24. ročník, úloha I . 2 ... *káča bez čerta* *(4 body; průměr 2,12; řešilo 26 studentů)*

Jakub má u babičky káču, na jejíž horní ploše je nakreslená spirála. Káču roztočíme a díváme se na ni shora. Jaké obrazce pozorujeme a proč? *Na dětství zavzpomínal Jakub.*

To, co uvidíme na káči, bude záviset zejména na její úhlové frekvenci otáčení ω_{k}. Existují dvě oblasti, ve kterých se o obrazce budeme zajímat. Lidské oko totiž má určitou dobu odezvy, po kterou mu trvá zareagovat na změnu obrazu. Mimochodem, způsob, jakým lidské oko snímá obraz a jakým jej následně vyhodnocuje, je přinejmenším zajímavý. Například věci, které máme v periferní oblasti vidění, vidíme černobíle a mozek si barvy vymýšlí podle toho, co viděl v bezprostřední minulosti. Ostré barevné vidění se omezuje na žlutou skvrnu. Vraťme se tedy k celkové odezvě oka. Ta činí asi $1/25\,\mathrm{s}$. V technice bychom ji popsali obnovovací frekvencí f_{o}; $\omega_{\mathrm{o}} = 2\pi f_{\mathrm{o}}$. Dá se tedy očekávat, že se obrazec, který uvidíme na káči, bude lišit podle toho, jestli je káča rychlejší než oko nebo naopak.

Obr. 1. Káča před roztočením

a) $\omega_{\mathrm{k}} < \omega_{\mathrm{o}}$

V takovéto situaci ještě dokážeme rozlišit to, že na káči je namalovaná spirála. S postupným zvyšováním frekvence se nám bude čím dál tím víc obtížněji rozlišovat, že spirála nejsou namalovaná kolečka. Podle směru navinutí spirály se nám bude zdát, že kolečka se přibližují ke středu nebo ke kraji. Toto je víceméně jenom psychologický efekt, pokud bychom nahradili oko kamerou s odpovídajícím počtem snímků za sekundu, viděli bychom stále rotující spirálu.

b) $\omega_{\mathrm{k}} \geq \omega_{\mathrm{o}}$

Zde je situace zajímavější. Představme si (pro jednoduchost), že se díváme na polopřímku vycházející ze středu spirály. Každému bodu ve vzdálenosti r na této polopřímce můžeme přiřadit hodnotu od 0 do 1, která bude odpovídat tomu, jak černý jej uvidíme (0 je černá, 1 bílá). Označme tuto veličinu $v(r)$. Během okamžiku, kdy oko snímá barvu tohoto bodu, jím projde oblouk,[1] na kterém se střídají černá a bílá barva. Poměr mezi částí tohoto oblouku, která je černá a celkovou jeho délkou odpovídá barvě, kterou uvidíme. Přesněji

$$v(r) = 1 - \frac{b\left(\dfrac{\omega_{\mathrm{k}}}{\omega_{\mathrm{o}}}\right)}{2\pi r \dfrac{\omega_{\mathrm{k}}}{\omega_{\mathrm{o}}}}\,,$$

kde $b(\omega_{\mathrm{k}}/\omega_{\mathrm{o}})$ je délka oblouku, kterou zabírá černá barva a r je vzdálenost zkoumaného místa od středu.

Zde naše úvahy utneme, protože počítat $b(\omega_{\mathrm{k}})$ pro neznámou spirálu je poněkud obtížné (kromě parametrů spirály také závisí na poměru $\omega_{\mathrm{k}}/\omega_{\mathrm{o}}$), a odkážeme na pokusy, které jste si sami doma provedli. Někteří řešitelé si spirály ze zadání nalepili např. na disk brusky a zjistili, že se takto na káče objeví soustředné kruhy, které však nikam dál již necestují. Některým z vás sice cestovaly, ale to je jen další klam spojený s tím, že osa koná precesní pohyb, čímž se v čase efektivně mění rozložení černé a bílé na spirále. Na závěr ještě zmiňme,

[1] Je delší než obvod kružnice na níž leží, zvlášť pro velmi vysoké ω_{k}.

že pro vhodnou spirálu (např. $r_1 = k\varphi$, $r_2 = k(\varphi + \delta)$) lze dosáhnout i toho, že výsledný obrazec může mít jednu barvu.

Aleš Podolník
ales@fykos.cz