24. ročník, úloha I.E ... *vrh koulí* *(8 bodů; průměr 2,42; řešilo 12 studentů)*

Všichni dobře víme, že ve vakuu doletí všechny předměty vržené stejnou rychlostí a pod stejným úhlem stejně daleko. Co se ale stane, když je takto házeme za normálního tlaku? Změřte, jak závisí dolet tělesa konkrétního tvaru na jeho hmotnosti. Jak tato závislost vypadá teoreticky? Můžete ji spočítat, nebo nasimulovat na počítači např. v Excelu.

Vylovili jsme zlatou rybku z našeho archivu.

Teorie

Abychom určili brzdné zrychlení pro tělesa pohybující se ve vzduchu, vyjdeme z Newtonova vztahu pro odporovou sílu závislou na kvadrátu rychlosti, z čehož pro brzdné zrychlení dostaneme vztah

$$a_{\mathrm{odp}} = \frac{C\varrho S v^2}{2m}\,,$$

kde C je koeficient odporu určený tvarem tělesa, v je rychlost tělesa, S je plocha jeho průřezu, m je hmotnost tělesa a ϱ je hustota prostředí, v našem případě vzduchu. Úloha má analytické řešení, pokud se jedná pouze o vrh ve svislém směru. Jakmile má ale předmět nějakou rychlost podél horizontální (x-ové) osy, analytické řešení neexistuje a je třeba si vypomoci počítačem.

Simulace

K simulaci bylo použito fiktivní těleso o koeficientu odporu $C = 0{,}5$, tedy koule nebo kornout. Počáteční hodnoty rychlosti tělesa byly zvoleny tak, aby byly v doletu viditelné co největší rozdíly.

Po časových intervalech o velikosti $\Delta t = 0{,}001\,\mathrm{s}$ se počítaly rychlost, souřadnice a zrychlení tělesa. Tento interval zajistil přesnost určení x-ové uražené vzdálenosti s odchylkou 1 až 4 mm, což je vzhledem k rozpětí uražených vzdáleností dostačující. Předpokládejme, že kladný směr pro složky rychlosti je ve směru osy x a proti směru osy y. Rychlosti jako i zrychlení se v čase t vypočetly po složkách z údajů o rychlostech, poloze a zrychlení pro čas $t - \Delta t$ podle následujících vztahů (index 1 značí hodnotu pro čas t, index 0 značí hodnotu pro čas $t - \Delta t$)

$$v_{x1} = v_{x0} - a_{x0}\Delta t\,, \qquad v_{y1} = v_{y0} + (g - a_{y0})\Delta t\,,$$

$$v_1 = \sqrt{v_{x1}^2 + v_{y1}^2}\,, \qquad a_1 = \frac{C\varrho S v_1^2}{m}\,,$$

$$a_{x1} = a\frac{v_{x1}}{v} \cdot \text{„průmět odporového zrychlení do směru } x\text{-ové osy“}\,,$$

$$a_{y1} = a\frac{v_{y1}}{v} \cdot \text{„průmět odporového zrychlení do směru } x\text{-ové osy“}\,,$$

$$x = x_0 + v_{x0}\Delta t - \tfrac{1}{2}a_{x0}\Delta t\,, \qquad y = y_0 - v_{y0}\Delta t - \tfrac{1}{2}(g - a_{x0})\Delta t\,.$$

Ve chvíli, kdy y-ová souřadnice mění znaménko, byla odečtena hodnota x-ové souřadnice, tedy dolet. Rozdíl x-ové souřadnice v dobách $\pm\Delta t$ byl zaznamenán jako odchylka. Následně byla změněna hmotnost simulovaného tělesa, aby se znovu odečetl dolet.

Na první pohled by $x(m)$ měla být asymptotická funkce, což je očekávatelné, neboť pro vysoké hmotnosti bude vliv odporu vzduchu zanedbatelný a všechny těžší předměty začnou padat, stejně jako ve vakuu, téměř na stejné místo. Počáteční hodnoty pro simulaci byly zvoleny následovně:

$$v_x = 2{,}5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,, \quad v_y = 0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,, \quad y = 0{,}93\,\mathrm{m}\,, \quad x = 0\,\mathrm{m}\,,$$

$$C = 0{,}5\,, \quad S = 0{,}004\,\mathrm{m^2}\,, \quad \varrho_{\mathrm{vzduchu}} = 1{,}2759\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}\,.$$

