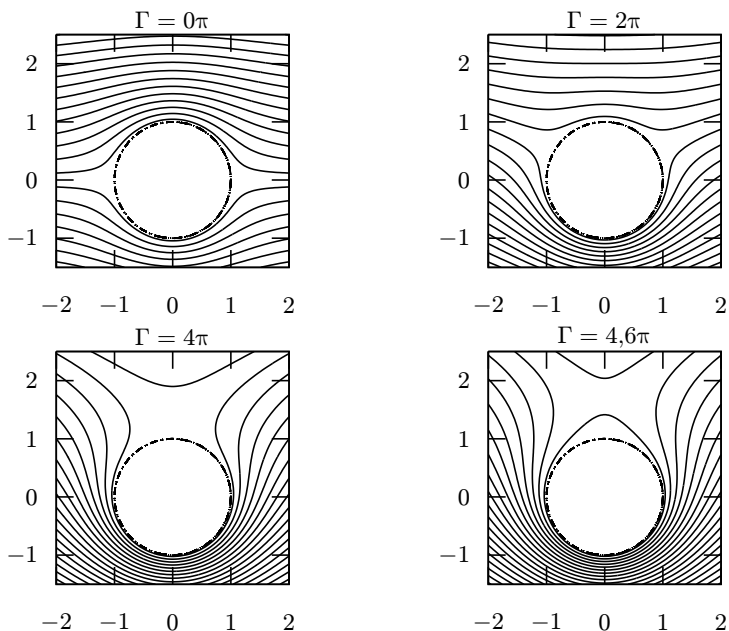
V každém bodu na povrchu křídla musí být konečná rychlost proudění.

Co to pro nás znamená? Pro rychlost proudění po transformaci platí

$$v = \frac{dw}{d\xi} = \frac{dw}{dz} \frac{dz}{d\xi},$$

kde w značí potenciál proudění okolo válce. Vypočteme-li ale derivaci $d\xi/dz$ v bodě $z = \pm l$, vyjde nám nulová! Což znamená, že $dw/dz = 0$, abychom měli alespoň nějakou naději na konečnou rychlost proudění v okolí špičky. To ale nutně znamená, že kritický bod se musí zobrazit na špičku profilu, aby byla tato podmínka splněna.

Odstavec výše odpovídá také na otázku, proč mají letecké profily ostrý hrot. Pokud by jej neměly, tak by nebyla jasně definována cirkulace Γ a tímto i vztlková síla.


 Obr. 49. Proudnicе pro různé hodnoty Γ , $U_\infty = 1$, $a = 1$

Vztlakové síly působící na profil Žukovského

Přejdeme nyní do mírně obecnější situace. Uvažujme, že směr rychlosti proudění vzduchu ve veliké vzdálenosti svírá s osou x úhel $-\alpha$, přirozeně toto odpovídá úhlu náběhu křídla α . Matematicky to znamená změnu souřadnic v potenciálu (53) $z \mapsto ze^{-i\alpha}$. Proto náš nový potenciál a jemu odpovídající rychlost proudění mají tvar

$$\begin{aligned} \tilde{w} &= iU_\infty \left(ze^{-i\alpha} + \frac{a^2}{z} e^{i\alpha} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z, \\ e^{i\alpha} \tilde{v} &= iU_\infty \left(1 - \frac{a^2}{z^2} e^{2i\alpha} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi z} e^{i\alpha}, \end{aligned} \quad (58)$$

kde jsme u potenciálu vynechali zbytečnou konstantu $-i\alpha\Gamma/2\pi$. Aby byla splněna Žukovského hypotéza, musí být cirkulace Γ taková, aby $v(z = ae^{-i\beta}) = 0$, viz obrázek 48, protože bod na původní kružnici $ae^{-i\beta}$ se zobrazí na hrot profilu. Dosazením do (58) a jednoduchou úpravou dostáváme

$$\Gamma = -4\pi a U_\infty \sin(\alpha + \beta).$$

Ještě zbývá dosadit za $a = d + \sqrt{m^2 + l^2}$, viz obrázek 48.

Nakonec ještě určíme, jakou silou působí okolní vzduch na křídlo letadla. Využijeme k tomu vztah (56). Nás však zajímá síla, kterou je letadlo nadnášeno vůči

ose letu, tj. směru rychlosti U_∞ . Proto musíme sílu R otočit o úhel náběhu α . Uvedme ještě na závěr, že R_y je vztlaková síla a R_x je odpor, který klade křídlo proti pohybu.

$$\begin{aligned} R &= 4\pi\rho \left(d + \sqrt{m^2 + l^2} \right) U_\infty^2 \sin(\alpha + \beta) \cdot e^{i\alpha}, \\ R_y &= 4\pi\rho \left(d + \sqrt{m^2 + l^2} \right) U_\infty^2 \sin(\alpha + \beta) \cos \alpha, \\ R_x &= 4\pi\rho \left(d + \sqrt{m^2 + l^2} \right) U_\infty^2 \sin(\alpha + \beta) \sin \alpha. \end{aligned}$$

Závěrem

Tyto profily byly objeveny v roce 1912 a skutečně se používaly za první světové války. Byly však záhy nahrazeny profily lepších vlastností. Velmi brzy se objevily Karmánovy-Trefftzovy profily, které nemají ostrý hrot, ale spodní a horní část odtokové hrany svírá úhel ε . K těmto profilům⁴⁷ vede transformace

$$\frac{\xi - nl}{\xi + nl} = \left(\frac{z - l}{z + l} \right)^n, \quad \text{kde } n = 2 - \frac{\varepsilon}{\pi}.$$

Pro $n = 2$ přechází na profily Žukovského. Žákem profesora Žukovského byl mj. A. N. Tupolev.

Pokud mají letadla létat většími rychlostmi je nutno započítat také stlačitelnost vzduchu a nezanedbatelné turbulentní obtékání. Další nevýhodou laminárních profilů, jako je profil Žukovského, je možné odtržení proudnic od křídla a následný téměř nekontrolovatelný pád do vývrtky.

Úloha V. S ... aviatická

- a) Popište geometrickou konstrukci (pomocí kružítka a pravítka) profilu Žukovského.
- b) Zkuste nakreslit proudnice v okolí profilu Žukovského. Zvolte si takové parametry d/l a m/l , aby měly praktické opodstatnění.
- c) Jaká vztlaková síla působí na rovnou desku? Jaká vztlaková síla působí na desku tvaru kruhového oblouku?
- d) Zkuste nakreslit profil křídla odpovídající Karmánově-Trefftzově transformaci.

Kapitola 6: Závěrečná

V této kapitole si řekneme něco o dalších šikovných použitích komplexních čísel. Především to bude řešení diferenciálních rovnic a Fourierova transformace, kterou aplikujeme na úlohy z optiky.

⁴⁷⁾ http://en.wikipedia.org/wiki/File:Karman_trefftz.gif

Řešení diferenciálních rovnic

Tuto tematiku jsme již lehce nakousli ve druhém dílu seriálu, když jsme rozebírali řešení střídavých obvodů.

Ukazuje se, že studujeme-li nějaký proces, který je typicky popsán lineární diferenciální rovnicí např. harmonický oscilátor, dříve zmíněné střídavé obvody, vedení tepla látkou, vlnovou rovnicí, které jsou všechny lineární⁴⁸, je výhodnější jiný popis, než klasický.

Dále budeme předpokládat, že na systém působíme z vnějšku pouze funkcemi v následujícím tvaru (konkrétní časový vývoj bude pak jejich součet)

$$y(t) = A(\omega) \cdot e^{i\omega t}, \quad (59)$$

kde ω je obecně komplexní číslo a A je obecná funkce, která nemusí být ani holomorfní⁴⁹. Také předpokládáme, že systém se uvnitř chová dle stejných vztahů.

Výhoda funkcí v tomto tvaru je značná. Budeme-li derivovat funkci (59) podle času, dostaneme velmi jednoduchý výsledek

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(\omega)i\omega e^{i\omega t} = i\omega \cdot y(t).$$

Tedy místo derivování stačí násobit konstantou $i\omega$, což je výrazně jednodušší operace.

Zkusme si tento postup například opět na harmonickém oscilátoru. Pro harmonický oscilátor platí $F = m\ddot{x} = -kx$. Budeme-li předpokládat řešení ve tvaru (59). Pak nám rovnice oscilátoru přejde do tvaru

$$m(i\omega)^2 A(\omega) = -kA(\omega) \Rightarrow A(\omega)(m\omega^2 - k) = 0,$$

kde jsme vydělili členem $\exp(i\omega t) \neq 0$, který se nacházel na obou stranách. Toto již ovšem není diferenciální rovnice jako na počátku, ale pouze rovnice algebraická, která má dvě řešení $\omega_{1,2} = \pm\sqrt{k/m}$. Z tvaru výše je vidět, že funkce $A(\omega)$ musí být nulová pro všechna $\omega \neq \omega_{1,2}$, naopak pro ostatní úhlové rychlosti může nabývat libovolné hodnoty⁵⁰.

Pro lineární diferenciální rovnice, to jsou takové, ve kterých se vyskytují derivace hledané funkce, ale jsou násobeny pouze konstantami, obecně platí, že je můžeme přepsat do tvaru $A(\omega) \cdot P_n(\omega) = 0$, kde P_n je polynom řádu n jenž má

⁴⁸⁾ Lineární znamená, že pokud máme dvě řešení problému, tak jejich součet i libovolný násobek každého je opět řešením.

⁴⁹⁾ Typicky nabývá nenulové hodnoty pouze pro několik málo hodnot ω .

⁵⁰⁾ Tyto hodnoty určíme z počátečních podmínek, které nám říkají, jaká je poloha a rychlost v nějakém počátečním čase. Počátečními podmínkami obecně rozumíme hodnoty např. všech derivací v čase nula, nebo může jít i o jiné určující podmínky, pak ale již nemusí být zaručena jednoznačnost řešení.

právě n kořenů. Pokud jsou tyto kořeny různé, funkce $A(\omega)$ je nenulová v n bodech a její hodnoty určíme ze znalosti n počátečních podmínek. Pokud však má polynom $P_n(\omega)$ více násobný kořen, nastává problém, protože pro některé počáteční podmínky bychom nebyli schopni nalézt hodnoty funkce $A(\omega)$, tak aby byly splněny.

Uvažme nyní modelovou situaci. Máme posloupnost systémů ve kterých dva kořeny polynomu přes sebe postupně přechází. Předpokládali bychom, že řešení takovéto rovnice se bude také spojitě měnit. Uvažujme polynom $P_2(\omega) = (\omega - \omega_0 + \lambda)(\omega - \omega_0 - \lambda)$, kde malý parametr λ budeme měnit v okolí nuly. Kořeny tohoto polynomu jsou $\omega_{1,2} = \omega_0 \pm \lambda$. Řešení diferenciální rovnice dané tímto charakteristickým polynomem odpovídají např. tlumenému harmonickému oscilátoru, který je trochu nedotlumený, resp. přetlumený. Uvážíme-li volnost ve volbě $A(\omega)$, můžeme řešení této diferenciální rovnice psát ve tvaru

$$y(t) = A_1 e^{(\omega_0 + \lambda)t} + A_2 e^{(\omega_0 - \lambda)t} = B_1 e^{\omega_0 t} (e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}) + B_2 e^{\omega_0 t} (e^{\lambda t} - e^{-\lambda t}),$$

protože jde o nejobecnější volbu $A(\omega)$. Pro konstanty $B_{1,2}$ platí

$$A_1 = B_1 + B_2, \quad A_2 = B_1 - B_2.$$

Pošleme-li $\lambda \rightarrow 0$, můžeme exponenciály v závorkách rozvinout do Taylorova rozvoje následovně: $\exp(\lambda t) + \exp(-\lambda t) \approx 2$ a $\exp(\lambda t) - \exp(-\lambda t) \approx 2\lambda t$. Řešení diferenciální rovnice proto přejde do tvaru

$$y(t) = (C_1 + C_2 t) e^{\omega_0 t},$$

kde konstanty $C_{1,2}$ jsou opět lineární kombinací $B_{1,2}$.

