

## *Milí řešitelé!*

Právě jste dostali řešení 5. série úloh Fyzikálního korespondenčního semináře a spolu s nimi také zadání série nové. Úvodem bychom vás chtěli pozvat na několik akcí, které se budou konat v následujících měsících – Den dětí a tábory, které pořádá Matfyz. Připomínáme vám i probíhající soutěž o nejlepší návrh na triko FYKOSu.

## *Pozvánka na Vědohraní*

Pokud byste měli zájem 1. června strávit den zábavy na Matfyzu s různými fyzikálními pokusy a hříčkami, pak neváhejte a přijďte do Troji! Podrobnosti k programu hledejte na stránce <http://kdf.mff.cuni.cz/vedohrani/>.

## *Matfyzácké tábory*

Blíží se prázdniny, a proto vás zveme na soustředění a tábory, abyste nemohli říct, že jste byli o prázdninách nuceni zahálet pro nedostatek Matfyzáckých akcí. Tyto akce mají společné to, že není sice potřeba předtím řešit nějaký seminář a neohlíží se na vaše dosavadní výsledky, ale poplatek, který za ně zaplatíte je o něco vyšší. Jedná se o akce, které jsou podobné soustředěním FYKOSu, ale mají svoje specifika (různý poměr volného času a programu, zaměření programu...).

V první řadě bychom vás rádi pozvali na Letní školu matematiky a fyziky (LŠMF), která se koná v termínu 1.–15. července. Podrobnosti najdete na stránce <http://smf.mff.cuni.cz>.

Letní matematicko-fyzikální soustředění (LMFS) se koná 10.–26. srpna v Křinicích. Podrobnosti na <http://alma.karlov.mff.cuni.cz/lmfs/>.

Doposavad zmíněné akce byly určeny pro středoškoláky, ale pokud máte mladší sourozence či kamarády (či jste sami ještě v třídách odpovídajících základní škole či nižšímu gymnáziu), tak pro vás máme pozvánku na tábor Pikomatu v termínu 27.7.–7.8., kterou můžete volně šířit dále. Přihlašování na <http://pikommat.mff.cuni.cz/>.

## *Soutěž o nejlepší návrhy na tričko*

S minulou sérií jsme vyhlásili soutěž o nejlepší návrhy na tričko FYKOSu. Pravidla podrobněji můžete najít právě v minulé brožurce. Ve zkratce, ten, jehož návrh vybereme dostane tři trička se svým návrhem ve velikosti a barvě, kterou si vybere. Zatím nám žádné návrhy nepřišly, ale doufáme, že se nějaké brzo objeví.

Uzávěrka soutěže je **16. května 2011**. Návrhy posílejte Terce Jeřábkové na emailovou adresu [terkaj@fykos.cz](mailto:terkaj@fykos.cz).



## Zadání VI. série



Termín odeslání: 23. května 2011  
Termín doručení: 25. května 2011 18:00

## Úloha VI. 1 ... rozcvička

## a) zprohýbané prkno

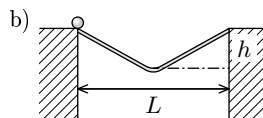
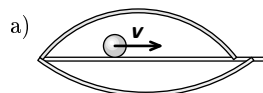
Prkno dané délky leží vodorovně. Z jednoho konce po něm pošleme kuličku. Za jakých podmínek bude na druhém konci prkna nejdříve?

- Prkno bude prohnuté nahoru.
- Prkno bude prohnuté dolů.
- Prkno bude rovné.
- Při libovolném prohnutí bude doba stejná.

Svoji volbu řádně odůvodněte.

## b) zlomené prkno

Prohlubeň šířky  $L$  přemostíme prohnutým prknem. To se skládá ze dvou stejně dlouhých rovných částí, které jsou uprostřed spojeny zlomem. Na jeden konec položíme kuličku. Pro jakou hloubku prohnutí  $h$  bude kulička na druhém konci nejdříve? Zlom je tak hladký, že na něm kulička neztrácí energii. Mohlo by se vám hodit, že funkce  $f(x) = x + 1/x$  má minimum v bodě  $x = 1$ .



Obr. 1. K rozcvičce

## Úloha VI. 2 ... zlý trojúhelník

Máme dlouhou štěrbinu a vedle ní bodovou díрку. Jak bude vypadat interferenční obrazec na rovinném stínítku, posvítíme-li skrz ně koherentním světlem? Zanedbejte difrakci na samotné štěrbině a samotné díрке.

## Úloha VI. 3 ... letadlo

Jak dlouhý čas uběhne v letadle mezi „západem“ a „východem“ slunce, letí-li v rovině ekliptiky? A jak to bude vypadat s délkou dne a noci? Potřebné údaje jako běžnou letovou hladinu si zjistíte na internetu. Rozeberte oba případy, kdy letadlo letí na západ i na východ.

## Úloha VI. 4 ... konečné řešení otázky globálního oteplování

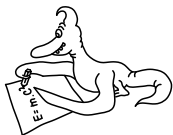
Jak by se změnil výkon slunečního záření dopadajícího na Zemi v odsluní, když by byla jednorázově vychýlena zemská dráha (změnou její okamžité rychlosti ve směru její dráhy) tak, aby byl pozemský rok o týden delší? Odhadněte teplotu Země v přísluní a odsluní, pokud by Země měla téměř nulovou tepelnou kapacitu. Stačí uvažovat, že původní dráha Země byla kruhová a přešla na eliptickou.

## Úloha VI. P ... nošení vody

V létě bylo zakázáno vynášet z bazénů vodu v bermudách. Kolik ale může člověk vynést vody ve vlasech? Předpokládejme, že vlasů je větší počet (z bazénu nevynáší vodu děd Vševed).

## Úloha VI. E ... zeměplocha

Vymyslete co nejvíce způsobů, jak ověřit předpoklad o kulatosti Země. Pokud zjistíte, že je Země opravdu kulatá, dokázali byste určit i její poloměr?



## Řešení V. série

## Úloha V. 1 ... rozcvička (5 bodů; průměr 2,80; řešilo 10 studentů)

## a) sedimentace krve

Zkuste přibližně spočítat, jak rychle probíhá sedimentace lidské krve (usazení zdravých červených krvinek na dně nádoby). Dynamická viskozita  $\eta$  krevní plazmy při  $37^\circ\text{C}$  je přibližně  $2\text{ N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-2}$ . (Běžně se měření sedimentace provádí tak, že se krev nechá odstát na jednu hodinu a poté se změří výška již usazených krvinek – bývá obvykle okolo 10 mm.)

Nápověda: Mohl by se hodit Stokesův vztah pro odporovou sílu  $F = 6\pi\eta r v$ , který platí pro laminární proudění. z hlubin archivu

## b) nevěřte vlastním očím

Aleš jel v poledne tramvají po nábřeží Kapitána Jaroše v Praze směrem na Malou Stranu. Seděl u okna a přímo z jiho-jihozápadu na něj svítilo slunce. Protože se díval před sebe, jedno oko měl ve stínu vlastního nosu. Když ale uhnul očima doprava, zjistil, že levým okem vnímá mírně jiné odstíny barev než pravým. Do jakého odstínu se mu vidění v levém oku zabarvilo a proč? Aleš potkal Apollóna

## Sedimentace krve

Předně se řešitelům omlouváme za chybně uvedenou hodnotu dynamické viskozity krve. Její správná hodnota za daných podmínek je okolo  $3 \cdot 10^{-3}\text{ N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-2}$ .

Abychom mohli použít uvedený Stokesův vzorec, modelujme krev kulovými krvinkami s poloměrem  $r_K$ . Krvinky se již po chvíli pohybují rovnoměrně přímočaře, tudíž součet působících sil (tíhová, vztlaková a třecí) musí být nulový. Z toho zjistíme onu ustálenou rychlost

$$v = \frac{2}{9} \frac{r_K^2 \Delta \rho g}{\eta},$$

kde  $\Delta \rho$  je rozdíl hustot krvinky a plazmy,  $\eta$  je dynamická viskozita a  $g$  je tíhové zrychlení.

Za čas  $\Delta t$  se usadí všechny krvinky z oblasti  $v\Delta t$  nade dnem, při obsahu dna  $S$  a měrném počtu krvinek v krvi  $D$  to odpovídá  $N = v\Delta t S D$  krvinekám. Tyto pak vytvoří vrstvičku<sup>1</sup> tloušťky  $\Delta h = N V_K c / S$ , kde  $V_K$  je objem krvinky a  $c$  koeficient udávající, kolik prostoru kolem sebe zabere usazená krvinka oproti čistému objemu.

Objem krvinky též odhadneme koulí poloměru  $r_K$ , a tak rychlost přibývání usazeniny vyjde

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{8}{27} \frac{\pi r_K^5 \Delta \rho g c D}{\eta}.$$

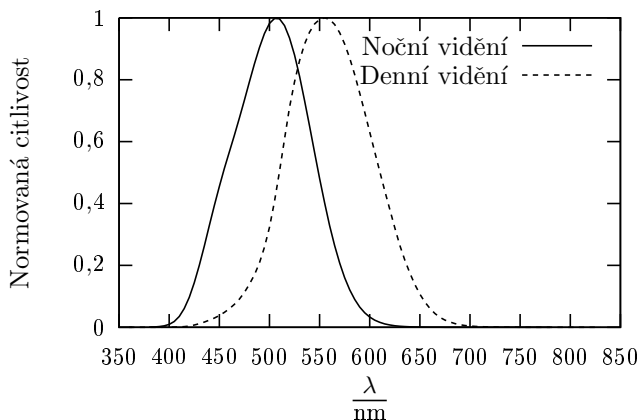
<sup>1)</sup> Předpokládáme tloušťku této vrstvy řádově menší než  $v\Delta t$ .

Pro numerický odhad použijeme hodnoty:  $\eta = 3 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ ,  $r_K = 3 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ ,  $\Delta\rho = 150 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ,  $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ ,  $c = 1,7$  a  $D = 5 \cdot 10^6 \text{ mm}^{-3}$ . Výsledná rychlost vychází  $3,4 \text{ mm}\cdot\text{hod}^{-1}$ , což je i přes zjednodušení a odhady, jichž jsme se dopustili, řádově ve shodě s realitou (2–20 mm/h, v závislosti na jedinci).

