24. ročník, úloha I . 4 ... *bublifuk* *(5 bodů; průměr 2,67; řešilo 15 studentů)*

Mára si koupil bublifuk a jal se na balkoně vyfukovat bubliny, venku byl stálý atmosférický tlak p_0. Když se mu jedna obzvláště povedla (měla poloměr r a hmotnost mýdlové vody byla m), zamyslel se a vypočítal její celkovou tepelnou kapacitu. Učiňte totéž.

Jakub zavzpomínal, jak kdysi na náboji spočítal jeden příklad

Nejprve provedeme předběžné pozorování, které nám osvětlí, co je to povrchové napětí σ. Pokud bychom povrch kapaliny rozřízli, z obou částí by se vytvořily kuličky. Proto si představujeme, že v myšleném řezu drží pohromadě každý úsek délky Δl malí skřítkové silou o velikosti

$$\Delta F = \sigma \Delta l \tag{1}$$

a směru kolmém k rovině řezu. Vynásobením (1) kouskem dráhy Δs ve směru působení síly dostáváme změnu potenciální energie při zvětšení povrchu ΔA

$$\sigma \Delta l \Delta s = \sigma \Delta A\,.$$

Bublinu rozřízneme středem, čímž vznikne obvod $2\pi r$ a odpovídající síla $4\pi r\sigma$ za vnitřní i vnější povrch bubliny, kde r značí poloměr bubliny. Tu musí vyrovnat tlak uvnitř plynu p působící na průřezu πr^2. Z rovnosti sil vyjde

$$p = \frac{4\sigma}{r}\,,$$

což lze snadno zobecnit tak, že $p \mapsto p - p_0$ znamená přetlak.

Tepelná kapacita C se definuje jako teplo Q, které musíme dodat, abychom zvýšili teplotu tělesa o jednotku

$$Q = C\Delta T\,,$$

zatímco atmosférický tlak se nemění. Tepelná kapacita říká, jak je těžké těleso ohřívat, jak moc tepla se do něho vejde při jednotkovém zahřátí. Pro dodané teplo platí

$$Q = c\Delta T + \Delta U + \Delta U_{\mathrm{pov}}\,, \tag{2}$$

kde první člen vyjadřuje, že se mýdlová voda ohřívá s kapacitou c, druhý člen odpovídá vnitřní energii plynu $\Delta U = C_V \Delta T$, kde C_V se nazývá kapacita plynu při konstatním objemu a třetí člen vyjadřuje změnu potenciální energie uložené na površích $\Delta U_{\mathrm{pov}} = 2\sigma\Delta A$.

Stačí nám tedy zjistit, jak se změní plocha ΔA při změně teploty ΔT. Přitom vyjdeme z vzorce pro objem koule $V = Ar/3$, který je stejný jako vzorec pro objem kužele, a ze stavové rovnice ideálního plynu

$$nRT = pV = \left(p_0 + \frac{4\sigma}{r}\right)V = p_0 V + \frac{4\sigma}{3}A\,,$$

kde n značí látkové množství plynu a R plynovou konstantu. Z této rovnice zjistíme snadno přírustky

$$nR\Delta T = p_0 \Delta V + \frac{4}{3}\sigma\Delta A\,. \tag{3}$$

Zbývá najít vztah mezi přírustkem plochy a objemu (podrobně viz kap. 0 letošního seriálu). Ze vztahu pro délkovou a objemovou roztažnost plyne

$$3\frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta V}{V}$$

a analogický vztah můžeme napsat pro plošné přírustky

$$2\frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta A}{A}\,.$$

Ovšem z roznásobení poslední rovnice máme

$$\frac{1}{2}r\Delta A = A\Delta r = \Delta V\,,$$

kde poslední rovnost má u koule názorný geometrický význam, kterého se používá při odvození vztahu pro objem koule: Přírustek objemu je přibližně „kvádr" o podstavě A a výšce Δr.

Dosazením do stavové rovnice (3)

$$nR\Delta T = \frac{r}{2}\left(p_0 + \frac{8}{3}\frac{\sigma}{r}\right)\Delta A\,.$$

a do rovnice zachování energie (2) dostáváme kapacitu bubliny

$$C = c + C_V + \frac{4\sigma}{r}\frac{nR}{p_0 + \frac{2}{3}\frac{4\sigma}{r}} = c + C_V + \frac{nRp'}{p_0 + \frac{2}{3}p'}\,, \tag{4}$$

v níž rozhoduje kapilární přetlak $p' = 4\sigma/r$.

Je jasné, že bychom mohli ekvivalentně uvažovat práci plynu $(p - p_0)\,\Delta V$, kde ΔV značí změnu objemu. Pak bychom místo posledního členu v (2) dostali práci konanou plynem

$$(p - p_0)\,\Delta V = \frac{4\sigma}{r}\left(\frac{1}{2}r\Delta A\right) = \frac{4\sigma}{r}\frac{nR\Delta T}{p_0 + \frac{8}{3}\frac{\sigma}{r}}\,,$$

což dá poslední člen v (4). Pro monoatomární plyn $C_V = \frac{3}{2}nR$ lze například kapacitu zapsat

$$C = c + \frac{3}{2}nR\left(1 + \left(1 - \frac{p_0}{p_0 + \frac{2}{3}p'}\right)\right)\,,$$

takže vidíme, že člen z povrchového napětí má stejnou velikost jako kapacita plynu pouze pro malinké bublinky $p' \to \infty$ a že pro velké bubliny $p' \to 0$ se povrchové napětí vůbec neuplatní, což jsme čekali.

Jakub Michálek
`jmi@fykos.cz`