Tento postup bychom mohli zopakovat i pro vícenásobné kořeny a zjistili bychom, že pokud se v charakteristickém polynomu vyskytne nějaký vícenásobný kořen, musíme jemu odpovídající exponenciálu vynásobit polynomem se stupněm o jedna menším, než je násobnost kořene.

Fourierova transformace

V předešlém případě jsme uvažovali řešení, která pro $t \rightarrow \pm\infty$ mohla být nekonečná. Pokud bychom se omezili pouze na řešení jejichž integrál je konečný, můžeme se omezit pouze na reálné omegy ve vztahu (59). Pokud bychom použili jiné, než reálné ω , funkce $y(t)$ by divergovala a jistě už by nebyla integrovatelná přes celou reálnou osu. Dokonce i kdybychom vzali nějakou lineární kombinaci těchto funkcí, tak bychom nezískali nic integrovatelného.

Dále budeme uvažovat kvadraticky integrovatelné funkce⁵¹, a tak můžeme zavést Fourierovu transformaci $p(k)$ funkce $f(x)$ následovně:

$$p(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x}, \quad f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int p(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{k}. \quad (60)$$

⁵¹⁾ Umocníme-li absolutní hodnotu kvadraticky integrovatelné funkce na druhou a zintegrujeme, dostaneme konečné číslo.

Parametr \mathbf{k} , na kterém závisí Fourierův obraz $p(\mathbf{k})$, se nazývá vlnovým vektorem a má důležitou roli v optice.

Nyní si podrobněji rozeberme, co znamenají výrazy výše. Budeme-li uvažovat vektor ve třírozměrném Eukleidovském prostoru, můžeme jej zapsat jako součet součinů konkrétní souřadnice a jí odpovídajícímu bázovému vektoru. Jediný rozdíl je v tom, že zde máme více bázových vektorů $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$ (dokonce nespočetně mnoho), proto suma přejde v integrál. $f(\mathbf{k})$ je v naší analogii vektorem v \mathbb{E}^3 a $p(\mathbf{x})$ jsou souřadnicemi vůči bázi.

Řešení parciálních diferenciálních rovnic

Nyní si ukážeme, proč je tak výhodné některé parciální diferenciální rovnice řešit v impulzovém prostoru, tj. prostor, ve kterém jsou funkce $p(\mathbf{k})$, místo prostoru přímého, tj. funkcí jako $f(\mathbf{x})$.

Uvažujme nyní například vlnovou rovnici (c je rychlost šíření vzruchu)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Nyní zkusíme vypočítat Fourierovu transformaci (60) této rovnice podle času, tzn. $\mathbf{x} \equiv t$, $\mathbf{k} \equiv \omega$, $f \equiv u$ a $p \equiv \hat{u}$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) e^{i\omega t} dt = 0.$$

Druhý člen můžeme dvakrát integrovat *per partes*⁵² a získáme

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{c^2} u \right) e^{i\omega t} dt = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \hat{u}(x, \omega)}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \hat{u}(x, \omega) = 0.$$

Poslední identita platí, protože násobení ω^2 můžeme provádět před i po integraci se stejným výsledkem, stejně tak i derivování podle prostorových souřadnic.

Tato rovnice ale již není diferenciální v proměnné ω , proto jsme dosáhli výrazného zjednodušení. Nyní si zvolíme konkrétní ω a vyřešíme jednoduchou diferenciální rovnici v proměnné x . Můžeme použít například metodu uvedenou v první části.

Ukažme si toto na příkladu kmitání struny délky L upevněné na obou koncích. Pro strunu platí, že $u(0, \omega) = u(L, \omega) = 0$.

Již víme, že řešením rovnice je součet exponenciál $u(x, \omega) = A_{1,2} \exp(\pm \omega x / c)$. Abychom splnili okrajové podmínky, vyhovují nám pouze řešení ve tvaru

$$u(x, \omega) = u_k \sin \left(\frac{\pi x}{L} k \right),$$

⁵²⁾ Platí $\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$. Tuto identitu dostaneme integrací vzorce pro derivaci součinu $(uv)' = u'v + uv'$.

kde k je přirozené číslo a u_k libovolná konstanta. Mimo jiné to znamená, že $\omega = k\pi c/L$. Tj. existuje pouze několik frekvencí, na kterých může struna kmitat.

Obdobně bychom řešili rovnici vedení tepla

$$\Delta u(\mathbf{x}, t) - \lambda \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = 0.$$

Akorát nyní bychom aplikovali Fourierovu transformaci na prostorovou část funkce u , protože obecně neexistuje řešení pro $t \rightarrow -\infty$. Toto řešení nemusí existovat, protože s postupujícím časem roste termodynamická entropie. Při zpětném vývoji musí klesat a někdy dosáhne minimální hodnoty, toto nastane, pokud bude funkce u v proměnné x součtem několika delta funkcí⁵³.

Nyní provedeme postup uvedený výše a za proměnnou Fourierova obrazu \mathbf{x} budeme uvažovat proměnnou $\boldsymbol{\xi}$. Dostáváme

$$-|\boldsymbol{\xi}|^2 \hat{u}(\boldsymbol{\xi}, t) - \lambda \frac{\partial \hat{u}(\boldsymbol{\xi}, t)}{\partial t} = 0.$$

Toto je diferenciální rovnice pouze v proměnné t , kterou již umíme vyřešit

$$\hat{u}(\boldsymbol{\xi}, t) = \hat{u}_0(\boldsymbol{\xi}) \exp\left(-\frac{|\boldsymbol{\xi}|^2}{\lambda} t\right),$$

kde $\hat{u}_0(\boldsymbol{\xi})$ je Fourierova transformace počáteční podmínky. Pokud chceme určit řešení, musíme vypočítat inverzní Fourierovu transformaci. To není vždy jednoduché, ale povedlo se nám převést úlohu řešení diferenciální rovnice na úlohu integrování, což je výrazně jednodušší problém.

Difrakce

Další úlohou, ve které se můžeme potkat s Fourierovu transformací, je difrakce na čemkoli. Uvědomme si nyní, jaký význam má funkce $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$. Jde o fázi rovinné vlny, která se pohybuje ve směru \mathbf{k} a $p(\mathbf{k})$ je její amplituda, proto odpovídající intenzita záření je $|p(\mathbf{k})|^2$.

Uvažujme nyní modelovou situaci. Na nějaký vzorek svítíme monochromatickou rovinnou vlnou,⁵⁴ ta na vzorku nějak interaguje a v pozměněné podobě ze vzorku vyjde. Budeme-li celou situaci pozorovat ze vzdálenosti mnohem větší, než jsou rozměry vzorku, budeme ve směru \mathbf{k} pozorovat právě intenzitu $|p(\mathbf{k})|^2$. Nebo můžeme použít spojnou čočku, pro níž víme, že paprsky dopadající na čočku rovnoběžně se lámou do jednoho bodu na ohniskové rovině. Svazek rovnoběžných paprsků odpovídá konkrétní rovinné vlně, tj. bodu v recipročním prostoru. V ohniskové rovině proto budeme pozorovat Fourierův obraz předmětu.

⁵³⁾ Delta funkce (δ funkce) vznikne například tak, že vezmeme funkci $y = \exp(-x^2)$ a budeme ji ůžít ve směru osy x a protahovat ve směru osy y tak, aby pod ní byla stále stejná plocha.

⁵⁴⁾ Může jít o šterbinu, na kterou svítíme viditelným světlem, ale také může jít o krystal, na který svítíme Röntgenovským zářením.

Ukažme si nyní, jak vypočítáme difrakci na mřížce s mřížkovou konstantou a . Předem se omlouváme, že toto odvození bude do jisté míry mávání rukama, protože nemáme prostor na pořádné vysvětlení toho, co je distribuce.

Abychom zjistili, do kterého směru se bude světlo rozptylovat a do kterého nikoli, musíme vypočítat Fourierův obraz mřížky. Budeme uvažovat, že mřížka obsahuje velké množství vrypů, a tedy se nebudeme muset zabývat okrajovými jevy. Funkce, kterou budeme transformovat, je amplituda jedné ze složek elektromagnetické vlny (např. elektrické intenzity) po projití mřížkou. Funkce $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$ je periodická s periodou $x_p = 2\pi/k_x$, k_x je složka vlnového vektoru ve směru osy x , která je kolmá jak na vrypy, tak na původní směr šíření. Pokud budeme uvažovat vlnový vektor $k_x \neq 2\pi/a$ nebo jeho celočíselný násobek, pozorovaná intenzita bude nulová. Pro dostatečnou délku mřížky se v integrálu vysvědují na nulu příspěvky od $\exp(ik_x x)$, protože budou mít náhodnou fázi a střední hodnota funkce $\sin x + \cos x$ přes x je nula. Platí $|\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$ a směr tohoto vektoru odpovídá směru šíření záření. Z naší podmínky pro vyzařování dostáváme

$$l \cdot a = 2\pi/k_x \quad \Rightarrow \quad \lambda_x(l) = l \cdot a,$$

kde l je celé číslo určující, o kolikáté maximum jde a λ_x je projekce úsečky délky λ rovnoběžné se směrem šíření do směru osy x . Mimo jiné to znamená, že maxima budeme pozorovat pod úhly $\varphi_l = \lambda_x(l)/\lambda = l \cdot a/\lambda$.

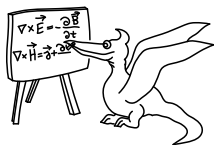
Závěrem

Chtěli bychom vám poděkovat, že jste s námi vydrželi řešit seriál až do posledního dílu. Ukázali jsme si, jak řešit střídavé elektrické obvody, rozličné harmonicky kmitající úlohy, dále jsme si pověděli, jak se vypořádat s dvourozměrnými úlohami z elektrostatiky. Také jsme uvedli příklady dalších transformací, které jsme aplikovali na modely křidel letadel a nakonec jsme se dozvěděli něco málo o řešení diferenciálních rovnic a letmo jsme ukázali, jak řešit difrakční úlohy z optiky. Doufáme, že vám bude seriál alespoň v něčem užitečný.

Úloha VI. S ... všehochuť

- Předpokládejme, že máme radioaktivní látku X , která se rozpadá na látku Y s poločasem rozpadu T_1 , ta se následně rozpadá na stabilní látku Z s poločasem rozpadu T_2 . Jak závisí koncentrace látky Y na čase, pokud jsme na počátku měli pouze látku X ?
- Vypočítejte jak vypadá difrakční obrazec vzniklý průchodem světla o vlnové délce λ štěrbinou šířky d .
- Pokuste se najít frekvence ω , pro které existuje řešení vlnové rovnice na čtverci o hraně a . Kolik různých funkcí odpovídá jedné úhlové frekvenci?