*Nevěřte vlastním očím*

Pozorované zbarvení je variantou *Purkyňova jevu*, neboli že v šeru vidíme odstíny mírně do modra. Citlivost oka totiž nezávisí jenom na vlnové délce, ale i na intenzitě dopadajícího světla.

Na obrázku 2 je srovnání citlivosti oka při denním a nočním vidění. Je patrné, že oko přizpůsobené tmě má maximum citlivosti posunuté více do modré oblasti (vliv tyčinek).



Obr. 2. Srovnání denního a nočního vidění

Mělo-li tedy jedno oko v důsledku oslnění staženou zornici, dopadá do něj celkově méně světla, a tak se odstíny jím pozorované budou jevit více modravé.

**Michal Koutný**  
michal@fykos.cz

### Úloha V. 2 ... měsíc jako lodička (3 body; průměr 1,57; řešilo 7 studentů)

Z jakých míst na Zemi a kdy vypadá Měsíc jako lodička? (jeho cípy jsou rovnoběžné s obzorem, osa symetrie je kolmá k místnímu nebeskému poledníku) Pokud si s řešením nevíte rady, můžete si nainstalovat vhodný software (např. Celestia) a celou situaci si prohlédnout z různých míst na zemi.

*Krátký astronomický slovníček, aneb pojmy, bez kterých se při čtení řešení neobejdete*

*Ekliptika* – průsečnice roviny určené oběhem planet kolem Slunce s nebeskou sférou

*Nebeský rovník* – průsečnice roviny určené zemským rovníkem s nebeskou sférou

*Zenit (nadhlavník)* – průsečík přímkou určené středem Země a místem, kde se nachází pozorovatel s nebeskou sférou

*Řešení*

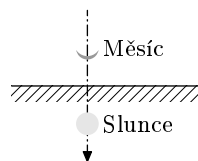
Nejprve se podívejme na nejjednodušší modelovou situaci. Představme si, že zemská osa je kolmá k rovině ekliptiky a Měsíc i Země leží přesně v ní. V jaké pozici by musel být Měsíc se

Sluncem abychom mohli pozorovat Měsíc jako lodičku? Je potřeba aby v okamžiku pozorování byl měsíc přímo nad Sluncem, tedy spojnice Slunce-Měsíc musí být v okamžiku pozorování kolmá k horizontu pozorovatele (uvědomme si, že Měsíc i Slunce stále leží na ekliptice, je to tedy opravdu jediná možnost, jak tento jev pozorovat). To je v našem prvním přiblížení možné pouze na rovníku. Na tomto místě by každý den Slunce procházelo přímo zenitem.

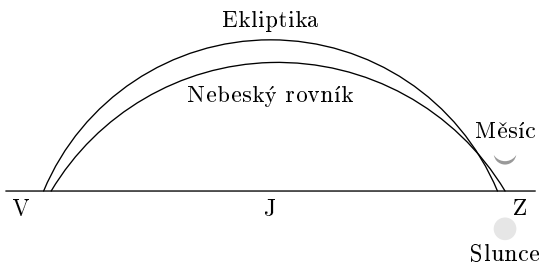
Pokud se nyní více přiblížíme reálné situaci a do našich úvah přidáme sklon zemské osy, situace se nám poměrně zkomplikuje.

Naším cílem je stanovit rozmezí zeměpisných šířek, ze kterých je možné tento jev pozorovat. Odchylme se na chvíli od Měsíce a promysleme si pořádně v jakých pozicích lze během roku pozorovat Slunce. Jistě jste si všimli, že se během roku mění maximální výška Slunce nad obzorem - v zimě je Slunce níže (proto je tu také zima) a v létě naopak mnohem výše. To je zapříčeno právě sklonem zemské osy vzhledem k rovině ekliptiky. Okamžitá poloha Země na její oběžné dráze kolem Slunce spolu se zeměpisnou šířkou určují jednoznačně maximální výšku, do které Slunce může během dne vystoupat (takto definované pravé poledne nastává vždy když Slunce prochází místním poledníkem).

Pro vyřešení naší úlohy je třeba najít nějakou souvislost mezi úhlovou výškou Slunce nad obzorem a sklonem ekliptiky vůči horizontu. Vzhledem k jisté symetrii úlohy (pohyb Slunce po obloze se na jižní polokouli jeví zrcadlově převrácen, to ale na zeměpisných šířkách nic nemění) se budeme dále zabývat severní polokoulí. Existuje jeden okamžik kdy dokážeme snadno určit sklon ekliptiky vzhledem k horizontu. Rovina ekliptiky prochází středem Země, Slunce leží na ekliptice, rovina horizontu prochází místem pozorování. Je tedy jasné, že pokud bude rovina ekliptiky procházet také místem pozorování, pak máme dvě roviny jejichž úhel už lze určit.



Obr. 3. Ekliptika je kolmá k horizontu pozorovatele



Obr. 4. Situace pro naši zeměpisnou šířku (16. 3. 2010), Měsíc neleží na ekliptice a proto lze i u nás pozorovat lodičku

Podívejme se na okamžik letního slunovratu. V tento den bude na severní polokouli Slunce v pravé poledne nejvýše. V nadhlavníku bude na  $23^{\circ}27'$  severní šířky. Pokud si v této pozici zastavíme rotaci Země a začneme s ní pouze obíhat kolem Slunce zjistíme, že se Slunce hýbe po ekliptice. To je ale skvělá zpráva. Máme tedy pás určený obratníky Raka a Kozoroha, kde může být slunce v nadhlavníku. Mezi těmito místy může tedy ekliptika s horizontem svírat pravý úhel. A během roku určitě bude existovat časový okamžik, kdy bude Slunce na ekliptice, která bude kolmá k horizontu. Pokud budeme mít štěstí a bude v tento okamžik pozorovatelný Měsíc, pak se bude jevit právě jako lodička. Pokud si tedy shrneme právě získané výsledky zjistíme, že pokud Měsíc leží také v ekliptice, lodičku můžeme spatřit mezi obratníky Raka a Kozoroha.

Během letního a zimního slunovratu je tento efekt možné pozorovat přímo z rovníku, během jarní resp. podzimní rovnodennosti pak z obratníku Raka resp. Kozoroha.

Při dalším přiblížení je nutné si uvědomit, že Měsíc nepohybuje přesně v rovině ekliptiky – jeho oběžná dráha je vůči ní skloněna o úhel zhruba  $5,1^\circ$ . Je možné si přičíst resp. odečíst od souřadnic případných pozorovacích míst ještě pět stupňů (v závislosti na tom, zda je Měsíc nad a nebo pod ekliptikou) a stále je možné Měsíc jako lodičku pozorovat. Pokud by těchto pět stupňů nemělo na pozorování větší efekt, pak by jistě bylo možné tento efekt zanedbat. Nicméně, pokud se podíváte na obrázek 4, je vám už zajisté jasné, že efekt bude mnohem větší.

Kromě polohy Měsíce vůči ekliptice je také důležitá úhlová vzdálenost Měsíce od Slunce. Pokud je zrovna Měsíc nejvíce odchýlen od ekliptiky a zároveň se nachází nejbliže Slunce (řekněme třeba také pět stupňů – leč je to jen těžko reálné číslo), pak se úhel osvitu Měsíce od Slunce mění o úhel  $45^\circ$ ! Toto číslo už se zanedbává těžko.

Je však důležité zdůraznit, že Měsíc takto blízko u Slunce patrně nikdy nevidíte. Takže pokud chcete vidět Měsíc jako lodičku, raději se vypravte někam blíže k rovníku.

**Tereza Jeřábková**  
terkaj@fykos.cz

### Úloha V. 3 ... těžký řetěz (4 body; průměr 2,80; řešilo 10 studentů)

Řetěz o hmotnosti  $m$  a délky  $l$  visí svisle těsně nad váhou. Najednou ho upustíme z klidu a začne na váhu dopadat. Jakou váhu bude váha ukazovat v závislosti na tom, jaká délka  $x$  již na ni dopadla? Zanedbejte rozměry jednotlivých ok řetězu.

Zobrazovaná váha bude přesně odpovídat síle, kterou bude řetěz na váhu působit. Vypočítejme proto nejdříve, jakou silou na ni působí.

Ta část řetězu, která již na váze leží, bude samozřejmě působit pouze silou tíhovou. Ta se jednoduše vypočítá jako

$$F_1 = gm \frac{x}{l}.$$

Dále budou na váhu působit právě dopadající články řetězu, které se o ni budou brzdít. Víme, že síla je rovna změně hybnosti za jednotku času. Můžeme psát

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t}, \quad (1)$$

kde  $\Delta p$  je změna hybnosti za čas  $\Delta t$ . Hybnost je definovaná jako součin hmotnosti a rychlosti. Protože se oka řetězu zcela zastaví, bude změna hybnosti rovna

$$\Delta p = \Delta m \cdot v,$$

kde  $\Delta m$  je hmotnost části řetízku, který dopadne na váhu za čas  $\Delta t$  a  $v$  je okamžitá rychlost řetízku. Zřejmě platí

$$\Delta m = m \frac{\Delta x}{l},$$

kde  $\Delta x$  je délka části řetízku, která dopadla na váhu za čas  $\Delta t$ . Tuto délku pak lze vyjádřit jako

$$\Delta x = v \cdot \Delta t.$$

Uvedené úvahy dobře platí pro malé časové úseky  $\Delta t$ , během kterých se rychlost řetízku změní jen zanedbatelně. Nyní stačí již jen dosadit za  $\Delta p$  do (1) a získáme vzorec pro druhou složku síly

$$F_2 = \frac{m \frac{v \cdot \Delta t}{l} v}{\Delta t} = \frac{mv^2}{l}. \quad (2)$$

Poznámka pro zkušenější řešitele – úvahy uvedené výše lze samozřejmě zcela analogicky provést za použití derivací se stejným výsledkem.