Dolet pro různé hmotnosti tělesa

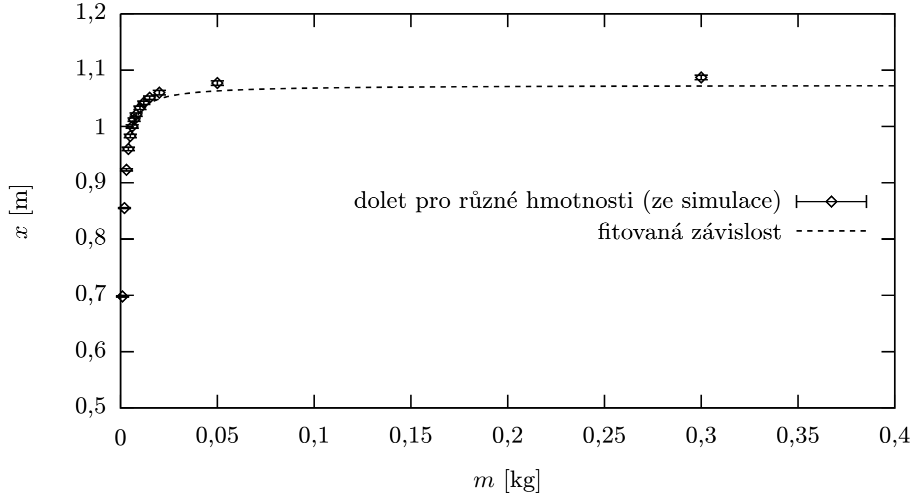
hmotnost [kg]	dolet [m]	odchylka [m]
0,001	0,698	0,001
0,002	0,855	0,001
0,003	0,923	0,002
0,004	0,960	0,003
0,005	0,983	0,003
0,006	1,000	0,003
0,007	1,012	0,003
0,008	1,021	0,003
0,010	1,033	0,003
0,012	1,042	0,003
0,015	1,051	0,003
0,020	1,060	0,004
0,050	1,077	0,004
0,300	1,087	0,004
0,800	1,086	0,004
1,500	1,087	0,004
5,000	1,087	0,004

Naměřená data byla fitována funkcí

$$f(x) = \frac{a}{x^b} + c$$

s výslednými parametry $a = (-6{,}9 \pm 4{,}5) \cdot 10^{-4}$ (chyba 65 %), $b = (9{,}1 \pm 0{,}9) \cdot 10^{-1}$ (chyba 10 %) a $c = (1{,}1 \pm 0{,}01)$ (chyba 1 %).

Bohužel fitovaná funkce na simulované hodnoty nesedí až tak dobře (jeden parametr byl vypočten s velkou chybou 65 %), ale je to nejlepší výsledek mezi funkcemi, které byly ozkoušeny (logaritmus, exponenciála, . . .).



Obr. 1. Graf závislosti $x(m)$ pro badmintonový míček

Měření

K měření byly jako tělesa stejného tvaru a různých hmotností použity badmintonové míčky s různými závažími upevněnými ve špičce. Tyto byly zvoleny, protože jev je nejlépe rozpoznatelný na lehkých tělesech (vezmeme-li v úvahu, jakých rychlostí je možno v domácích podmínkách dosáhnout). Jako stroj, který zaručí stejnou výletovou rychlost bylo použito těžké kyvadlo o hmotnosti 1,77 kg (aby bylo možno u něj zanedbat odpor vzduchu) s upevněnou trubicí, ze které vylétávaly badmintonové míčky. V nejnižším bodě kyvadlo narazilo do vyměkčené zábrany (k tomuto účelu posloužil malý polštář, aby se zabránilo odrazu kyvadla a výletu míčku jiným směrem). Míček, který mohl v trubici volně klouzat pokračoval dál původní rychlostí. Jako závaží do špičky míčku byly postupně použity hliněná kulička, olověná kostka a dvě olověné kostky. Jako konstrukce pro kyvadlo byly použity štafle. Bylo ovšem těžké dosáhnout výletu míčku vždy jedním směrem, neboť polštář jako tlumidlo nestačil. Vhodnější by byla třeba plastelína.

Kyvadlo překonávalo výškový rozdíl 60 cm, což v dolní úvrati odpovídá rychlosti $v_x = 3{,}4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Výletová rychlost byla ale pravděpodobně o něco menší (kvůli tření při výletu z trubice).

Měření doletu badmintonových míčků

hmotnost [kg]	0,005	0,005	0,005	0,005	0,010	0,026	0,050
dolet 1 [m]	1,01	1,12	1,01	1,03	1,30	1,04	1,03
dolet 2 [m]	0,80	0,97	1,10	1,01	1,02	1,17	1,09
dolet 3 [m]	0,99	1,05	1,12	1,14	1,41	1,23	1,25
dolet 4 [m]	0,98	1,00	0,88	0,95	1,18	1,00	1,31
dolet 5 [m]	0,94	0,90	0,82	0,77	1,03	1,26	1,10
dolet 6 [m]	0,96	0,97	0,87	0,99	1,17	1,26	1,14
průměr [m]	0,95	1,00	0,97	0,98	1,19	1,16	1,15
směrodatná odchylka [m]	0,07	0,07	0,12	0,11	0,14	0,10	0,10

Z měření je vidět, že těžší míčky létají dál. Kvůli velikosti chyby způsobené nepřesností výletové rychlosti (nebylo v mých silách eliminovat tření míčku, než vyletí z trubice, ani pohyby konstrukce kyvadla při nárazu) není ovšem možné z naměřených hodnot ověřit, jak korespondují simulovaná data s naměřenými.

Tereza Zábojníková
terka@fykos.cz