Nápověda Pro prostorovou část předpokládejte řešení ve tvaru $A(x, y) = X(x)Y(y)$.



Řešení úloh ze seriálu

Úloha I. S ... komplexní rychlokvaška

- Uvědomte si, že n -té odmocniny z komplexní jednotky leží na n -úhelníku, a dořešte Bombelliho rovnici $x^3 - 15x - 4 = 0$. Náповědu naleznete v textu seriálu.
- Vyjádřete goniometrické součtové vzorce pomocí komplexních exponenciál.
- Ukažte oprávněnost zanedbání vyšších mocnin v odvození Bernoulliho limity, tj. že do závorky můžeme přidat člen $o(1/N)$.
- Použijte značení s malým o , abyste vyřešili úlohu, s jakou frekvencí kmitají body hmotnosti m po ose x v Yukawově potenciálu $ke^{x/\lambda}/x$ kolem rovnovážné polohy.
- Dokažte, že Čebyševovy polynomy $\cos(n \arccos(x))$ jsou skutečně polynomy. Návod: Uvažujte komplexní jednotku z , která má reálnou část x . Pak se vyšetřovaný výraz rovná reálné části z^n , což musí být polynom, protože odmocniny a imaginární jednotky drží spolu.

Bombelliho rovnice

Připomeňme nejprve nad rámec řešení, jak se dospěje ke Cardanovým vzorcům. Pokud do rovnice v redukovaném tvaru

$$x^3 = 3px + 2q$$

dosadíme $x = a + b$, dostaneme z faktu, že rovnice má platit pro všechna p a q , ekvivalentní soustavu rovnic

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &= 2q, \\ ab &= p. \end{aligned}$$

Tato soustava je invariantní vůči záměně neznámých, takže nám stačí vypočítat jen jednu z nich. Dosazením druhé rovnice do první a vyřešením kvadratické rovnice zjistíme

$$b^3 = q \pm \sqrt{q^2 - p^3}.$$

Ovšem s ohledem na první rovnici v soustavě budou mít řešení opačné znaménko. Dosazením pro původní $x = a + b$ dostaneme Cardanův vzorec.

Dosažením $p = 5$ a $q = 2$ získáme $a^3 = 2 \pm 11i = (2 \pm i)^3$. Jedním z řešení je tedy $a = 2 + i$ a $b = 2 - i$, což dá prozrazený kořen $x = 4$. Kořeny třetí odmocniny leží na rovnostranném trojúhelníku, takže máme další kořeny

$$a' = ae^{\pm 2\pi/3i} = (2 + i) \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} = \frac{-2 \mp \sqrt{3}}{2} + (\dots)i.$$

Pokud si uvědomíme, že x vznikne jako součet čísla a' a čísla komplexně sdruženého, můžeme rovnou psát

$$x = a' + \bar{a}' = 2\operatorname{Re}(a') = (-2 \mp \sqrt{3}).$$

Jiným postupem, jak celou rovnici řešit, je vydělení polynomem $x - 4$. Tak dostaneme kvadratickou rovnici, kterou řešíme diskriminantem.

Součtové vzorce

Rozepíšeme nyní $e^{i(x+y)}$ dvěma způsoby. Jednak lze psát

$$e^{i(x+y)} = \cos(x+y) + i \sin(x+y),$$

ale zároveň také

$$\begin{aligned} e^{i(x+y)} &= e^{ix} e^{iy} = (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) = \\ &= (\cos x \cos y - \sin x \sin y) + i(\cos x \sin y + \sin x \cos y). \end{aligned}$$

Srovnáním pravých stran dostáváme

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y, \\ \sin(x+y) &= \cos x \sin y + \sin x \cos y. \end{aligned}$$

Součtový vzorec pro tangens získáme jednoduše z výše uvedených rozšířením $(\cos x \cos y)^{-1}$

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\cos x \sin y + \sin x \cos y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y} = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.$$

Hodilo by se ještě dodat, jak získáme vzorce pro $\sin \alpha + \sin \beta$. Nejvýhodnější způsob, jak si vzorce z hlavy vybavit, uvažuje dvě komplexní jednotky e^α a e^β . Ty leží na kružnici a sečteme je jako vektory podle rovnoběžníkového pravidla. Výsledek bude mít směr $e^{(\alpha+\beta)/2}$ a velikost $2\cos((\alpha - \beta)/2)$. Hledaný vzorec je pak zřejmě jen imaginární část součinu posledních dvou čísel (směru a velikosti).

Bernoulliho limita a $o(1/N)$

Naším cílem bude ukázat, že platí

$$\left(1 + \frac{x}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right)\right)^N = e^x, \quad N \rightarrow \infty. \quad (61)$$

Nejdříve označme $f(N) = o(1/N)$. Z definice malého o platí $Nf(N) \rightarrow 0$ pro $N \rightarrow \infty$. Provedeme zde malý trik: Budeme počítat dvě vnořené limity místo jedné, tj.

$$(61) = \left(1 + \frac{x}{N} + \frac{Nf(N)}{N}\right)^N = \left(1 + \frac{x + Nf(N)}{N}\right)^N = e^{x + Nf(N)} \rightarrow e^x.$$

Zkuste si promyslet, že pro exponenciálu je takový postup v pořádku. Jde o to ukázat, že maximum rozdílu funkcí e^x a $B_N(x)$ na intervalu $[0,1]$ jde s rostoucím N k nule. Pak se o funkci $B_N(x)$ říká, že lokálně stejnoměrně konverguje k e^x a limity jdou prohazovat.

Kmitání v Yukawově potenciálu

Yukawův potenciál se podobá Coulombovu potenciálu, který zahrnuje klesání síly s druhou mocninou povrchu koule. Yukawův potenciál navíc bere v úvahu, že se interakční částice se vzdáleností rozpadají stejně jako v radioaktivitě.

Budeme uvažovat potenciální energii

$$U(x) = g \frac{e^{x/\lambda}}{x}, \quad (62)$$

kde g je konstanta, kterou nebudeme specifikovat, úměrná jednak konstantě k v potenciálu, jednak veličině charakterizující interakci s částicí (něco jako náboj). Nejdříve je potřeba určit rovnovážnou polohu. Toto je možné pomocí několika metod. První metodou je použití derivace. Má-li f v bodě x_0 minimum, platí $f'(x_0) = 0$. Další hojně používanou metodou porovnávání funkce f s konstantou. Hledáme nejmenší konstantu C takovou, aby rovnice $f(x) = C$ měla právě jedno řešení. Poslední zde zmíněnou metodou, kterou také použijeme, je rozvedení dané funkce do polynomu s přesností alespoň $o(\delta^2)$ okolo předpokládaného minima⁵⁵ x_0 . Pokud bude lineární člen nulový, je to ekvivalentní nulové derivaci v tomto bodě (viz definici derivace v druhé kapitole seriálu).

Uvažujme, že minimum je v bodě x_0 a platí $x = x_0 + \delta$ a $\delta \rightarrow 0$. Potom potenciální energii (62) platí

$$U(x) = g \frac{e^{(x_0+\delta)/\lambda}}{x_0 + \delta} = g \frac{e^{x_0/\lambda}}{x_0} \frac{e^{\delta/\lambda}}{1 + \frac{\delta}{x_0}}.$$

⁵⁵⁾ O minimum jde, pokud první nenulový člen rozvoje bude sudý. Pokud první nenulový bude lichý člen, jedná se o inflexní bod. Samozřejmě museli bychom použít rozvoj s dostatečnou přesností.

Ve druhém zlomku rozvineme čitatele i jmenovatele do polynomu s přesností $o(\delta^2)$ a obě závorky vzájemně vynásobíme. Jmenovatel je součtem geometrické řady s kvocientem $-\delta/x_0$.

$$\begin{aligned} U(x) &= g \frac{e^{x_0/\lambda}}{x_0} \left(1 + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{\delta^2}{2\lambda^2} + o(\delta^2) \right) \left(1 - \frac{\delta}{x_0} + \frac{\delta^2}{x_0^2} + o(\delta^2) \right) = \\ &= g \frac{e^{x_0/\lambda}}{x_0} \left(1 + \delta \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{x_0} \right) + \delta^2 \left(\frac{1}{2\lambda^2} - \frac{1}{\lambda x_0} + \frac{1}{x_0^2} \right) \right) + o(\delta^2). \end{aligned}$$

Jak jsme uvedli výše, aby měl potenciál minimum, musí být koeficient lineárního členu roven nule. Musí proto platit $x_0 = \lambda$. Pro potenciál proto platí

$$U(x) = g \frac{e}{\lambda} \left(1 + \frac{\delta^2}{2\lambda^2} + o(\delta^2) \right).$$

Srovnáme nyní potenciální energii $U(x)$ s potenciální energií pružinky, která je $U_{\text{pruž}} = k\delta^2/2$. Dostaneme tuhost k odpovídající pružinky

$$\hat{k} = \frac{ge}{\lambda^3}.$$

Proto je frekvence kmitání

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{ge}{m\lambda^3}}.$$

Čebyševovy polynomy

Naším cílem je ukázat, že pro každé n přirozené je $\cos(n \arccos(x))$ polynommem n -tého stupně. Omezme se pro začátek na $x \in \langle 0, 1 \rangle$. Označme z komplexní jednotku s argumentem α . Platí tedy $z = e^{i\alpha}$. Reálnou část této komplexní jednotky označme x . Platí tedy $x = \cos \alpha$. Budeme uvažovat pouze horní polovinu jednotkové kružnice, tj. $\alpha \in \langle 0, \pi \rangle$.

Studujme nyní výraz $\cos(n \arccos(x))$. Užijeme identity $|\sin \alpha| = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$.

$$\begin{aligned} \cos(n \arccos(x)) &= \cos(n\alpha) = \operatorname{Re}(e^{in\alpha}) = \operatorname{Re}((\cos \alpha + i \sin \alpha)^n) \\ &= \operatorname{Re}\left(\left(x + i\sqrt{1-x^2}\right)^n\right). \end{aligned}$$

Zamysleme se nyní nad výše získaným výrazem. Jaké členy z binomického rozvoje budou reálné a jaké ryze imaginární? Binomická věta nám říká, jak umocňovat dvojiteln na n -tou

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

kde kombinační číslo $\binom{n}{k}$, $k = 0, \dots, n$ najdeme jako k -té číslo na n -tém řádku Pascalova trojúhelníku. Protože víme, jak se umocňuje komplexní jednotka, víme, že

$$\begin{aligned} 2|k &\Rightarrow i^k \in \mathbb{R}, \\ 2 \nmid k &\Rightarrow i^{k-1} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Protože člen s odmocninou v reálné části umocňujeme vždy na sudou mocninu, odmocnina vymizí! A celý výraz je tedy polynomem.

Je jasné, že polynom neobsahuje mocniny x větší než n . Stačí dokázat, že koeficient před x je nenulový. Rozpisem příslušných členů v binomickém rozvoji zjistíme, že se koeficient před x^n rovná součtu sudých členů na n -tém řádku Pascalova trojúhelníku. Ale tento součet se z konstrukce Pascalova trojúhelníku rovná součtu celého $(n - 1)$ -tého řádku, který je 2^{n-1} , což je nenulové číslo.