Řetízek dopadající na váhu bude mít stejnou rychlost jako těleso padající volným pádem, které již urazilo dráhu délky  $x$ . Ze vzorců pro volný pád

$$v = gt \quad \text{a} \quad x = \frac{1}{2}gt^2,$$

dosazením za  $t$  získáme jednoduchý vztah

$$v = \sqrt{2gx}.$$

Dosazením do (2) získáme konečný vztah pro  $F_2$

$$F_2 = \frac{2mgx}{l}.$$

Celková síla působící na váhu tedy bude

$$F = F_1 + F_2 = 3mg \frac{x}{l}.$$

Pro určení zobrazované váhy stačí podělit působící sílu gravitačním zrychlením. Získáme výsledek

$$m_v = 3m \frac{x}{l}.$$

*Jáchym Sýkora*  
jachym@fykos.cz

#### Úloha V.4 ... zelená revoluce (4 body; průměr 3,67; řešilo 9 studentů)

Jaderná energie je stále kontroverzní zdroj energie a mnohé státy mají v úmyslu upouštět od jejího používání. Zaměřme se ale nyní na problém skladování jaderného odpadu. Představme si, že v roce 2000 bylo založeno zbrusu nové úložiště radioaktivního odpadu a navezen první čerstvý radioaktivní materiál, ale záhy bylo odsouhlaseno, že na úložiště bude každý další rok dovezeno o 5% méně čerstvého radioaktivního odpadu než rok předchozí.

Pro jednoduchost předpokládejme, že radioaktivní odpad má poločas rozpadu 100 let (běžný radioaktivní odpad má daleko delší poločas rozpadu). Poradte obyvatelům přilehlých obcí, kterého roku se mohou těšit na nejvyšší dávku radiace, a umožněte jim tak třeba napláňovat založení rodiny. Při řešení můžete s výhodou použít váš oblíbený tabulkový procesor, třeba Excel nebo Calc.

*Márovi se zalíbilo v Prypjati*

UVědomme si, že intenzita záření je v každém okamžiku úměrná množství ještě nerozpadlého materiálu. Je tedy jedno, zda vyšetřujeme časovou závislost množství nerozpadlého radioaktivního materiálu, nebo časovou závislost intenzity záření. Připomeňme, že poločas rozpadu je

doba, za kterou se rozpadne polovina radioaktivních jader. Aktivita jedné navážky materiálu klesá v čase jako výraz  $(\frac{1}{2})^{t/100}$ .<sup>2</sup>

Celková úroveň záření  $I_r$  v  $r$ -tém roce je dána součtem příspěvků ze všech předchozích navážek, aneb

$$I_r = \sum_{j=0}^r 0,95^j \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{(r-j)/100}. \quad (3)$$

Nyní toto realizujeme v Calcu (Excelu). Do prvního řádku, hlavičky tabulky, vypíšeme pořadí roku, tedy čísla  $r$  od 0 až třeba do 100. Do druhé řádky necháme vypočítat funkci  $(\frac{1}{2})^{r/100}$ , neboli příspěvek navážky z nultého roku k radiaci v  $r$ -tém roce. Další řádek bude obsahovat příspěvek navážky z prvního roku k radiaci v každém roce. Tento řádek vznikne přenásobením předešlého řádku konstantou 0,95 a posunutím o jedno pole doprava. Posunutí o jedno pole doprava dosáhneme tak, že každá buňka bude 0,95násobkem buňky o jednu nalevo a nahoře od ní. Tento vzorec stačí zadat jen jednou a poté přetáhnout po celém požadovaném poli. Úroveň radiace v  $r$ -tém roce bude tak odpovídat součtu čísel v  $r$ -tém sloupci tabulky. Největší číslo objevíme ve sloupci odpovídajícím roku 2044 (začínáme navážet v roce 2000). *Ján Pulmann* si správně uvědomil, že řada (3) lze snadno sečíst jako geometrická řada, vytkneme-li člen  $(\frac{1}{2})^{r/100}$  před sumu. Někteří z Vás zase vycházeli z toho, že množství uloženého materiálu v  $r$ -tém roce dostaneme rekurzivně  $m_r = 0,5^{1/100}m_{r-1} + 0,95^r m_0$ .

Úloha jde řešit i pomocí integrálního počtu, pokud přejdeme od diskrétního navážení odpadu ke spojitému. Vztah (3) se pak modifikuje na

$$I(t) = \int_0^t 0,95^\tau \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{(t-\tau)/100} d\tau. \quad (4)$$

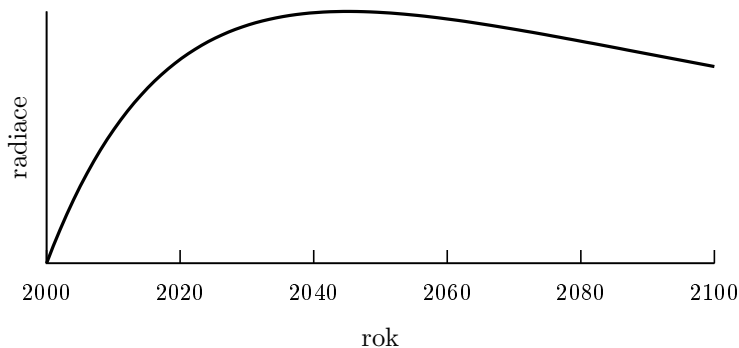
Exponenciály se snadno zintegrují a výsledkem je závislost tvaru

$$I(t) \sim \left(\frac{1}{2}\right)^{t/100} - 0,95^t,$$

kteřá je znázorněná na obrázku 5. Vidíme, že to je vlastně rozdíl dvou exponenciálních poklesů. Při spojitém navážení maximum radiace nastane začátkem roku 2045, kvalitativní průběh závislosti bude ovšem stejný jako při diskrétním navážení. Integrál (4) je tvaru  $I(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau$  a vyjadřuje skutečnost, že intenzitu v čase  $t$  získáme součtem příspěvků, které „vznikly“ v předešlých časech  $\tau$  ve velikosti  $f(\tau)$  a na situaci v čase  $t$  mají vliv daný faktorem  $g(t-\tau)$ , kterýžto je závislý na časovém prodlení od jejich vzniku. Uvedený integrál se nazývá *konvoluce funkcí*  $f$  a  $g$  a ve fyzice se s ním budete pravděpodobně potkávat velmi často.

<sup>2)</sup> V řešení bereme čas jako bezrozměrný počet let.





Obr. 5. Úroveň radiace v průběhu let

**Marek Scholz**  
mara@fykos.cz

### Úloha V. P ... nabitý svět (3 body; průměr 2,00; řešili 3 studenti)

*Jak všichni víme, kladné a záporné elektrické náboje jsou ve vesmíru v rovnováze, jinak by elektrická odpuzivá síla překonala gravitační a tělesa by nedržela pohromadě. Ale je ta rovnováha dokonalá? Co když jsou všechna tělesa ve vesmíru nepatrně kladně (nebo záporně) nabitá a odpuzivá elektrická síla snižuje účinek gravitace. Jak by se taková nerovnováha projevila?*

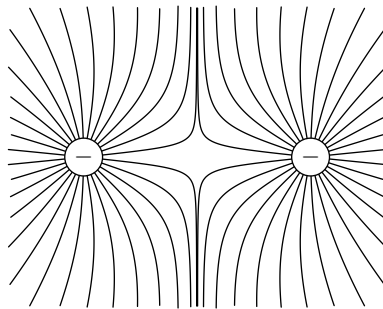
*Navrhněte způsob, jak tuto nerovnováhu zjistit, a odhadněte, jakou nejmenší nerovnováhu jsme touto metodou schopni určit. Nerovnováhou myslíme celkový náboj (rozdíl kladného a záporného) v nějakém velkém objemu.*

*napadlo Jáchyma, když mu tvrdili, že vesmír je v elektrické rovnováze*

Stěžejní otázkou úlohy je, zda jsme schopni detekovat případnou nerovnováhu v neutralitě vesmíru. Než na tuto otázku odpovíme, je třeba se zamyslet, jak vlastně víme, že vesmír je neutrální. Tahle otázka není úplně triviální a je těžké na ni odpovědět se stoprocentní jistotou. Faktem zůstává, že do vzdálenosti  $10^5$  světelných let od naší galaxie jsme obklopeni ionizovaným plynem.

To ovšem není nic abnormálního, vesmír byl krátce po svém zrodu naplněn neprůhledným ionizovaným plynem, v dalším vývoji zprůhledněl, následně byl znovu ionizován a začaly se tvořit nejstarší známé vesmírné objekty. Tuto éru jsme nazvali érou reionizace, trvala 600 miliónů let a skončila v době, kdy byl vesmír stár asi jednu miliardu let.

Budeme-li tedy vesmír pozorovat pouze lokálně, je možné, že narazíme na nějakou nerovnoměrnost v kladných a záporných částicích. Budeme-li se však na vesmír koukat jako na celek, žádnou nerovnováhu bychom neměli pozorovat. Koneckonců veškerá pozorování naznačují, že vesmír skutečně neutrální je, ostatně jak je zmíněno v zadání, odpuzivá síla by jinak nedovolila zformo-

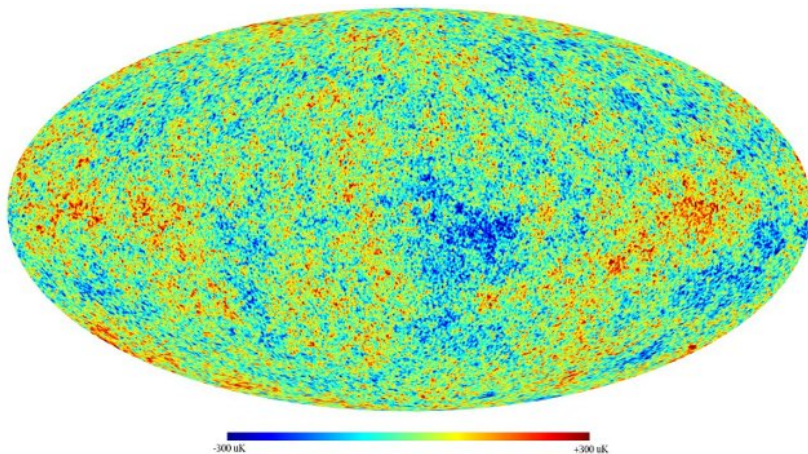


Obr. 6. Siločáry kolem stejných nábojů

vání hvězd, galaxií a ostatních vesmírných objektů. Kdyby ale lehká nerovnováha existovala, kde bychom ji pozorovali?

Můžeme s úspěchem předpokládat, že v celém vesmíru platí zákon zachování náboje. Tedy náboj byl ve vesmíru pořád a nikam nezmizel ani by se nemohl najednou objevit. Zkusme se teď zamyslet, jak nejlépe poznat, že se někde nachází přebytek kladného/záporného náboje. Stejně jako v našich lidských měřítkách bychom pozorovali, že dva stejně nabité náboje se odpuzují a dva rozdílně nabité náboje se přitahují. Velmi dobře to lze ilustrovat siločárami (obrázek 6).

Ve vesmíru bychom tedy museli detekovat něco podobně vypadajícího, ale ve velkých škálách. Obdobné struktury by byly i jedním z projevů nerovnováhy náboje ve vesmíru. Teoreticky by měly být dobře detekovatelné ve vesmírném mikrovlnném pozadí (anglicky *Cosmic Microwave Background*, čili CMB), které vzniklo cca 380000 let po Velkém Třesku. Podíváme-li se na CMB dnes (obrázek 7), zjistíme, že je veskrze homogenní a žádné proudy se zde nevyškytují.



Obr. 7. Vizualizace dat z družice WMAP

Jak velká by musela být nerovnováha, třeba ve Slunci, abychom ji vůbec zvládli detekovat? Za předpokladu, že je Slunce pouze z vodíku, obsahuje  $N_A M_R(\text{H})/M_{\text{Slunce}} \approx 10^{57}$  elektronů.<sup>3</sup> To odpovídá náboji přibližně  $2 \cdot 10^{38}$  C. Pokud si dovolíme mít o jeden elektron v miliardě víc, náboj bude stále v řádu  $10^{29}$  C. Dejme si tedy elektrickou a gravitační sílu do poměru a dostaneme

$$\frac{Q_{\text{Slunce}}}{4\pi\epsilon_0} = 10^{16} \cdot \kappa \cdot M_{\text{Slunce}}$$

Tedy elektrická síla bude v řádech  $10^{16}$  větší než síla gravitační. S úspěchem můžeme předpokládat, že takové Slunce by nemohlo existovat, tedy lze říct, že až do řádu okolo  $10^{-25}$  je Slunce skutečně elektricky neutrální, tedy v rovnováze. Podobný výpočet pak můžeme apli-

<sup>3)</sup> Hmotnost Slunce je  $1,99 \cdot 10^{30}$  kg,  $N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$  je Avogadrova konstanta a  $M_R(\text{H}) = 1,01 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  je relativní atomová hmotnost vodíku.

kovat prakticky na jakýkoliv objekt ve vesmíru. Zmíněná hodnota nám také naznačuje, jakou nejmenší rovnováhu můžeme principiálně odhadnout.

*Jana Poledníková*

janap@fykos.cz

### Úloha V. E ... strunatci (8 bodů; průměr 4,80; řešilo 5 studentů)

Vytvořte si zařízení, na kterém bude moci být upevněna struna (či gumička) s proměnlivou délkou tak, že bude napínána stále stejnou silou. Prozkoumejte, jak se mění hlavní frekvence vydávané strunou (či gumičkou) v závislosti na délce struny. Na zpracování zvuku můžete použít například program Audacity. Karel chtěl zadat něco z akustiky

#### Teorie

Příčné vlny se šíří v napjaté struně přibližně rychlostí

$$v = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}},$$

kde  $\sigma$  je napětí ve struně a  $\rho$  je hustota materiálu struny. Vzhledem k tomu, že napjatá gumička je podobná struně, můžeme aplikovat tento vzoreček i na náš experiment.

Jsou dvě možnosti, jak podle zadání zatížit gumičku. Buď tak, že máme zatíženou stále stejnou délkou pružiny, ale měníme délku, na které pružina vibruje (např. pomocí kladky), nebo zatěžujeme pouze délku, na které pružina vibruje, a jenom nezbytně krátký úsek pro zavěšení přes kladku. V obou případech ovšem, při použití stejné hmotnosti závaží, mělo být napětí v gumičce stejné, protože to závisí pouze na hmotnosti a na průřezu gumičky, který považujeme za konstantní. Označme délku mezi upevněním gumičky a vrchem kladky, přes kterou je zavěšené závaží, jako  $l$ .

Frekvence  $f_k$ , které se brnknutím na gumičku vybudí, budou odpovídat vlnovým délkám  $\lambda_k$  a rychlosti šíření vln v materiálu vztahem

$$f_k = \frac{v}{\lambda_k},$$

kde  $f_k$  označuje  $k$ -tou harmonickou frekvenci. Vlnové délky vypočteme z předpokladu, že na okrajích, kde je gumička upevněná, bude nulová výchylka v každém čase a bude tam tedy uzel. Z toho vyplývá, že se do kmitající délky pružiny  $l$  musí vejít celočíselný počet půlvln.

$$l = k \frac{\lambda_k}{2}.$$

Z toho pak pro frekvence vyplývá celkový vztah

$$f_k = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} \frac{1}{\lambda_k} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} \frac{k}{2l} = v \frac{k}{2l},$$

kde  $v/2$  je konstanta, kterou budeme fitovat ve zpracování měření.

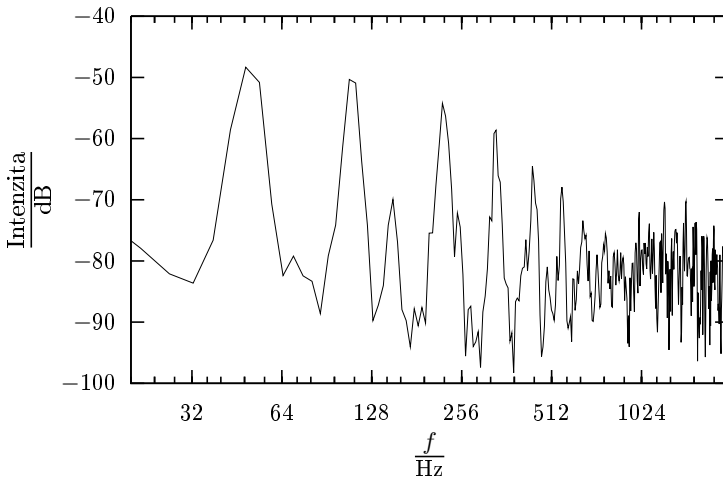
## Postup měření

Při měření byla využita kladka, jak již bylo zmíněno v teorii. Pro co nejlepší určení délky gumičky byla použita co nejmenší kladka s poloměrem 1,0 cm. Pro všechna měření byla použita jedna obyčejná kancelářská gumička. Závaží, kterým byla zatížena, mělo hmotnost  $m = 200$  g. Nejprve byla gumička na jedné straně upevněna a na druhé straně bylo přes kladku zavěšeno volně závaží. Pak byla kladka zafixována, aby se v průběhu kmitů gumičky příliš nepohybovala. Měření délky probíhala pomocí obyčejného pravítka s dílky po 1 mm, ale vzhledem k tomu, že místo upevnění gumičky a místo vrchu kladky není zcela přesně určující části pružiny, na které pružiny kmitá, bereme chybu měření jako 0,5 cm.

Zvuk gumičky byl měřen pomocí mikrofону připojeného na počítač a zvuk byl zaznamenáván pomocí programu Audacity, kde posléze probíhala spektrální analýza zvuku. Vždy bylo naměřeno více brnknutí, z nichž pak 3 byla analyzována. Zaznamenány byly první nejvýraznější frekvence vyšší než cca 100 Hz, protože mikrofóny v oblasti nízkých frekvencí nejsou příliš přesné a hlavně protože okolo 50 Hz se objevoval zvuk, který jednak nezávisel na délce  $l$ , navíc se vždy objevoval i v oblastech záznamu zvuku, kde nebylo na gumičku brnkáno a nejpádnejším argumentem je, že právě tato frekvence je v elektrické síti a proto se nám může objevit relativně pravděpodobně jako šum.

Na obrázku 8 můžete vidět ukázkou spektrální analýzy zvuku v Audacity. Zvolili jsme velikost okna 8192 vzorků, protože při nižších hodnotách jsme nedosahovali dostatečného frekvenčního rozlišení (nakonec bylo zhruba 2 Hz). Logaritmickou stupnici jsme použili z důvodů jednoduššího odečítání hodnot.

Při každém nastavení délky byly vybrány tři brnknutí a z odečtených hodnot frekvencí, které si odpovídaly, byl vypočten aritmetický průměr.



Obr. 8. Ukázkou spektrální analýzy zvuku pro nastavení  $l = 24$  cm při délce gumičky 41 cm

## Výsledky

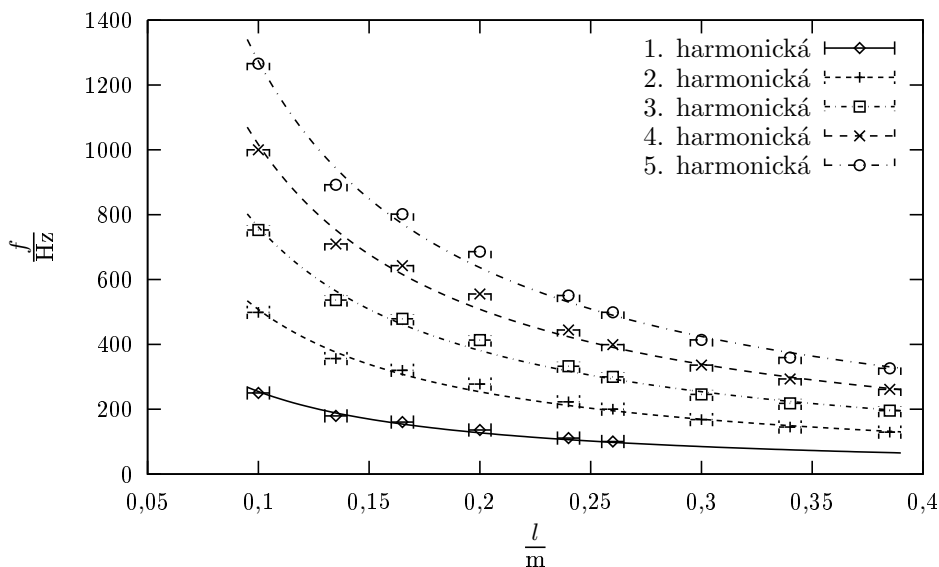
Naměřená data pro gumičku, kde bylo zavěšeno závaží ve vzdálenosti 41 cm od upevnění, jsou v grafu 9 a data pro závaží upevněné za kladkou jsou v grafu 10. V obou grafech jsou nafi-

tované frekvence přes parametr rychlosti, který považujeme za neznámý. Většinou bylo měřeno prvních 5 frekvencí, které byly přibližně celočíselným násobkem první frekvence (resp. 1, 2, 3, 4 a 5násobkem), z čehož můžeme usuzovat, že se opravdu jedná o prvních pět harmonických frekvencí vydávaných gumičkou. Všechny nařazené závislosti odpovídají (podle výpočtu metodou nejmenších čtverců v Gnuplotu) s odchylkou menší než 2% nepřímou úměrnou závislosti frekvence na délce  $l$ .