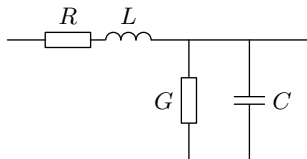
Tímto jsme ukázali, že

$$\cos(n \arccos(x)) = P_n(x)$$

platí na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. V některém dalším díle si ukážeme, že analytická funkce je jednoznačně určena svými hodnotami na množině s hromadným bodem,⁵⁶ což je i interval.

Úloha II. S ... zakomplexovaná

- Po jaké trajektorii (polodii) se pohybuje pól při pohybu tyče padající v rohu? Vyřešte užitím komplexních čísel.
- Pro $\varepsilon \rightarrow 0$ uvažujte otočení o úhel ε , které zapisujeme R_ε , a posunutí T_ε . Vyšetřete a porovnejte zobrazení $R_\varepsilon T_\varepsilon R_{-\varepsilon} T_{-\varepsilon}$ a komutátor $[R_\varepsilon T_\varepsilon]$.
- Otočení jsme v úvodní poznámce poskládali z miniaturních otočení $e^{i\vartheta} = (1 + i\vartheta/N)^N$. Dokážete pomocí exponenciály zapsat také posunutí funkce?
- Nakreslete obrázek, na co funkce z^2 zobrazí mříž rozteče ε . Za bonus můžete nakreslit obraz mříže po funkci $\cos(z)$.
- Pomocí komplexních čísel vypočtete impedanci střídavého obvodu série cívky, rezistoru a paralelně zapojeného kondenzátoru s odporem, přičemž obvod pokračuje iterativně dále (viz obr. 50).



Obr. 50. Koaxiální kabel

⁵⁶⁾ Hromadný bod je takový, že jeho libovolně malé okolí obsahuje alespoň jeden bod, a tedy i nekonečně mnoho bodů.

Pohyb pólu

Uvažujme tyč v poloze charakterizované: vzdáleností konce na podlaze od počátku x a vzdáleností druhého konce od počátku y . Předpokládejme, že se tyč otočí kolem bodu P o úhel $\Delta\varphi$, resp. dojde k posunutí konců tyče o Δx , Δy .

Uvažujme bod z , tento otočíme o malý úhel $\Delta\varphi$ okolo bodu P , potom pro novou polohu bodu \tilde{z} platí

$$\tilde{z} = P + e^{i\Delta\varphi} (z - P) \approx P + z - P + (z - P)i\Delta\varphi = z + (z - P)i\Delta\varphi. \quad (63)$$

Nyní aplikujme vztah (63) na pohyb konců tyče

$$\begin{aligned} x + \Delta x &= x + (x - P)i\Delta\varphi &\Rightarrow \Delta x &= (x - P)i\Delta\varphi, \\ iy + i\Delta y &= iy + (iy - P)i\Delta\varphi &\Rightarrow i\Delta y &= (iy - P)i\Delta\varphi. \end{aligned}$$

My však víme, že Δx a Δy jsou reálné, protože se tyč pohybuje po souřadnicových osách. Proto musí být výrazy $(x - P)$ ryze imaginární a $(iy - P)$ reálné číslo. Z této úvahy jednoduše plyne $P = x + iy$, což je pól otáčení.

Otáčíme svět

Z textu seriálu víme, že platí $T_\varepsilon(z) = a + z$, $R_\varepsilon(z) = e^{i\varphi} z \doteq (1 + i\varepsilon - \varepsilon^2/2)z$. Dosadíme nyní do výrazu z úkolu, kde budeme zanedbávat členy ε^3

$$\begin{aligned} R_\varepsilon T_\varepsilon R_{-\varepsilon} T_{-\varepsilon} &= (1 + i\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2) (\varepsilon + (1 - i\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2) (z - \varepsilon)) = \\ &= (1 + i\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2) (\varepsilon + z - i\varepsilon z - \frac{1}{2}\varepsilon^2 z - \varepsilon + i\varepsilon^2) = \\ &= (1 + i\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2) (z - i\varepsilon z - \frac{1}{2}\varepsilon^2 z + i\varepsilon^2) = \\ &= z - i\varepsilon z - \frac{1}{2}\varepsilon^2 z + i\varepsilon^2 + i\varepsilon(z - i\varepsilon z) - \frac{1}{2}\varepsilon^2 z = \\ &= z + i\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Jde tedy o translaci ve směru osy y . Zbývá vyšetřit komutátor. Komutátor je operátorů A a B je definovaný $[A, B] = AB - BA$. Vypočteme tedy $[R_\varepsilon T_\varepsilon]$

$$\begin{aligned} (1 + i\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2) (z + \varepsilon) - (\varepsilon + (1 + i\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2) z) &= \\ = -\varepsilon + \varepsilon (1 + i\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2) &= i\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Posouváme svět

Vyděme z toho, jak jsme definovali derivaci. Pro malé θ platí

$$f(z + \theta) = f(z) + \frac{df}{dz}\theta = \left(1 + \theta \frac{d}{dz}\right) f.$$

Nyní jsme našli operátor posunutí, je to výše uvedený výraz v závorce. Pokud tento „operátor“ budeme aplikovat na nějakou funkci, dostaneme její hodnotu

ve vzdálenosti θ , však pouze pro malé θ . Toto posunutí můžeme však aplikovat i vícekrát. Proto pro posunutí $\Delta = N\theta$ platí

$$f(z + \Delta) = \left(1 + \theta \frac{d}{dz}\right)^N f(z) = \left(1 + \frac{\Delta \frac{d}{dz}}{N}\right)^N f(z).$$

Tento výraz můžeme však zapsat jednodušším způsobem, uvážíme-li $N \rightarrow \infty$,

$$f(z + \Delta) = \left(1 + \frac{\Delta \frac{d}{dz}}{N}\right)^N f(z) = e^{\Delta \frac{d}{dz}} f.$$

Proto můžeme objekt $e^{\Delta \frac{d}{dz}}$ považovat za operátor posunutí o Δ .

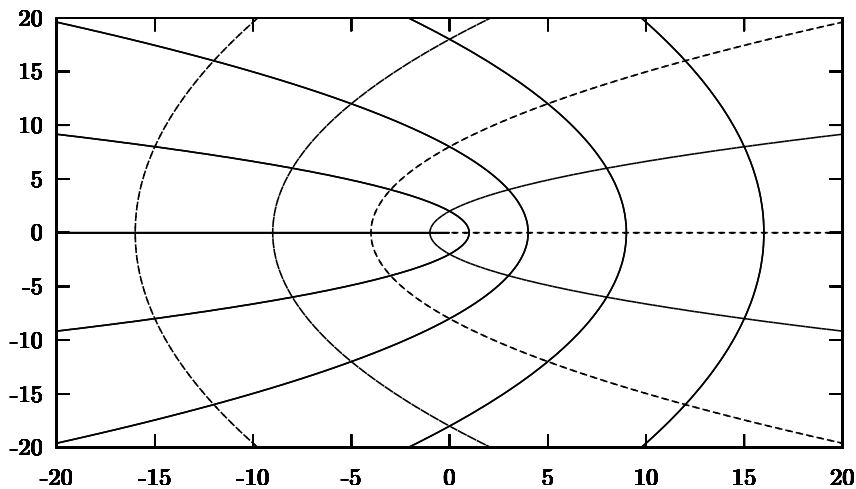
Zobrazení mřížky

Začneme nejdříve s funkcí $f(z) = z^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$. Pro svislé přímky mříže platí $m(t) = x_0 + it$, pro vodorovné $n(t) = t + iy_0$; jim odpovídající křivky jsou

$$\varphi(t) = (x_0^2 - t^2) + 2x_0ti,$$

$$\psi(t) = (t^2 - y_0^2) + 2y_0ti.$$

Vidíme, že hledané křivky jsou paraboly s vrcholem v počátku. Grafy si můžeme prohlédnout na obrázku 51.

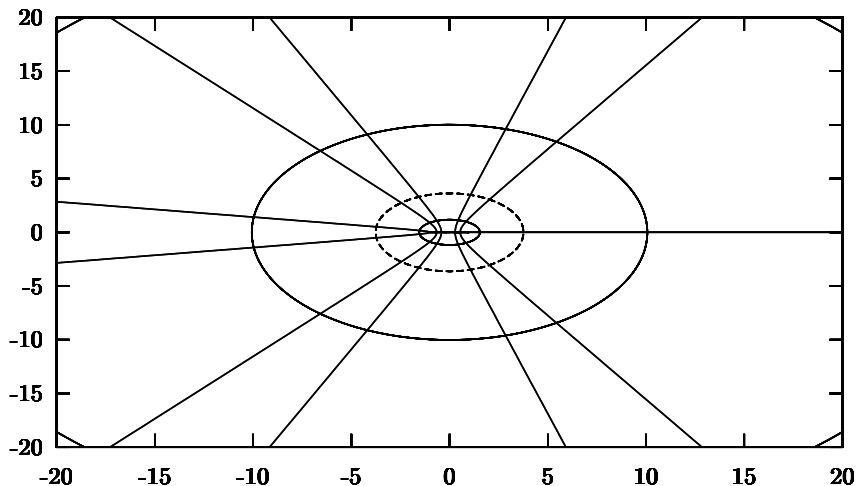


Obr. 51. Zobrazení mříže funkcí $f(x) = z^2$

Dále si zkusme nakreslit funkci $f(z) = \cos z$. Položíme-li $z = x + iy$ a $\cos z = (e^{iz} + e^{-iz}) / 2$, dostáváme

$$\cos z = \frac{1}{2} (e^{-y} + e^y) \cos x + \frac{1}{2} (e^{-y} - e^y) \sin x = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y.$$

Je vidět, že hledanými křivkami jsou elipsy se středem v počátku. Můžeme si je prohlédnout na obrázku 52.



Obr. 52. Zobrazení mříže funkcí $f(z) = \cos z$

Impedance proudu

Protože uvažujeme nekonečně dlouhý kabel, jeho impedance se nezmění, ani pokud odebereme jeden článek. Ujijeme nyní vztahu pro sériové a paralelní zapojení odporů. Proto platí

$$\begin{aligned} Z &= R + i\omega L + \left(i\omega C + \frac{1}{G} + \frac{1}{Z} \right)^{-1}, \\ Z &= R + i\omega L + \left(\frac{i\omega C G Z + Z + G}{Z G} \right)^{-1}, \\ Z &= R + i\omega L + \frac{Z G}{i\omega C G Z + Z + G}, \\ 0 &= Z^2 - (R + i\omega L) Z - G \frac{R + i\omega L}{i\omega C G + 1}. \end{aligned}$$

Pro typický koaxiální kabel platí $C \rightarrow 0$ a $G \rightarrow \infty$. Díky tomu lze pro malá ω zanedbat lineární člen a určit

$$Z = \sqrt{\frac{R + i\omega L}{i\omega C + \frac{1}{G}}}.$$

Úloha III. S ... *hluboká orba*

- a) Dopočítejte fyzikální význam konstanty a pro funkci $f(z) = ai/z$, znáte-li délkovou hustotu náboje τ .
- b) Vypočítejte a nakreslete ekvipotenciály a silokřivky pole v okolí rohu, který má vrcholový úhel ϑ . Náповěda: použijte funkci tvaru $w(z) = Az^s$, kde s je vhodná reálná konstanta.
- c) Určete pole, které generuje elektrický dublet. Dublet jsou dvě tyče vzdálené d s opačnou nábojovou hustotou, přičemž $d\tau = \text{konst}$. Zajímá nás limita $d \rightarrow 0$. Malá náповěda: platí $\ln(1+x) \approx x$ pro x blízké 0.
- d) Rozmyslete si, co se stane, pokud existující komplexní potenciál $w(z)$ zobrazíme jinou holomorfní funkcí $v(z)$. Bude potenciál tvaru $v(w(z))$ i nadále řešit rovnice elektrostatiky?