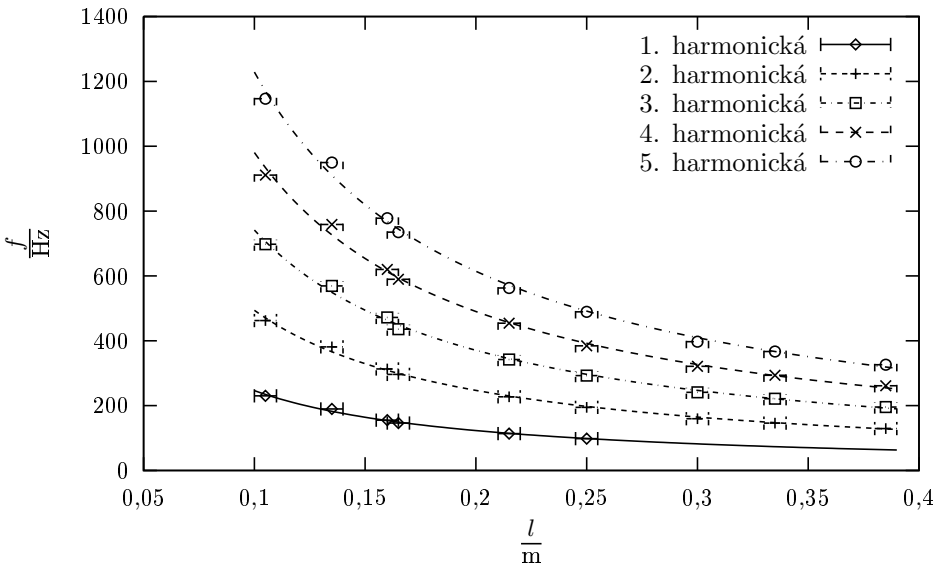
Tabulka nařazených hodnot rychlostí šíření zvukových vln v gumičce

harmonická	$\frac{v_k}{\text{ms}^{-1}}$	$\frac{v_n}{\text{ms}^{-1}}$
1.	50,9	49,3
2.	50,8	49,4
3.	50,8	49,4
4.	50,8	49,0
5.	50,9	49,2

V tabulce můžete vidět hodnoty nařazených rychlostí. Jako  $v_k$  je označen tento parametr u měření s konstantní délkou napnuté gumičky, kdežto  $v_n$  je pro nekonstantní délku gumičky. Je vidět, že u fitů v rámci jednoho grafu vychází prakticky stejná hodnota a pokud srovnáme obě dvě metody, tak se hodnoty liší jenom zhruba o 3%, což potvrzuje teorii, že by měly být frekvenční závislosti stejné u obou metod.



Obr. 9. Graf závislosti frekvencí vydávaných gumičkou konstantní délky v závislosti na vzdálenosti  $l$



Obr. 10. Graf závislosti frekvencí vydávaných gumičkou s upravovanou délkou (závaží upevněno těsně za kladkou)

### Diskuze

Měření mohlo jednak ovlivnit nepřesné určení délky gumičky, ve které vznikal zvuk, protože kvůli použití kladky nebylo přesně definované místo upevnění.

Další možná chyba mohla vzniknout už kvůli způsobu záznamu zvuku, protože mikrofon je směrový a zaznamenával tak více zvuk z určité oblasti gumičky. Další vliv mikrofonu je takový, že je potřeba, aby v místě detekce zvuku byla kmitna nebo alespoň aby se nenacházel v oblasti uzlu, protože v uzlu není mikrofon schopný měřit (takřka jic – nic neslyší). Podobný vliv by mohlo mít i to, na kterém místě byla gumička rozkmitaná, protože by se mohlo stát, že některé frekvence by byly utlumené, ale protože byla rozkmitávaná prsty, tak prakticky vždy se vybudily všechny frekvence.

Je také možné, že síla nebyla přesně určená závažím, vzhledem k tomu, že gumička byla po zatížení zafixována upevněním kladky, ale na druhou stranu by nejspíše chyba byla větší, pokud by kladka byla volná a mohla by sama kmitat. Pak bychom nejspíše generovali i jiné zvukové frekvence a ty, které jsme chtěli pozorovat, by byly posunuté/rozmazané.

Vzhledem k tomu, že gumička byla relativně dost zatížena, měření mohlo být ovlivněno i trvalou změnou jejich fyzikálních vlastností v průběhu měření.

### Závěr

Ověřili jsme, že frekvence vydávané gumičkou jsou nepřímo úměrné délce gumičky mezi upevněním a kladkou. Také jsme pozorovali prvních 5 harmonických frekvencí a z nafitovaných hodnot jsme přibližně určili rychlost šíření příčných vln v gumičce.

Karel Kolář  
karel@fykos.cz

**Úloha IV. S ... Möbiova transformace a konformní zobrazení** (6 bodů; průměr -; )

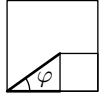
- a) Dokažte tvrzení d), podle něhož Möbiova transformace zachovává úhly. Jedna z možností je uvědomit si, že v kruhové inverzi existují kružnice, které se zobrazují samy na sebe.
- b) Najděte podmínku na koeficienty Möbiovy transformace, aby zobrazovala komplexní kruh na komplexní kruh ( $|z| \leq 1$ ) a najděte konkrétní transformaci, která zobrazuje komplexní kruh na horní komplexní polorovinu. Co to fyzikálně znamená?
- c) Podle teorie relativity se tělesa pohybující se rychlostí blízkou rychlosti světla zkracují (Lorentzova kontrakce). To ovšem ještě neznamená, že bychom je viděli kratší (například, že bychom místo pohybující se koule viděli pohybující se elipsoid). Využijte představy, který jsme v tomto díle vybudovali, abyste odvodili, že předměty letící rychlostí světla vidíme o kousek pootočené, nikoliv zkrácené (Terellova rotace).

**Möbiova transformace zachovává úhly**

Jak jsme si ukázali v předešlých dílech, holomorfní funkcí realizované zobrazení nám zobrazuje čtverečky na čtverečky, které jsou zvětšené/zmenšené a pootočené, nanejvýš zrcadlené. Budeme-li nyní uvažovat libovolný úhel, tak jej můžeme pomocí čtverečků vymezit např. jako na obrázku 11.

Bude-li větší čtvereček pouze posunut, otočen, přeškálován nebo zrcadlen, bude toto platit i pro menší z nich a jimi vymezovaný úhel bude nezměněn.

Ukažme si, že funkce  $f(z) = (az + b)/(cz + d)$  je holomorfní. Toto ukážeme tak, že ji zderivujeme.



Obr. 11

$$f'(z) = \frac{1}{\Delta z} (f(z + \Delta z) - f(z)) = \frac{1}{\Delta z} \frac{az + b}{cz + d} \cdot \left( \frac{1 + \frac{a}{az+b} \Delta z}{1 + \frac{c}{cz+d} \Delta z} - 1 \right).$$

Ještě si rozeberme několik problematických případů. Pokud  $az + b = 0$ , potom nemůžeme provést vytýkání v čitateli a výraz pro derivaci by měl tvar

$$f'(z) = \frac{1}{\Delta z} \frac{a\Delta z}{cz + d + c\Delta z} = \frac{a}{cz + d},$$

tedy v tomto bodě derivace existuje a není žádný problém. Pokud by platilo, že  $cz + d = 0$ , tak Möbiova transformace zobrazuje takovýto bod  $z$  do nekonečna, ale budeme-li uvažovat jakýkoli libovolně blízký bod, tak již nebudeme mít problém s holomorfností, ale velikost zkoumaného úhlu se změní libovolně málo.

Pro ostatní hodnoty proměnné  $z$  již můžeme výraz pro derivaci upravovat libovolně. Protože je  $\Delta z$  malé, jmenovatel rozvineme, jako součet geometrické řady a zanedbáme členy řádu  $\Delta z^2$  a vyšší

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{1}{\Delta z} \frac{az + b}{cz + d} \left( \left( 1 + \frac{a}{az+b} \Delta z \right) \left( 1 - \frac{c}{cz+d} \Delta z \right) - 1 \right) \\ &= \frac{az + b}{cz + d} \left( \frac{a}{az+b} - \frac{c}{cz+d} \right) = \frac{a(cz+d) - c(az+b)}{(cz+d)^2}. \end{aligned}$$

Protože existuje derivace, tak toto zobrazení zachovává úhly.

*Hledání transformací*

Má-li nějaká transformace zobrazovat např. kruh  $|z| < 1$  na sebe, musí být transformací identickou, to znamená, že  $f(z) = z$ . Pro koeficienty Möbiovy transformace to znamená:  $a = 1$ ,  $b = 0$ ,  $c = 0$ ,  $d = 1$ .

Möbiova transformace má relativně málo volných parametrů, proto konstanty pro transformaci odpovídající zobrazení kruhu na polorovinu. V korespondenci s geometrickou představou budeme požadovat aby platilo:  $f(i) = \infty$ ,  $f(-i) = 0$  a pro ostatní  $z$ , aby byla  $f(z)$  reálná. Z první podmínky plyne:  $a(-i) + b = 0$ , z druhé  $ci + d = 0$ . Dáme-li tyto podmínky dohromady, dostáváme

$$f(z) = \frac{az + ai}{cz - ci}.$$

Dosadíme-li např.  $z = 1$ , aby  $f(1)$  byla reálná můžeme položit např.  $c = 2i$ ,  $a = 1$ . Výsledná transformace bude mít tvar

$$f(z) = \frac{z + i}{2iz + 2}.$$

Ještě musíme ověřit, zdali jde opravdu o zobrazení na horní, nikoli dolní polorovinu, platí  $f(0) = i/2$ , proto jsme zvolili správné znaménko u koeficientů  $a$  a  $c$ .

*Pohybující se koule*

Podobná úloha byla zadána ve 22. ročníku v 6. sérii. Její řešení naleznete na webové adrese <http://fykos.cz/rocnik22/reseni/reseni6-3.pdf>.

**Lukáš Ledvina**

lukasl@fykos.cz

**Úloha V. S ... aviatická** (6 bodů; průměr -; )

- Popište geometrickou konstrukci (pomocí kružítka a pravítka) profilu Žukovského.
- Zkuste nakreslit proudnice v okolí profilu Žukovského. Zvolte si takové parametry  $d/l$  a  $m/l$ , aby měly praktické opodstatnění.
- Jaká vztaková síla působí na rovnou desku? Jaká vztaková síla působí na desku tvaru kruhového oblouku?
- Zkuste nakreslit profil křídla odpovídající Karmánově-Trefftzově transformaci.

*Lukáš si chtěl vylepšit letadlo.*

*Geometrická konstrukce*

Ujasněme si nejdříve, co potřebujeme znát, abychom dokázali provádět operace s komplexními čísly.

- Sčítání:* Chceme-li sečíst dva vektory, musíme jeden z nich umět přenést do koncového bodu druhého a máme-li vytyčen směr, kružítkem přeneseme jeho velikost. Toto je na eukleidovském prostoru jednoduché, avšak v jiné geometrii, např. na povrchu koule to nemusí být snadné, dokonce ani jednoznačné.
- Násobení reálných čísel:* Vynásobíme-li dvě reálná čísla, získáme obsah obdélníku se stranami těchto délek. Pokud chceme umět dvěma reálným číslům přiřadit jiné reálné číslo, které je jejich součinem, musíme vědět, jaký obsah má jednotkový čtverec, tj. musíme vědět, jak je dlouhá jednotka. Pro dělení platí obdobná podmínka.



- c) *Komplexní sdružení*: Chceme-li určit, jaké komplexní číslo je komplexně sdružené, musíme jej zrcadlit okolo osy  $x$ , a musíme proto vědět, kde je počátek a jaký směr odpovídá  $x$ -ové ose.
- d) *Násobení komplexních čísel*: Abychom uměli vynásobit dvě komplexní čísla musíme vynásobit jejich velikost a sečíst jejich argumenty, k této operaci potřebujeme ještě vědět, jaký je kladný směr reálné osy.
- e) *Odmocňování*:  $k$ -tou odmocninou z komplexní jednotky jsme si zavedli jako komplexní číslo mající  $k$ -krát menší argument. Proto ještě potřebujeme vědět, jaký je kladný smysl otáčení.

Máme zadáno komplexní číslo  $z$  a máme sestrotit komplexní číslo  $z + 1/z$ . Hlavním úkolem je sestrotit číslo  $1/z$ . Protože platí  $z = |z| \exp(i \arg z)$ , můžeme psát

$$1/z = 1/|z| e^{-i \arg z}.$$

Druhý člen je pouze směr a ten dokážeme sestrotit, pokud víme, kde je osa  $x$ . Zaměříme se na sestrotění  $1/|z|$ . Můžeme využít Eukleidovu větu o výšce, sestrotíme-li pravoúhlý trojúhelník s výškou jednotkové délky a jedním přilehlým úsekem délky  $|z|$ , druhý úsek bude mít délku  $1/|z|$ .

Nyní stačí tento příspěvek přičíst k původnímu vektoru a jsme hotovi.

### *Proudnice v okolí profilu*

Jak jsme uvedli v textu seriálu, proudění v okolí profilu je pouze obrazem proudění v okolí válce, jako byl samotný profil obrazem válce. Proto musíme proudnice určené rovnicí

$$\operatorname{Re} w(z) = \text{konst},$$

kde  $w(z)$  je komplexní potenciál proudění, zobrazit Žukovského transformací.  $\xi = z + l^2/z$ .

### *Vztlaková síla na desku*

Jak jsme odvodili v textu seriálu, pro vztlakovou a odporovou sílu platí vztahy

$$R_y = 4\pi\rho \left( d + \sqrt{m^2 + l^2} \right) U_\infty^2 \sin(\alpha + \beta) \cos \alpha,$$

$$R_x = 4\pi\rho \left( d + \sqrt{m^2 + l^2} \right) U_\infty^2 \sin(\alpha + \beta) \sin \alpha.$$

Transformace vedoucí na rovnou desku odpovídá  $m = 0$ ,  $d = 0$ , tj.  $\beta = 0$ . Proto vztlaková síla je

$$R_y = 2\pi\rho l U_\infty^2 \sin 2\alpha,$$

kde délka desky je  $4l$ ,  $\rho$  je hustota okolního vzduchu,  $U_\infty$  je dopředná rychlost a  $\alpha$  je úhel náběhu. Je vidět, že maximální vztlakové síle odpovídá úhel  $45^\circ$ , což je typicky maximální výchylka kormidel.

### *Vztlaková síla na desku tvaru části válce*

Abychom dostali profil „deskovitého“ tvaru, musí mít dva ostré rohy, proto původní zobrazovaná kružnice musí procházet body  $\pm l$ , proto  $d = 0$ . Na nejvyšší bod se musí ze symetrie zobrazit body  $i(m \pm a)$ , pokud jsme označili  $a$  poloměr zobrazované kružnice. Dosadíme-li do

transformačního vztahu, zjistíme, že se zobrazují na bod  $2mi$ . Nyní víme, že profil prochází body  $\pm 2l$  a bodem  $2mi$ . Z jednoduché geometrie určíme jeho poloměr

$$r = \frac{l^2 + m^2}{m} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{1}{2} \left( r - \sqrt{r^2 - 4l^2} \right).$$

Nyní musíme uvažovat pouze menší kořen, protože pokud by bylo  $m > r$ , nemohla by zobrazená kružnice procházet body  $\pm l$ .

Pro vztlakovou sílu vychází

$$R_y = 4\pi\sigma r \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - 4\frac{l^2}{r^2}} \right)} U_\infty^2 \sin(\alpha + \beta) \cos \alpha, \quad \beta = \arctg \frac{m}{l}.$$

Užili jsme stejného značení jako pro rovnou desku.

### Karmánův–Trefftzův profil

Budeme jej konstruovat stejně jako profil Žukovského, tj. budeme požadovat, aby měl ostrou špičku, proto zobrazená kružnice musí procházet singulárním bodem transformace

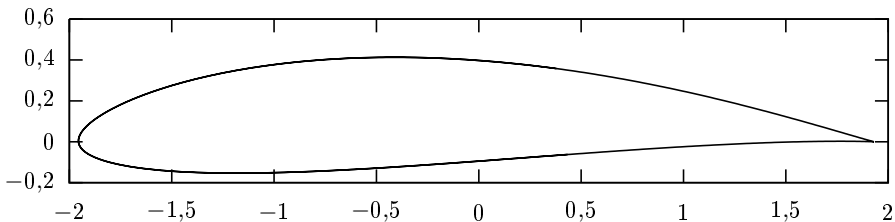
$$\frac{\xi - nl}{\xi + nl} = \left( \frac{z - l}{z + l} \right)^n.$$

Nyní vypočteme diferenciál rovnice uvedené výše, tj. obě strany zderivujeme dle parametru  $p$ .<sup>4</sup>

$$\frac{2nl}{(\xi + nl)^2} d\xi = 2nl \frac{(z - l)^{n-1}}{(z - l)^{n+1}} dz \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{d\xi} = \frac{(z + l)^{n-1}}{(z - l)^{n+1} (\xi + nl)^2}.$$

Singulárním bodem této transformace jsou tedy body  $z = l$  a  $\xi = -nl$ , kterému odpovídá  $z = -l$ .

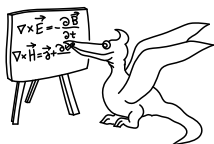
Profil pro  $m/l = 0,1$  a  $d/l = 0,05$  je na obrázku 12.



Obr. 12. Karmánův profil,  $m/l = 0,1$  a  $d/l = 0,05$

**Lukáš Ledvina**  
lukas1@fykos.cz

<sup>4)</sup> Pokud  $L$  a  $P$  značí jednotlivé strany rovnice, platí  $0 = \frac{d(L-P)}{dp} = \frac{dL}{d\xi} \frac{d\xi}{dp} - \frac{dP}{dz} \frac{dz}{dp}$ , z toho vyplývá  $\frac{dz}{d\xi} = \frac{dL}{d\xi} / \frac{dP}{dz}$ .



## Seriál na pokračování

### Kapitola 6: Závěrečná

V této kapitole si řekneme něco o dalších šikovných použitích komplexních čísel. Především to bude řešení diferenciálních rovnic a Fourierova transformace, kterou aplikujeme na úlohy z optiky.

#### Řešení diferenciálních rovnic

Tuto tematiku jsme již lehce nakousli ve druhém dílu seriálu, když jsme rozebírali řešení střídavých obvodů.

Ukazuje se, že studujeme-li nějaký proces, který je typicky popsán lineární diferenciální rovnicí např. harmonický oscilátor, dříve zmíněné střídavé obvody, vedení tepla látkou, vlnovou rovnicí, které jsou všechny lineární<sup>5</sup>, je výhodnější jiný popis, než klasický.

Dále budeme předpokládat, že na systém působíme z vnějšku pouze funkcemi v následujícím tvaru (konkrétní časový vývoj bude pak jejich součet)

$$y(t) = A(\omega) \cdot e^{i\omega t}, \quad (5)$$

kde  $\omega$  je obecně komplexní číslo a  $A$  je obecná funkce, která nemusí být ani holomorfní<sup>6</sup>. Také předpokládáme, že systém se uvnitř chová dle stejných vztahů.