Neznámá konstanta

Podle zadání odpovídá $f(z)$ vodiči s konstantní délkovou hustotou náboje, pro který platí podle posledního vzorce $E = a/r$, kde r je vzdálenost od vodiče. U takového vodiče však snadno spočteme z Gaussova zákona. Představme si válec délky l , jehož osou je nabitá přímka. Náboj v tomto válci je $l\tau$, kde τ značí délkovou hustotu náboje na přímce. Z translační symetrie má pak elektrické pole na podstavách stejný směr, ale kvůli opačným normálám se při průmětu na normálu plochy vyruší. Zbude tak jen člen na plášti, kde má pole E stejnou velikost a normálový směr, takže platí

$$\frac{l\tau}{\varepsilon_0} = 2\pi r E \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}.$$

Ekvipotenciály v koutě

Podle zadání by měl být vhodný komplexní potenciál $w(z) = Az^s$. Pro klasický potenciál by tudíž platilo

$$\varphi = -\text{Im } w(z) = -\text{Im } A|z|^s (\cos s\alpha + i \sin s\alpha) = -A|z|^s \sin s\alpha,$$

takže ekvipotenciály by měly tvar

$$C = |z|^s \sin s\alpha \quad \Rightarrow \quad |z| = \sqrt[s]{\frac{C}{\sin s\alpha}}.$$

s -tá odmocnina je ovšem prostá funkce a závislost $|z| = |z|(\alpha)$ si můžeme představit v polárním grafu. Pokud se jmenovatel blíží k nule (uvažujme jen úhly, kde je $\sin s\alpha > 0$), vzdálenost roste nade všechny meze. Závislost má tedy tyto vlastnosti:

- a) roste nade všechny meze pro $\alpha \rightarrow 0^+$ a $\alpha \rightarrow \pi/s^-$,
- b) je monotónní v intervalech $(0, \pi/2s)$ a $(\pi/2s, \pi/s)$,
- c) minima nabývá tudíž pro $\alpha = \pi/2s$, kdy $|z|_{\min} = \sqrt[s]{C}$ a platí, že pro $C \rightarrow 0$ je i $|z|_{\min} \rightarrow 0$.

Z těchto tří vlastností plyne, že uvažovaná funkce je skutečně tím správným potenciálem, který odpovídá potenciálu v rohu o vrcholovém úhlu ϑ , pokud volíme $\vartheta = \pi/s$. Siločivky se pak spočtou z původního potenciálu jako komplexní derivace, čili $f(z) = w'(z) = E_y + iE_x$. V tomto případě je

$$f(z) = E_y + iE_x = As|z|^{s-1} (\cos(s-1)\alpha + i\sin(s-1)\alpha).$$

Dublet

Umístíme obě tyče tak, aby protnul komplexní rovinu v reálných bodech $\pm d/2$. Nechť mají tyče délkovou hustotu náboje $\pm\tau$. Podle zadání máme zřejmě vypočítat ekvipotenciály elektrického pole. Potenciál pro obě tyče je dán

$$w = w_+ + w_- = ia \ln(z - d/2) - ia \ln\left(z + \frac{d}{2}\right) = ia \ln\left(1 - \frac{d}{z + \frac{d}{2}}\right),$$

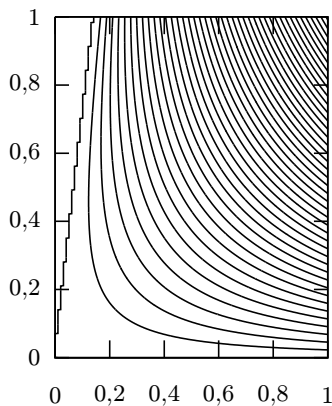
kde lze pro $d \ll |z|$ použít přiblížení $\ln(1+x) \approx x$ platné pro $x \rightarrow 0$ uvedené v zadání (to lze splnit, pokud budeme tyče blížit k sobě $d \mapsto d/N$ a zároveň zvyšovat délkovou hustotu $\tau \mapsto N\tau$, přičemž $d\tau$ zůstává konstanta a přejdeme $N \rightarrow \infty$). Pak platí

$$w = ia \left(-\frac{d}{z + \frac{d}{2}} \right) \approx -\frac{iad}{z}.$$

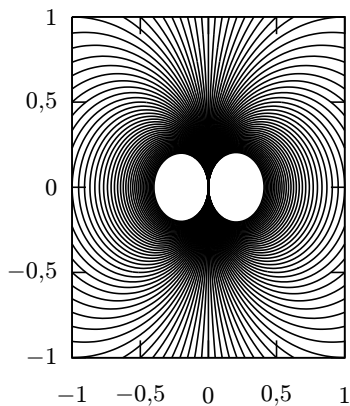
Použijeme-li výsledek z první části úlohy $a = \tau/(2\pi\varepsilon)$, pro potenciál plyne

$$\varphi = -\operatorname{Im} w(z) = \operatorname{Im} \frac{iad\bar{z}}{|z|^2} = \frac{d\tau}{2\pi\varepsilon} \frac{x}{|z|^2}.$$

čili ekvipotenciály mají tvar kružnic lokalizovaných vždy v jedné polorovině, pro které se se zvětšujícím poloměrem posouvá střed směrem od druhé tyče.



Obr. 53. Ekvipotenciály v koutě



Obr. 54. Ekvipotenciály v okolí dubletu

Skládání holomorfních potenciálů

Není pochyb o tom, že složením holomorfních funkcí dostaneme opět holomorfní funkci (připomeňme si, že holomorfní funkce má kroučivou vlastnost a že složením dvou funkcí dostaneme opět funkci s kroučivou vlastností, takže malé čtverečky se opět zobrazí na malé čtverečky).

Ovšem v diskuzi ve třetí kapitole jsme ukázali, že jakákoliv holomorfní funkce $f(z)$ splňuje rovnice elektrostatiky (až na okrajové podmínky, tj. potenciál na vodičích). Ale teď máme zadaný holomorfní komplexní potenciál $w(z)$, který má z definice holomorfnosti i holomorfní derivaci $f(z)$ a tudíž příslušná elektrická intenzita opět splňuje rovnice elektrostatiky. Jediná věc, na kterou si musíme dát pozor, aby rovněž splňovala okrajové podmínky, tj. potenciály na vodičích.

Úloha IV.5 ... Möbiova transformace a konformní zobrazení

- Dokažte tvrzení d), podle něhož Möbiova transformace zachovává úhly. Jedna z možností je uvést si, že v kruhové inverzi existují kružnice, které se zobrazují samy na sebe.
- Najděte podmínku na koeficienty Möbiovy transformace, aby zobrazovala komplexní kruh na komplexní kruh ($|z| \leq 1$) a najděte konkrétní transformaci, která zobrazuje komplexní kruh na horní komplexní polorovinu. Co to fyzikálně znamená?
- Podle teorie relativity se tělesa pohybující se rychlostí blízkou rychlosti světla zkracují (Lorentzova kontrakce). To ovšem ještě neznamená, že bychom je viděli kratší (například, že bychom místo pohybující se koule viděli pohybující se elipsoid). Využijte představy, který jsme v tomto díle vybudovali, abyste odvodili, že předměty letící rychlostí světla vidíme o kousek pootočené, nikoliv zkrácené (Terellova rotace).

Möbiova transformace zachovává úhly

Jak jsme si ukázali v předešlých dílech, holomorfní funkcí realizované zobrazení nám zobrazuje čtverečky na čtverečky, které jsou zvětšené/zmenšené a pootočené, nanejvýš zrcadlené. Budeme-li nyní uvažovat libovolný úhel, tak jej můžeme pomocí čtverečků vymezit např. jako na obrázku 55.



Obr. 55

Bude-li větší čtvereček pouze posunut, otočen, přeškálován nebo zrcadlen, bude toto platit i pro menší z nich a jimi vymezený úhel bude nezměněn.

Ukažme si, že funkce $f(z) = (az + b)/(cz + d)$ je holomorfní. Toto ukážeme tak, že ji zderivujeme.

$$f'(z) = \frac{1}{\Delta z} (f(z + \Delta z) - f(z)) = \frac{1}{\Delta z} \frac{az + b}{cz + d} \cdot \left(\frac{1 + \frac{a}{az+b} \Delta z}{1 + \frac{c}{cz+d} \Delta z} - 1 \right).$$

Ještě si rozeberme několik problematických případů. Pokud $az + b = 0$, potom nemůžeme provést vytýkání v čitateli a výraz pro derivaci by měl tvar

$$f'(z) = \frac{1}{\Delta z} \frac{a\Delta z}{cz + d + c\Delta z} = \frac{a}{cz + d},$$

tedy v tomto bodě derivace existuje a není žádný problém. Pokud by platilo, že $cz + d = 0$, tak Möbiova transformace zobrazuje takovýto bod z do nekonečna, ale budeme-li uvažovat jakýkoli libovolně blízký bod, tak již nebudeme mít problém s holomorfností, ale velikost zkoumaného úhlu se změní libovolně málo.

Pro ostatní hodnoty proměnné z již můžeme výraz pro derivaci upravovat libovolně. Protože je Δz malé, jmenovatel rozvineme, jako součet geometrické řady a zanedbáme členy řádu Δz^2 a vyšší

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{1}{\Delta z} \frac{az + b}{cz + d} \left(\left(1 + \frac{a}{az + b} \Delta z \right) \left(1 - \frac{c}{cz + d} \Delta z \right) - 1 \right) \\ &= \frac{az + b}{cz + d} \left(\frac{a}{az + b} - \frac{c}{cz + d} \right) = \frac{a(cz + d) - c(az + b)}{(cz + d)^2}. \end{aligned}$$

Protože existuje derivace, tak toto zobrazení zachovává úhly.

Hledání transformací

Má-li nějaká transformace zobrazovat např. kruh $|z| < 1$ na sebe, musí být transformací identickou, to znamená, že $f(z) = z$. Pro koeficienty Möbiovy transformace to znamená: $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 1$.

Möbiova transformace má relativně málo volných parametrů, proto konstanty pro transformaci odpovídající zobrazení kruhu na polovinu. V korespondenci s geometrickou představou budeme požadovat aby platilo: $f(i) = \infty$, $f(-i) = 0$ a pro ostatní z , aby byla $f(z)$ reálná. Z první podmínky plyne: $a(-i) + b = 0$, z druhé $ci + d = 0$. Dáme-li tyto podmínky dohromady, dostáváme

$$f(z) = \frac{az + ai}{cz - ci}.$$

Dosadíme-li např. $z = 1$, aby $f(1)$ byla reálná můžeme položit např. $c = 2i$, $a = 1$. Výsledná transformace bude mít tvar

$$f(z) = \frac{z + i}{2iz + 2}.$$

Ještě musíme ověřit, zdali jde opravdu o zobrazení na horní, nikoli dolní polovinu, platí $f(0) = i/2$, proto jsme zvolili správné znaménko u koeficientů a a c .