Výhoda funkcí v tomto tvaru je značná. Budeme-li derivovat funkci (5) podle času, dostaneme velmi jednoduchý výsledek

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(\omega)i\omega e^{i\omega t} = i\omega \cdot y(t).$$

Tedy místo derivování stačí násobit konstantou  $i\omega$ , což je výrazně jednodušší operace.

Zkusme si tento postup například opět na harmonickém oscilátoru. Pro harmonický oscilátor platí  $F = m\ddot{x} = -kx$ . Budeme-li předpokládat řešení ve tvaru (5). Pak nám rovnice oscilátoru přejde do tvaru

$$m(i\omega)^2 A(\omega) = -kA(\omega) \quad \Rightarrow \quad A(\omega)(m\omega^2 - k) = 0,$$

kde jsme vydělili členem  $\exp(i\omega t) \neq 0$ , který se nacházel na obou stranách. Toto již ovšem není diferenciální rovnice jako na počátku, ale pouze rovnice algebraická, která má dvě řešení  $\omega_{1,2} = \pm\sqrt{k/m}$ . Z tvaru výše je vidět, že funkce  $A(\omega)$  musí být nulová pro všechna  $\omega \neq \omega_{1,2}$ , naopak pro ostatní úhlové rychlosti může nabývat libovolné hodnoty<sup>7</sup>.

<sup>5</sup>) Lineární znamená, že pokud máme dvě řešení problému, tak jejich součet i libovolný násobek každého je opět řešením.

<sup>6</sup>) Typicky nabývá nenulové hodnoty pouze pro několik málo hodnot  $\omega$ .

<sup>7</sup>) Tyto hodnoty určíme z počátečních podmínek, které nám říkají, jaká je poloha a rychlost v nějakém počátečním čase. Počátečními podmínkami obecně rozumíme hodnoty např. všech derivací v čase nula, nebo může jít i o jiné určující podmínky, pak ale již nemusí být zaručena jednoznačnost řešení.

Pro lineární diferenciální rovnice, to jsou takové, ve kterých se vyskytují derivace hledané funkce, ale jsou násobeny pouze konstantami, obecně platí, že je můžeme přepsat do tvaru  $A(\omega) \cdot P_n(\omega) = 0$ , kde  $P_n$  je polynom řádu  $n$  jenž má právě  $n$  kořenů. Pokud jsou tyto kořeny různé, funkce  $A(\omega)$  je nenulová v  $n$  bodech a její hodnoty určíme ze znalosti  $n$  počátečních podmínek. Pokud však má polynom  $P_n(\omega)$  více násobný kořen, nastává problém, protože pro některé počáteční podmínky bychom nebyli schopni nalézt hodnoty funkce  $A(\omega)$ , tak aby byly splněny.

Uvažme nyní modelovou situaci. Máme posloupnost systémů ve kterých dva kořeny polynomu přes sebe postupně přechází. Předpokládali bychom, že řešení takovéto rovnice se bude také spojitě měnit. Uvažujme polynom  $P_2(\omega) = (\omega - \omega_0 + \lambda)(\omega - \omega_0 - \lambda)$ , kde malý parametr  $\lambda$  budeme měnit v okolí nuly. Kořeny tohoto polynomu jsou  $\omega_{1,2} = \omega_0 \pm \lambda$ . Řešení diferenciální rovnice dané tímto charakteristickým polynomem odpovídají např. tlumenému harmonickému oscilátoru, který je trochu nedotlumený, resp. přetlumený. Uvážíme-li volnost ve volbě  $A(\omega)$ , můžeme řešení této diferenciální rovnice psát ve tvaru

$$y(t) = A_1 e^{(\omega_0 + \lambda)t} + A_2 e^{(\omega_0 - \lambda)t} = B_1 e^{\omega_0 t} \left( e^{\lambda t} + e^{-\lambda t} \right) + B_2 e^{\omega_0 t} \left( e^{\lambda t} - e^{-\lambda t} \right),$$

protože jde o nejobecnější volbu  $A(\omega)$ . Pro konstanty  $B_{1,2}$  platí

$$A_1 = B_1 + B_2, \quad A_2 = B_1 - B_2.$$

Pošleme-li  $\lambda \rightarrow 0$ , můžeme exponenciály v závorkách rozvinout do Taylorova rozvoje následovně:  $\exp(\lambda t) + \exp(-\lambda t) \approx 2$  a  $\exp(\lambda t) - \exp(-\lambda t) \approx 2\lambda t$ . Řešení diferenciální rovnice proto přejde do tvaru

$$y(t) = (C_1 + C_2 t) e^{\omega_0 t},$$

kde konstanty  $C_{1,2}$  jsou opět lineární kombinací  $B_{1,2}$ .

Tento postup bychom mohli zopakovat i pro vícenásobné kořeny a zjistili bychom, že pokud se v charakteristickém polynomu vyskytne nějaký vícenásobný kořen, musíme jemu odpovídající exponenciálu vynásobit polynomem se stupněm o jedna menším, než je násobnost kořene.

### Fourierova transformace

V předešlém případě jsme uvažovali řešení, která pro  $t \rightarrow \pm\infty$  mohla být nekonečná. Pokud bychom se omezili pouze na řešení jejichž integrál je konečný, můžeme se omezit pouze na reálné omegy ve vztahu (5). Pokud bychom použili jiné, než reálné  $\omega$ , funkce  $y(t)$  by divergovala a jistě už by nebyla integrovatelná přes celou reálnou osu. Dokonce i kdybychom vzali nějakou lineární kombinaci těchto funkcí, tak bychom nezískali nic integrabilního.

Dále budeme uvažovat kvadraticky integrabilní funkce<sup>8</sup>, a tak můžeme zavést Fourierovu transformaci  $p(k)$  funkce  $f(x)$  následovně:

$$p(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x}, \quad f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int p(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{k}. \quad (6)$$

Parametr  $\mathbf{k}$ , na kterém závisí Fourierův obraz  $p(\mathbf{k})$ , se nazývá vlnovým vektorem a má důležitou roli v optice.

<sup>8</sup>) Umocníme-li absolutní hodnotu kvadraticky integrabilní funkce na druhou a zintegrujeme, dostaneme konečné číslo.

Nyní si podrobněji rozeberme, co znamenají výrazy výše. Budeme-li uvažovat vektor ve třírozměrném Eukleidovském prostoru, můžeme jej zapsat jako součet součinů konkrétní souřadnice a jí odpovídajícímu bázevému vektoru. Jediný rozdíl je v tom, že zde máme více bázevých vektorů  $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$  (dokonce nespočetně mnoho), proto suma přejde v integrál.  $f(\mathbf{k})$  je v naší analogii vektorem v  $\mathbb{E}^3$  a  $p(\mathbf{x})$  jsou souřadnicemi vůči bázi.

### Řešení parciálních diferenciálních rovnic

Nyní si ukážeme, proč je tak výhodné některé parciální diferenciální rovnice řešit v impulzovém prostoru, tj. prostor, ve kterém jsou funkce  $p(\mathbf{k})$ , místo prostoru přímého, tj. funkcí jako  $f(\mathbf{x})$ .

Uvažujme nyní například vlnovou rovnici ( $c$  je rychlost šíření vzruchu)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Nyní zkusíme vypočítat Fourierovu transformaci (6) této rovnice podle času, tzn.  $\mathbf{x} \equiv t$ ,  $\mathbf{k} \equiv \omega$ ,  $f \equiv u$  a  $p \equiv \hat{u}$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) e^{i\omega t} dt = 0.$$

Druhý člen můžeme dvakrát integrovat *per partes*<sup>9</sup> a získáme

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{c^2} u \right) e^{i\omega t} dt = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \hat{u}(x, \omega)}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \hat{u}(x, \omega) = 0.$$

Poslední identita platí, protože násobení  $\omega^2$  můžeme provádět před i po integraci se stejným výsledkem, stejně tak i derivování podle prostorových souřadnic.

Tato rovnice ale již není diferenciální v proměnné  $\omega$ , proto jsme dosáhli výrazného zjednodušení. Nyní si zvolíme konkrétní  $\omega$  a vyřešíme jednoduchou diferenciální rovnici v proměnné  $x$ . Můžeme použít například metodu uvedenou v první části.

Ukažme si toto na příkladu kmitání struny délky  $L$  upevněné na obou koncích. Pro strunu platí, že  $u(0, \omega) = u(L, \omega) = 0$ .

Jak již víme, řešením této rovnice je součet exponenciál  $u(x, \omega) = A_{1,2} \exp(\pm \omega x/c)$ . Abychom splnili okrajové podmínky, vyhovují nám pouze řešení ve tvaru

$$u(x, \omega) = u_k \sin\left(\frac{\pi x}{L} k\right),$$

kde  $k$  je přirozené číslo a  $u_k$  libovolná konstanta. Mimo jiné to znamená, že  $\omega = k\pi c/L$ . Tj. existuje pouze několik frekvencí, na kterých může struna kmitat.

Obdobně bychom řešili rovnici vedení tepla

$$\Delta u(\mathbf{x}, t) - \lambda \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = 0.$$

<sup>9)</sup> Platí  $\int_a^b u v' = [uv]_a^b - \int_a^b u' v$ . Tuto identitu dostaneme integrací vzorce pro derivaci součinu  $(uv)' = u'v + uv'$ .

Akorát nyní bychom aplikovali Fourierovu transformaci na prostorovou část funkce  $u$ , protože obecně neexistuje řešení pro  $t \rightarrow -\infty$ . Toto řešení nemusí existovat, protože s postupujícím časem roste termodynamická entropie. Při zpětném vývoji musí klesat a někdy dosáhne minimální hodnoty, toto nastane, pokud bude funkce  $u$  v proměnné  $x$  součtem několika delta funkcí<sup>10</sup>.

Nyní provedeme postup uvedený výše a za proměnnou Fourierova obrazu  $\mathbf{x}$  budeme uvažovat proměnnou  $\boldsymbol{\xi}$ . Dostáváme

$$-|\boldsymbol{\xi}|^2 \hat{u}(\boldsymbol{\xi}, t) - \lambda \frac{\partial \hat{u}(\boldsymbol{\xi}, t)}{\partial t} = 0.$$

Toto je diferenciální rovnice pouze v proměnné  $t$ , kterou již umíme vyřešit

$$\hat{u}(\boldsymbol{\xi}, t) = \hat{u}_0(\boldsymbol{\xi}) \exp\left(-\frac{|\boldsymbol{\xi}|^2}{\lambda} t\right),$$

kde  $\hat{u}_0(\boldsymbol{\xi})$  je Fourierova transformace počáteční podmínky. Pokud chceme určit řešení, musíme vypočítat inverzní Fourierovu transformaci. To není vždy jednoduché, ale povedlo se nám převést úlohu řešení diferenciální rovnice na úlohu integrování, což je výrazně jednodušší problém.

### Difrakce

Další úlohou, ve které se můžeme potkat s Fourierovu transformací, je difrakce na čemkoli. Uvědomme si nyní, jaký význam má funkce  $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$ . Jde o fázi rovinné vlny, která se pohybuje ve směru  $\mathbf{k}$  a  $p(\mathbf{k})$  je její amplituda, proto odpovídající intenzita záření je  $|p(\mathbf{k})|^2$ .

Uvažujme nyní modelovou situaci. Na nějaký vzorek svítíme monochromatickou rovinnou vlnou,<sup>11</sup> ta na vzorku nějak interaguje a v pozmeněné podobě ze vzorku vyjde. Budeme-li celou situaci pozorovat ze vzdálenosti mnohem větší, než jsou rozměry vzorku, budeme ve směru  $\mathbf{k}$  pozorovat právě intezitu  $|p(\mathbf{k})|^2$ . Nebo můžeme použít spojnu čočku, pro níž víme, že paprsky dopadající na čočku rovnoběžně se lámou do jednoho bodu na ohniskové rovině. Svazek rovnoběžných paprsků odpovídá konkrétní rovinné vlně, tj. bodu v recipročním prostoru. V ohniskové rovině proto budeme pozorovat Fourierův obraz předmětu.

Ukažme si nyní, jak vypočítáme difrakci na mřížce s mřížkovou konstantou  $a$ . Předem se omlouváme, že toto odvození bude do jisté míry mávání rukama, protože nemáme prostor na pořádné vysvětlení toho, co je distribuce.

Abychom zjistili, do kterého směru se bude světlo rozptylovat a do kterého nikoli, musíme vypočítat Fourierův obraz mřížky. Budeme uvažovat, že mřížka obsahuje velké množství vrypů, a tedy se nebudeme muset zabývat okrajovými jevy. Funkce, kterou budeme transformovat, je amplituda jedné ze složek elektromagnetické vlny (např. elektrické intenzity) po projití mřížkou. Funkce  $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$  je periodická s periodou  $x_p = 2\pi/k_x$ ,  $k_x$  je složka vlnového vektoru ve směru osy  $x$ , která je kolmá jak na vrypy, tak na původní směr šíření. Pokud budeme uvažovat vlnový vektor  $k_x \neq 2\pi/a$  nebo jeho celočíselný násobek, pozorovaná intenzita bude nulová. Pro dostatečnou délku mřížky se v integrálu vystředují na nulu příspěvky od  $\exp(ik_x x)$ , protože budou mít náhodnou fázi a střední hodnota funkcí  $\sin x$  a  $\cos x$  přes  $x$  je nula. Platí

<sup>10)</sup> Delta funkce ( $\delta$  funkce) vznikne například tak, že vezmeme funkci  $y = \exp(-x^2)$  a budeme ji užít ve směru osy  $x$  a protahovat ve směru osy  $y$  tak, aby pod ní byla stále stejná plocha.

<sup>11)</sup> Může jít o štěrbinu, na kterou svítíme viditelným světlem, ale také může jít o krystal, na který svítíme Röntgenovským zářením.

$|\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$  a směr tohoto vektoru odpovídá směru šíření záření. Z naší podmínky pro vyzářování dostáváme

$$l \cdot a = 2\pi/k_x \Rightarrow \lambda_x(l) = l \cdot a,$$

kde  $l$  je celé číslo určující, o kolikáté maximum jde a  $\lambda_x$  je projekce úsečky délky  $\lambda$  rovnoběžné se směrem šíření do směru osy  $x$ . Mimo jiné to zmanemá, že maxima budeme pozorovat pod úhly  $\varphi_l = \lambda_x(l)/\lambda = l \cdot a/\lambda$ .

### Závěrem

Chtěli bychom vám poděkovat, že jste s námi vydrželi řešit seriál až do posledního dílu. Ukázali jsme si, jak řešit střídavé elektrické obvody, rozličné harmonicky kmitající úlohy, dále jsme si pověděli, jak se vypořádat s dvourozměrnými úlohami z elektrostatiky. Také jsme uvedli příklady dalších transformací, které jsme aplikovali na modely křídél letadel a nakonec jsme se dozvěděli něco málo o řešení diferenciálních rovnic a letmo jsme ukázali, jak řešit difrakční úlohy z optiky. Doufáme, že vám bude seriál alespoň v něčem užitečný.

*Lukáš Ledvina a Jakub Michálek*

### Úloha VI. S ... všehochuť

- Předpokládejme, že máme radioaktivní látku  $X$ , která se rozpadá na látku  $Y$  s poločasem rozpadu  $T_1$ , ta se následně rozpadá na stabilní látku  $Z$  s poločasem rozpadu  $T_2$ . Jak závisí koncentrace látky  $Y$  na čase, pokud jsme na počátku měli pouze látku  $X$ ?
- Vypočítejte jak vypadá difrakční obrazec vzniklý průchodem světla o vlnové délce  $\lambda$  štěrbinou šířky  $d$ .
- Pokuste se najít frekvence  $\omega$ , pro které existuje řešení vlnové rovnice na čtverci o hraně  $a$ . Kolik různých funkcí odpovídá jedné úhlové frekvenci?

*Nápověda* Pro prostorovou část předpokládejte řešení ve tvaru  $A(x, y) = X(x)Y(y)$ .

## Zkrácené výsledkové listiny<sup>12</sup>

### Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	V	%	$\Sigma$
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	5	3	4	4	3	8	6	<b>33</b>	100	<b>170</b>
1. <i>Tomáš Kořínek</i>	G, Žamberk	-	-	-	-	-	-	-	0	42	<b>28</b>
2. <i>Karolína Šromeková</i>	G D. Tatarku, Poprad	-	-	1	-	-	-	-	1	48	<b>14</b>
3. <i>Markéta Vohníková</i>	PORG, Praha	-	-	1	-	-	-	-	1	43	<b>10</b>

### Kategorie druhých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	V	%	$\Sigma$
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	5	3	4	4	3	8	6	<b>33</b>	100	<b>170</b>
1. <i>Kristýna Kohoutová</i>	G, Žamberk	3	-	2	4	2	2	-	<b>13</b>	67	<b>67</b>
2.-3. <i>Filip Murár</i>	G, Masarykovo nám., Třebíč	1	0	4	3	2	-	-	<b>10</b>	72	<b>65</b>
<i>Jakub Šafín</i>	G, P. Horova, Michalovce	-	-	-	-	-	-	-	0	67	<b>65</b>
4. <i>Lubomír Grund</i>	G Zábřeh	2	-	4	4	-	-	-	<b>10</b>	63	<b>42</b>

<sup>12)</sup> Kompletní výsledkové listiny najdete na našem webu.

5. Tomáš Azman	G, Boskovice	-	-	-	-	-	-	-	0	53	34
6. Veronika Dočkalová	G, Elgartova, Brno	-	-	-	-	-	-	-	0	44	32
7. Jakub Doležal	G, Špitálská, Praha	1	1	-	2	-	-	-	4	40	25
8. Lukáš Timko	G P. de Coubertina, Tábor	4	2	-	-	-	-	-	6	58	23
9. Martin Gajdošík	G, Uherské Hradiště	-	-	-	-	-	-	-	0	61	17
10. Jan Povolný	G Brno, tř. Kpt. Jaroše 14	-	1	3	-	-	-	-	4	64	14
11. Jiří Juřena	G, Uherské Hradiště	-	-	-	-	-	-	-	0	85	11
12. Lukáš Fusek	G, Uherské Hradiště	-	-	-	-	-	-	-	0	47	9
13. Vladimír Macko	G Ľ. Štúra, Zvolen	-	-	-	-	-	-	-	0	47	8
14. Ota Kunt	G F. X. Šaldy, Liberec	2	-	-	4	-	-	-	6	67	6

### Kategorie třetích ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	V	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	5	3	4	4	3	8	6	33	100	170
1. Jakub Vošmera	G Matyáše Lercha, Brno	-	-	-	-	-	-	-	0	89	91
2. Tomáš Bárta	G, Nad Štolou Praha	5	3	2	4	-	6	-	20	61	59
3. Jakub Kubečka	G, Nymburk	-	1	-	4	-	-	-	5	52	49
4. Ondřej Míl	Jiráskovo G, Náchod	-	-	3	-	-	7	-	10	81	29

### Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	V	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	5	3	4	4	3	8	6	33	100	170
1. Ján Pulmann	G Grösslingova, Bratislava	5	-	4	5	2	6	-	22	93	43
2. Jan Sopoušek	Gymnázium, Brno-Řečkovice	-	-	-	-	-	-	-	0	58	29
3. Dominika Kalasová	G, Boskovice	2	-	-	3	-	-	-	5	44	23
4. Martin Bucháček	G Luďka Pika, Plzeň	-	-	-	-	-	-	-	0	79	22
5. Jan Brandejs	G Christiana Dopplera, Praha	-	-	-	-	-	-	-	0	65	17
6. Tomáš Pikálek	G, Boskovice	-	-	-	-	-	-	-	0	37	14
7. Tomáš Valíček	G Brno, tř. Kpt. Jaroše 14	3	3	4	-	-	3	-	13	65	13



### FYKOS

UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta

Ústav teoretické fyziky

V Holešovičkách 2

180 00 Praha 8

www: <http://fykos.cz>

e-mail pro řešení: [fykos-solutions@mff.cuni.cz](mailto:fykos-solutions@mff.cuni.cz)

e-mail: [fykos@mff.cuni.cz](mailto:fykos@mff.cuni.cz)

FYKOS je také na Facebooku

<http://www.facebook.com/Fykos>

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky

UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.

Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.