Pohybující se koule

Podobná úloha byla zadána ve 22. ročníku v 6. sérii. Její řešení naleznete na webové adrese <http://fykos.cz/rocnik22/reseni/reseni6-3.pdf>.

Úloha V.S ... aviatická

- Popište geometrickou konstrukci (pomocí kružítka a pravítka) profilu Žukovského.
- Zkuste nakreslit proudnice v okolí profilu Žukovského. Zvolte si takové parametry d/l a m/l , aby měly praktické opodstatnění.
- Jaká vztlaková síla působí na rovnou desku? Jaká vztlaková síla působí na desku tvaru kruhového oblouku?
- Zkuste nakreslit profil křídla odpovídající Karmánově-Trefftzově transformaci.

Geometrická konstrukce

Ujasněme si nejdříve, co potřebujeme znát, abychom dokázali provádět operace s komplexními čísly.

- Sčítání:* Chceme-li sečíst dva vektory, musíme jeden z nich umět přenést do koncového bodu druhého a máme-li vytyčen směr, kružítkem přeneseme jeho velikost. Toto je na eukleidovském prostoru jednoduché, avšak v jiné geometrii, např. na povrchu koule to nemusí být snadné, dokonce ani jednoznačné.
- Násobení reálných čísel:* Vynásobíme-li dvě reálná čísla, získáme obsah obdélníku se stranami těchto délek. Pokud chceme umět dvěma reálným číslům přiřadit jiné reálné číslo, které je jejich součinem, musíme vědět, jaký obsah má jednotkový čtverec, tj. musíme vědět, jak je dlouhá jednotka. Pro dělení platí obdobná podmínka.
- Komplexní sdružení:* Chceme-li určit, jaké komplexní číslo je komplexně sdružené, musíme jej zrcadlit okolo osy x , a musíme proto vědět, kde je počátek a jaký směr odpovídá x -ové ose.
- Násobení komplexních čísel:* Abychom uměli vynásobit dvě komplexní čísla musíme vynásobit jejich velikost a sečíst jejich argumenty, k této operaci potřebujeme ještě vědět, jaký je kladný směr reálné osy.
- Odmocňování:* k -tou odmocninou z komplexní jednotky jsme si zavedli jako komplexní číslo mající k -krát menší argument. Proto ještě potřebujeme vědět, jaký je kladný smysl otáčení.

Máme zadáno komplexní číslo z a máme sestrojít komplexní číslo $z + 1/z$. Hlavním úkolem je sestrojít číslo $1/z$. Protože platí $z = |z| \exp(i \arg z)$, můžeme psát

$$1/z = 1/|z| e^{-i \arg z}.$$

Druhý člen je pouze směr a ten dokážeme sestrojít, pokud víme, kde je osa x . Zaměříme se na sestrojení $1/|z|$. Můžeme využít Eukleidovu větu o výšce, sestrojíme-li pravoúhlý trojúhelník s výškou jednotkové délky a jedním přilehlým úsekem délky $|z|$, druhý úsek bude mít délku $1/|z|$.

Nyní stačí tento příspěvek přičíst k původnímu vektoru a jsme hotovi.

Proudnice v okolí profilu

Jak jsme uvedli v textu seriálu, proudění v okolí profilu je pouze obrazem proudění v okolí válce, jako byl samotný profil obrazem válce. Proto musíme proudnice určené rovnicí

$$\operatorname{Re} w(z) = \text{konst.},$$

kde $w(z)$ je komplexní potenciál proudění, zobrazit Žukovského transformací. $\xi = z + l^2/z$.

Vztlaková síla na desku

Jak jsme odvodili v textu seriálu, pro vztlakovou a odporovou sílu platí vztahy

$$R_y = 4\pi\rho \left(d + \sqrt{m^2 + l^2} \right) U_\infty^2 \sin(\alpha + \beta) \cos \alpha,$$

$$R_x = 4\pi\rho \left(d + \sqrt{m^2 + l^2} \right) U_\infty^2 \sin(\alpha + \beta) \sin \alpha.$$

Transformace vedoucí na rovnou desku odpovídá $m = 0$, $d = 0$, tj. $\beta = 0$. Proto vztlaková síla je

$$R_y = 2\pi\rho l U_\infty^2 \sin 2\alpha,$$

kde délka desky je $4l$, ρ je hustota okolního vzduchu, U_∞ je dopředná rychlost a α je úhel náběhu. Je vidět, že maximální vztlakové síle odpovídá úhel 45° , což je typicky maximální výchylka kormidel.

Vztlaková síla na desku tvaru části válce

Abychom dostali profil „deskovitého“ tvaru, musí mít dva ostré rohy, proto původní zobrazovaná kružnice musí procházet body $\pm l$, proto $d = 0$. Na nejvyšší bod se musí ze symetrie zobrazit body $i(m \pm a)$, pokud jsme označili a poloměr zobrazované kružnice. Dosadíme-li do transformačního vztahu, zjistíme, že se zobrazují na bod $2mi$. Nyní víme, že profil prochází body $\pm 2l$ a bodem $2mi$. Z jednoduché geometrie určíme jeho poloměr

$$r = \frac{l^2 + m^2}{m} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{1}{2} \left(r - \sqrt{r^2 - 4l^2} \right).$$

Nyní musíme uvažovat pouze menší kořen, protože pokud by bylo $m > r$, nemohla by zobrazovaná kružnice procházet body $\pm l$.

Pro vztlakovou sílu vychází

$$R_y = 4\pi\rho r \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - 4\frac{l^2}{r^2}} \right)} U_\infty^2 \sin(\alpha + \beta) \cos \alpha, \quad \beta = \arctg \frac{m}{l}.$$

Užili jsme stejného značení jako pro rovnou desku.

Karmánův–Trefftzův profil

Budeme jej konstruovat stejně jako profil Žukovského, tj. budeme požadovat, aby měl ostrou špičku, proto zobrazovaná kružnice musí procházet singulárním bodem transformace

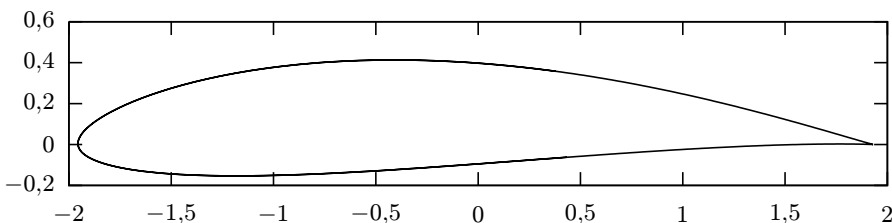
$$\frac{\xi - nl}{\xi + nl} = \left(\frac{z - l}{z + l} \right)^n .$$

Nyní vypočteme diferenciál rovnice uvedené výše, tj. obě strany zderivujeme dle parametru p .⁵⁷

$$\frac{2nl}{(\xi + nl)^2} d\xi = 2nl \frac{(z - l)^{n-1}}{(z - l)^{n+1}} dz \Rightarrow \frac{dz}{d\xi} = \frac{(z + l)^{n-1}}{(z - l)^{n+1}(\xi + nl)^2} .$$

Singulárním bodem této transformace jsou tedy body $z = l$ a $\xi = -nl$, kterému odpovídá $z = -l$.

Profil pro $m/l = 0,1$ a $d/l = 0,05$ je na obrázku 56.



Obr. 56. Karmánův profil, $m/l = 0,1$ a $d/l = 0,05$

⁵⁷⁾ Pokud L a P značí jednotlivé strany rovnice, platí $0 = \frac{d(L-P)}{dp} = \frac{dL}{d\xi} \frac{d\xi}{dp} - \frac{dP}{dz} \frac{dz}{dp}$, z toho vyplývá $\frac{dz}{d\xi} = \frac{dL}{d\xi} / \frac{dP}{dz}$.

Úloha VI. S ... všehočut'

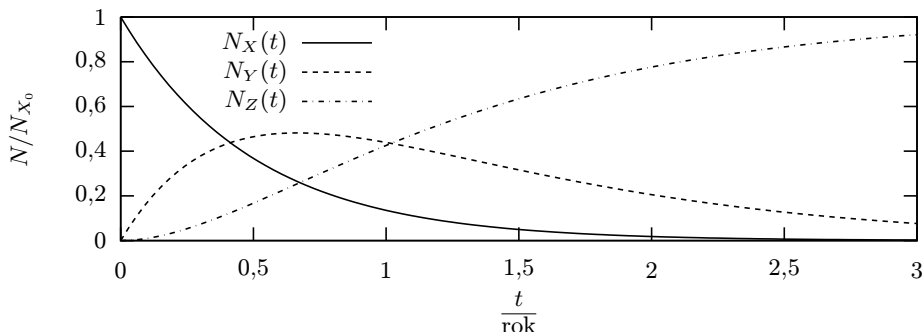
- a) Předpokládejme, že máme radioaktivní látku X , která se rozpadá na látku Y s poločasem rozpadu T_1 , ta se následně rozpadá na stabilní látku Z s poločasem rozpadu T_2 . Jak závisí koncentrace látky Y na čase, pokud jsme na počátku měli pouze látku X ?
- b) Vypočtete, jak vypadá difrakční obrazec vzniklý průchodem světla o vlnové délce λ štěrbinou šířky d .
- c) Pokuste se najít frekvence ω , pro které existuje řešení vlnové rovnice na čtverci o hraně a . Kolik různých funkcí odpovídá jedné úhlové frekvenci?
 Nápověda: Pro prostorovou část předpokládejte řešení ve tvaru $A(x, y) = X(x)Y(y)$.

Rozpad

Rozmysleme si nejprve, jak to je s poločasem rozpadu T . Víme, že pro množství radioaktivní látky v čase t platí

$$N(t) = N_{t=0} 2^{-t/T} = N_{t=0} \exp(-t/T \ln 2) = N_{t=0} \exp(-t/\lambda), \quad \lambda = \frac{T}{\ln 2},$$

kde λ je tzv. rozpadová konstanta.



Obr. 57. Závislost relativního množství radioaktivních látek na čase pro $\lambda_{XY} = 2 \text{ rok}^{-1}$ a $\lambda_{YZ} = 1,1 \text{ rok}^{-1}$

Studujme nejprve rozpad $X \rightarrow Y$, množství látky X budeme značit N_X , látky Y N_Y , atd. Napíšeme si pro něj diferenciální rovnici

$$\frac{dN_X}{dt} = -\lambda_{XY} N_X.$$

Budeme předpokládat řešení ve tvaru exponenciály, vizte text seriálu. Zjistíme, že platí

$$N_X(t) = N_{X_0} \exp(-\lambda_{XY} t).$$

Nyní budeme zkoumat druhý rozpad $Y \rightarrow Z$. Pro množství látky Y platí

$$\frac{dN_Y}{dt} = -\lambda_{YZ}N_Y + \lambda_{XY}N_X, \quad (64)$$

druhý člen se zde vyskytuje, protože látky Y přibývá rozpadem látky X . Protože zde máme soustavu dvou diferenciálních rovnic, budeme předpokládat tvar řešení N_Y ve tvaru součtu dvou exponenciál, tj. $N_Y = A \exp(-\alpha_1 t) + B \exp(-\alpha_2 t)$ a dosadíme do (64). Dostáváme

$$\begin{aligned} & -A\alpha_1 \exp(\alpha_1 t) - B\alpha_2 \exp(-\alpha_2 t) = \\ & = -\lambda_{YZ}A \exp(-\alpha_1 t) - \lambda_{YZ}B \exp(-\alpha_2 t) + N_{X_0} \lambda_{XY} \exp(-\lambda_{XY} t). \end{aligned}$$

Aby tato rovnice mohla být splněna pro všechny časy, musí být součet koeficientů u stejných exponenciál roven nule; protože $N_{X_0} \neq 0$, musí být $\alpha_1 = \lambda_{XY}$. Pak platí

$$\begin{aligned} -A\alpha_1 &= -A\lambda_{YZ} + \lambda_{XY}N_{X_0}, \\ -B\alpha_2 &= -B\lambda_{YZ}. \end{aligned}$$

Z toho vyplývá $\alpha_2 = \lambda_{YZ}$, B je volný parametr, který musíme dopočítat z počáteční podmínky, $A = \lambda_{XY}N_{X_0}/(\lambda_{YZ} - \lambda_{XY})$. Pro množství látky Y potom můžeme psát

$$N_Y(t) = N_{X_0} \frac{\lambda_{XY}}{\lambda_{YZ} - \lambda_{XY}} (\exp(-\lambda_{XY} t) - \exp(-\lambda_{YZ} t)).$$

Konstantu B jsme zvolili tak, aby $N_Y(0) = 0$. Protože se žádná látka neztrácí, platí $N_Z(t) = N_{X_0} - (N_X(t) + N_Y(t))$. Množství jednotlivých složek je uvedeno na grafu v obrázku 57.

Difrakce

Abychom určili tvar difrakčního obrazce ve veliké vzdálenosti, musíme vypočítat Fourierovu transformaci šterbiny. Protože je problém translačně symetrický podél osy šterbiny, omezíme se jen na jeden rozměr, platí

$$p(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d/2}^{d/2} e^{ikx} dx = \frac{1}{ik\sqrt{2\pi}} (e^{ikd/2} - e^{-ikd/2}) = \frac{\sqrt{2/\pi}}{ik} \sin(kd/2).$$

Pozorovaná intenzita osvětlení je kvadrátem Fourierova obrazu. Platí

$$I = I_0 \left(\frac{\sin(kd/2)}{kd/2} \right)^2,$$

kde jsme všechny konstanty zahrnuli do I_0 , tj. osvětlení přímo za šterbinou. Argument $kd/2$ závisí pouze na vlnové délce a parametrech úlohy, tj. d a lineárně na úhlu odchyly φ . Z textu víme, že platí $\varphi = k\lambda/2\pi$, tj. $kd/2 = \pi d/\lambda \cdot \varphi$.

Kmitání

Máme za úkol najít řešení vlnové rovnice pro čtverec s hranou a . Pro výchylku $U(x, y, t)$ platí

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Vypočteme-li Fourierovu transformaci této rovnice v časové proměnné, dostáváme

$$\frac{\partial^2 \hat{u}(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}(x, y)}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \hat{u}(x, y) = 0.$$

V zadání je napsáno, že máme řešení hledat ve tvaru součinu dvou funkcí závislých pouze na jedné souřadnici. Tj. $\hat{u} = X(x)Y(y)$, dosadíme-li toto do rovnice výše a vydělíme-li \hat{u} , dostaneme

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{\omega^2}{c^2} = 0,$$

aby tato rovnice platila pro všechna x a y , musí být první dva členy konstantní. To nám ale připomíná rovnici pro strunu z textu seriálu. Musí platit

$$X_l(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{a} l\right), \quad l \in \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Potom platí $X_l''(x)/X_l(x) = (\pi/a)^2 l^2$. Podmínka na úhlovou rychlost kmitání je proto

$$\omega = \frac{\pi}{ca} \sqrt{l^2 + m^2},$$

kde m odpovídá počtu uzlů funkce $Y(y)$. Celkové řešení je potom

$$u_{lm}(x, y, t) = u_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a} l\right) \sin\left(\frac{\pi y}{a} m\right) \sin\left(\frac{\pi}{ca} \sqrt{l^2 + m^2} t\right).$$



Akce FYKOSu

Podzimní soustředění v Ostravici

Podzimní soustředění se uskutečnilo od 6. do 13. listopadu 2010 v Ostravici v Beskydech.

Organizátoři

Pavel Brom, Jan Humplík, Tomáš Jirotko, Karel Kolář, Lukáš Ledvina, Jakub Michálek, Marek Nečada, Lada Peksová, Aleš Podolník, Jáchym Sýkora, Kryštof Touška, Tereza Zábojníková

Účastníci

Tomáš Axman, Zuzana Bogárová, Jan Brandejs, Martin Bucháček, Veronika Dočkalová, Jakub Doležal, Lubomír Grund, Alena Harlenderová, Samuel Havadej, Anna Chejnovská, Jiří Jelínek, Kateřina Jiráková, Dominika Kalasová, Kristýna Kohoutová, Gabija Maršalkaite, Ondřej Maslikiewicz, Filip Murár, Jiří Nárožný, Kristína Nešporová, Tomáš Pikálek, Samuel Puček, Jan Sopoúšek, Lukáš Timko, Jakub Vošmera

Legenda

Osidlování Severní Ameriky pokračuje svižným tempem, a tak se prezident Lincoln v podání Aleše rozhodl pověřit 4 stavitele, aby spojili břehy obou oceánů pacifickou železnicí. Kdo toto spojení dokončí, toho odměna nemine. Účastníci FYKOSího soustředění byli tedy sezváni do osady Sharpmore (rozuměj Ostravice v Beskydech), aby přiložili ruku k dílu.

Nejdříve bylo potřeba projít neuvěřitelně složitou americkou byrokracií a získat americké občanství. Kdo prošel touto nesmírně náročnou procedurou, byl naverbován do stavební čety jedním ze čtyř velkých stavitelů a dal se do práce, neboť odměna byla vypsána veliká. Na velké mapě Spojených států, která posloužila jako hrací plán, rychle začaly přibývat pražce. V kláních vpravdě amerických bylo zapotřebí vydělávat spousty dolarů, neboť cena pražců kolísala, jak útoky indiánů ovlivňovaly trh. Tak, za účelem výděлку, závodili stavaři v koňských dostizích o nejkoňovitějšího koně, vyspravovali telegrafní síť, jak si vláda přála, nebo stavěli mosty přes široká údolí ze špaget a marshmallonů, neboť lepší materiál čínané neposlali. Po vzoru Limonádového Joa jali se dojit mléko z vemen divokých krav, neboť lihovina není přítelem žádného pistolníka.

Železnice byla dostavěna, což bylo americkým národem s jásotem přijato a oslavy trvaly až do rána. Pilo se a tančilo, až v místním saloonu nezbyla ani kapka virgin rumu. Zbohatlíci se mohli vydat domů, na svůj starý kontinent.

Díky našemu sponzorovi – ČEZ – účastníci navštívili elektrárnu v Dětmarovicích. Podnikli jsme výstup na Smrk, nechyběla ni již tradiční šifrovačka ani noční labyrint.

Fotky



Závod „koňských“ s přezení

Jarní soustředění v Domašově nad Bystřicí

Jarní soustředění 2011 se odehrálo ve dnech 19. až 26. května v Domašově nad Bystřicí.

Organizátoři

Pavel Brom, Jan Humplík, Tomáš Jírotka, Karel Kolář, Michal Koutný, Lukáš Ledvina, Aleš Podolník, Jana Poledníková, Marek Scholz, Tereza Steinhartová, Jáchym Sýkora, Kryštof Touška, Tereza Zábojníková

Účastníci

Veronika Dočkalová, Jakub Doležal, Martin Gajdošík, Lubomír Grund, Alena Harlenderová, Jiří Juřena, Dominika Kalasová, Kristýna Kohoutová, Tomáš Kořínek, Pavel Kratochvíl, Ota Kunt, Ondřej Míl, Filip Murár, Jan Sopoušek, Lukáš Timko, Tomáš Valíček, Ivo Vinklárek, Jakub Vošmera

Legenda

In a galaxy far far away. . .

. . . byla založena Jedi akademie, která rekrutovala nové učedníky z řad všech obyvatel galaxie. Taktéž řešitelé Fykosu přijali výzvu a dostavili se na měření midichlorianů v krvi, aby se ukázalo, zda se mohou stát rytíři Jedi. Měření našťestí dopadlo příznivě u všech účastníků.

Luke a Leia a mistr Yoda vedli tři hlavní koleje Jedi akademie, z nichž každá chtěla dosáhnout co nejlepších výsledků. Darth Vader byl již dávno poražen, a tak jim nic nemohlo bránit ve studiu a získávání cenných kreditů.

Při studiu místní matriky byla ovšem odhalena nebezpečná pravda. Darth Vader předal své geny dál. Na základně Jabubovo se opevnily ještě zcela nezlikvidované zbytky Impéria, aby bránily následníka temného trůnu – Darth Jabuba.

Jabub se ukázal být schopným vůdcem, neboť se mu dařilo dělat Jedi akademii čtené nepříjemnosti. Budoucí Jediové tak museli zachraňovat mistra Yodu, když mu pod vlivem Darth Jabubova jedu odumíraly orgány, museli proplout se svými loďmi poslepu rojem meteoritů, museli v litém boji za stavu beztíže strhat z vojáků impéria skafandry. Nakonec se ale povedlo získat souřadnice sídla Jabubovo. Mistr Yoda svedl s Darth Jabubem finální souboj, kdy konečně skřížili světelné meče. Jabubovo se s ohromným výbuchem porouchelo tam, kam patří, a galaxie mohla být konečně opět svobodná.

Fotky



Zaujatí posluchači

Den s experimentální fyzikou 2011

Den s experimentální fyzikou je tradiční akce FYKOSu, během které se účastníci mohou porozhlédnout po fyzikálních pracovištích na MFF UK. Na vlastní oči mohou vidět, jak se dělá experimentální fyzika dnešních dní. Nejčastější jsou exkurze k jadernému reaktoru, na pracoviště elektronové mikroskopie, katedru nízkých teplot, pracoviště nukleární magnetické rezonance, ale objevují se i mnohé další.

Letošní – již sedmý DSEF začal populární přednáškou na téma gravitačního mikročočkování. Dopolední část zahrnovala návštěvu na 13 různých pracovištích náležejících pod Matematicko-fyzikální fakultu Univerzity Karlovy na Karlově (pod FÚ UK, KCHFO, KFKL a KFM a navíc jako jedna z exkurzí byly nízké teploty s populárními pokusy s kapalným dusíkem od KFNT). Odpoledne pak účastníci

zavítali na PALS (Prague Asterix Laser System) a tokamak Compass Fyzikálního ústavu AV ČR.

Fotky



Exkurze v hale tokamaku

FYKOSí Fyziklání 2011

Pátý ročník Fykosího fyziklání proběhl v pátek 11. února 2011 v prostorách Matematicko-fyzikální fakulty UK na Karlově. Soutěže se účastnilo 31 týmů. Nejlepší školou se stalo gymnázium Plzeň, Mikulášské náměstí s 25 vyřešenými úlohami za celkem 107 bodů, druhé místo obsadilo gymnázium Jírovcova z Českých Budějovic (22 úloh, 96 bodů) a na třetím místě skončil tým z Gymnázia P. de Coubertina z Tábora (21 úloh, 95 bodů).

Pravidla soutěže

Soutěže se účastní družstva s nejvýše 5 členy. Družstvo může tvořit i méně členů, ale žádné zvýhodnění nebude poskytnuto. Na začátku soutěže dostane každé družstvo 7 příkladů. Za každý správně vyřešený příklad dostane družstvo nový příklad. Za správně vyřešený příklad se považuje příklad se správným výsledkem. Samotná soutěž probíhá 3 hodiny. Při řešení příkladů se smí používat kalkulačka a MFCh tabulky.

Výsledky

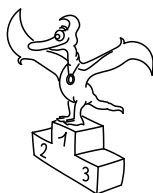
- | | | |
|-----|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|
| 1. | Gymnázium, Mikulášské nám., Plzeň | 107 bodů |
| | <i>Filip Hlásek, Michaela Hubatová, Hynek Kasl, Sven Künkel, Jan Škoda</i> | |
| 2. | Gymnázium Jírovcova České Budějovice | 96 bodů |
| | <i>Martin Mach, Ondra Mička, František Petrouš, Jirka Guth, Marek Lipán</i> | |
| 3. | Gymnázium Pierra de Coubertina, Tábor | 95 bodů |
| | <i>Stanislav Fořt, Petr Hudeček, Tomáš Volf, Lukáš Timko, Lubomír Oulehle</i> | |
| 4. | Gymnázium Christiana Dopplera, Praha | 94 bodů |
| | <i>Jan Brandejs, Jan Hadrava, Vojtěch Havlíček, Anna Chejnovská, Pavel Jiroušek</i> | |
| 5. | Q.E.D. Bitch! (složený tým) | 82 bodů |
| | <i>Jakub Vošmera, Jiří Jelínek, Dominik Miketa, Filip Murár, Lubomír Grund</i> | |
| 6. | Gymnázium Luďka Píka, Plzeň | 81 bodů |
| | <i>Martin Bucháček, Jan Čambora, Michael Hrabě, Martin Matas, Daniel Švarc</i> | |
| 7. | Gymnázium, tř. Kpt. Jaroše, Brno | 67 bodů |
| | <i>Hynek Jemelík, Tomáš Pokorný, Pavel Ševeček, Jan Homola, Jan Stopka</i> | |
| 8. | Purkyňovo gymnázium, Strážnice | 62 bodů |
| | <i>Petr Bílek</i> | |
| 9. | Jiráskovo gymnázium, Náchod | 62 bodů |
| | <i>Radek Papež, Jakub Valtar, Jan Šimbera, Ondřej Vaculka, Jakub Řada</i> | |
| 10. | Gymnázium Jana Keplera, Praha | 61 bodů |
| | <i>Safka Daniel, Mach Stanislav, Rusý Tomáš, Basler Ondřej</i> | |

Ve výsledkové listině jsou pouze nejlepší týmy. Kompletní výsledková listina včetně bodování jednotlivých úloh je na našich webových stránkách.

Fotky



Vítězové pátého ročníku Fyziklání



Pořadí nejlepších řešitelů

Kategorie 4. ročníků

jméno	škola	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	200
1. <i>Ján Pulmann</i>	G Grösslingova, Bratislava	63
2. <i>Jan Sopoušek</i>	Gymnázium, Brno-Řečkovice	29
3. <i>Dominika Kalasová</i>	G, Boskovice	26
4. <i>Martin Bucháček</i>	G Lučka Píka, Plzeň	22
5. <i>Jan Brandejs</i>	G Christiana Dopplera, Praha	17
6. <i>Tomáš Pikálek</i>	G, Boskovice	14
7. <i>Tomáš Valíček</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše 14	13
8. <i>Vojtěch Havlíček</i>	G Christiana Dopplera, Praha	10
9. <i>Ondřej Maslikiewicz</i>	SPŠ, Hronov	9

Kategorie 3. ročníků

jméno	škola	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	200
1. <i>Jakub Vošmera</i>	G Matyáše Lercha, Brno	121
2. <i>Tomáš Bárta</i>	G, Nad Štolou Praha	72
3. <i>Jakub Kubečka</i>	G, Nymburk	49
4. <i>Ondřej Míl</i>	Jiráskovo G, Náchod	29
5. <i>Stanislav Fořt</i>	G P. de Coubertina, Tábor	24
6.–7. <i>Jakub Maksymov</i>	G a SOŠ, Jaroměř	18
<i>Gabija Maršalkaitė</i>	Vilniaus jezuitu gimnazija	18
8. <i>Kristína Nešporová</i>	G, Boskovice	17
9. <i>Ivo Vinklárek</i>	G, Rožnov p. Radhoštěm	16
10.–11. <i>Nicola Burianová</i>	G, Dašická, Pardubice	9
<i>Peter Kosec</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	9

Kategorie 2. ročníků

jméno	škola	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	200
1. Kristýna Kohoutová	G, Žamberk	85
2. Filip Murár	G, Masarykovo nám., Třebíč	82
3. Jakub Šafín	G, P. Horova, Michalovce	65
4. Lubomír Grund	G Zábřeh	52
5. Veronika Dočkalová	G, Elgartova, Brno	36
6. Lukáš Timko	G P. de Coubertina, Tábor	35
7. Tomáš Arman	G, Boskovice	34
8. Jakub Doležal	G, Špitálská, Praha	25
9. Jan Povolný	G Brno, tř. Kpt. Jaroše 14	19
10. Martin Gajdošík	G, Uherské Hradiště	17
11. Jiří Juřena	G, Uherské Hradiště	11
12. Lukáš Fusek	G, Uherské Hradiště	9

Kategorie 1. ročníků

jméno	škola	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	200
1. Tomáš Kořínek	G, Žamberk	36
2. Karolína Šromeková	G D. Tatarku, Poprad	17
3. Markéta Vohníková	PORG, Praha	15
4. Dušan Klíma	G F. M. Pelcla, Rychnov n. Kn.	9
5. Jan Palounek	G Christiana Dopplera, Praha	6

Ve výsledkových listinách jsou pouze nejlepší řešitelé. Kompletní výsledkové listiny včetně bodování jednotlivých úloh jsou na našich webových stránkách.

KAREL KOLÁŘ A KOLEKTIV
Fyzikální korespondenční seminář
XXIV. ročník – 2010/11

Předmluva: Michal Koutný

Náměty úloh:

Jakub Michálek (I.3, I.4, I.S, II.1, II.2, II.S, III.1, III.4, III.E, IV.1, IV.S, V.S)
Lukáš Ledvina (I.S, II.3, II.4, II.S, III.S, IV.P, V.S, VI.1, VI.S)
Karel Kolář (I.2, IV.1, IV.2, IV.E, V.3, V.E, VI.4)
Marek Scholz (II.E, III.2, III.3, III.P, IV.4, V.4, VI.2)
Tereza Jeřábková (V.2, VI.E), Jáchym Sýkora (V.P, VI.1)
Marek Nečada (I.1, IV.3), Jan Prachař (I.P)
Michal Koutný (II.P), Aleš Podolník (V.1)
Petr Ryšavý (VI.3)

Autoři řešení úloh:

Lukáš Ledvina (I.S, II.S, III.2, IV.1, IV.S, V.S, VI.S)
Karel Kolář (I.1, IV.2, V.E, VI.4)
Aleš Podolník (I.2, III.4, VI.P), Marek Scholz (IV.4, IV.P, V.4)
Jakub Michálek (I.4, I.S, III.S), Jáchym Sýkora (II.1, V.3, VI.1)
Tereza Jeřábková (II.4, IV.E, V.2), Jana Poledníková (I.P, III.P, V.P)
Tereza Zábojníková (I.E, IV.3), Tereza Steinhartová (II.E, VI.2)
Petr Ryšavý (II.3, VI.3), Lada Peksová (II.2)
Zuzana Dočekalová (II.P), Tomáš Jirotko (III.1), Marek Nečada (III.3)
Jan Hermann (I.3), Pavel Brom (III.E), Michal Koutný (V.1)

Seriál o optice: Jakub Michálek, Lukáš Ledvina

Legenda podzimního soustředění: Tereza Zábojníková

Legenda jarního soustředění: Tereza Zábojníková

Sazba: Tomáš Jirotko, Michal Koutný

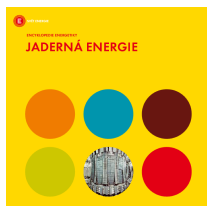
Obrázky a grafy: Tomáš Jirotko, Michal Koutný, Lukáš Ledvina

Jazykové korektury: Jakub Michálek, Marek Nečada

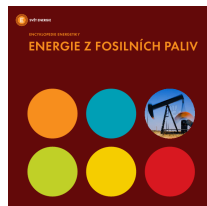
Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Vzdělávací program ČEZ je s vámi už od roku 1992!

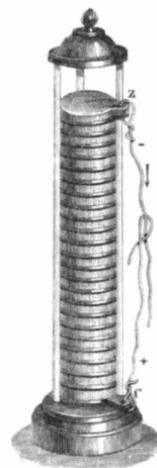
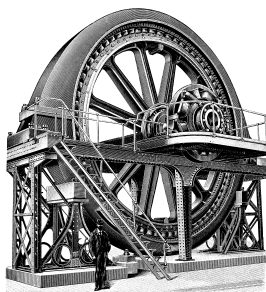
V předvečer roku, v němž oslavíme 20 let trvání vzdělávacího programu energetické společnosti ČEZ, jsme vydali aktualizovanou a rozšířenou **Encyklopedii energetiky**, jednu z nejúspěšnějších a nejžádanějších částí programu. Má 6 dílů:



Energie a člověk,
Elektřina,
Energie z fosilních paliv,
Energie z obnovitelných zdrojů,
Jaderná energie,
Energie ze všech stran.



Populárně přibližuje energetiku a vše co s ní souvisí. Zájemci si ji mohou objednat (jednotlivé díly i celek) na www.cez.cz/vzdelavaciprogram, jako součást podpory studentů a škol ji posíláme zdarma.



Svět energie je dobrodružný a zajímavý! Zauvažujte o budoucím zaměstnání v energetice!

www.kdejinde.cz



SKUPINA ČEZ

KAREL KOLÁŘ A KOLEKTIV
Fyzikální korespondenční seminář
XXIV. ročník – 2010/11

Vydal **MATFYZPRESS**
vydavatelství Matematicko-fyzikální fakulty
Univerzity Karlovy v Praze
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8
jako svou 381. publikaci

Vytiskl Akcent Třebíč

Vydáno pro vnitřní potřebu MFF UK
Publikace není určena k prodeji

164 stran, 61 obrázků
Sazba písmem Computer Modern v programu \TeX
Vydání první
Náklad 350 výtisků

Praha 2011

ISBN 978-80-7378-187-3

